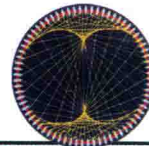
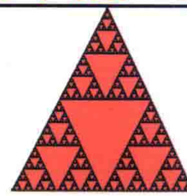
新编中学数学解题方法1000招丛书

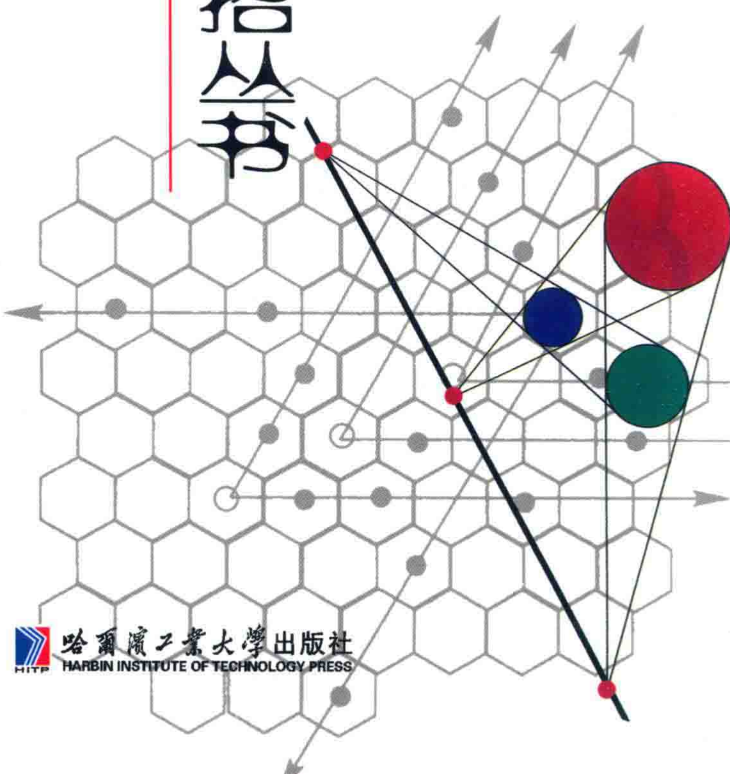


高中版 05



不等式

刘培杰数学工作室 编



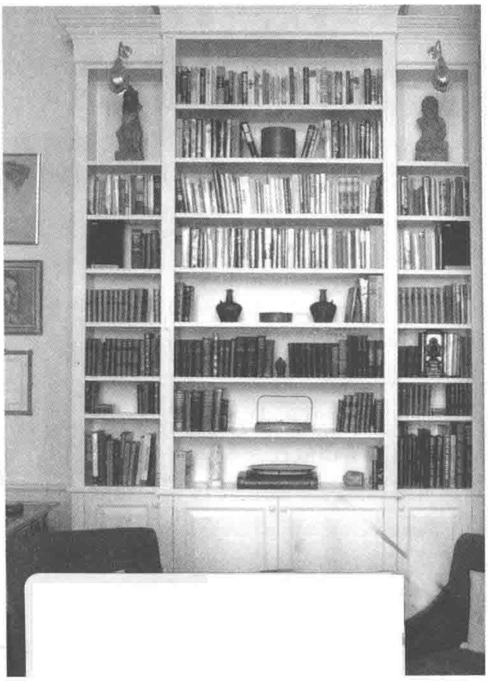
哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 05

新编中学数学解题方法1000招丛书

不等式

刘培杰数学工作室 编



我们现在所具有的数学真理中的大多数都是以许多世纪以来的艰苦智力劳动为先决条件的。

—— H.Schubert

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书以专题的形式对高中数学中不等式的重点、难点进行了归纳、总结，全书共分两大部分，即解题方法编和试题精粹编，内容丰富，涵盖面广，可使学生深入理解不等式的应用，灵活使用解题方法.

本书适合高中师生和广大数学爱好者研读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法1000招丛书. 不等式/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-5603-4464-5

Ⅰ.①新… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第291522号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张 佳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张11.5 字数240千字
版 次 2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4464-5
定 价 38.00元

总序

俗话说:"自古华山一条路",如果将学数学比作爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题.

华罗庚曾将光看书不做习题比作"入宝山而空返".

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道.近年来,参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌.正所谓"踏遍坎坷成大路".

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:"解题同钓鱼术一样永远不会学会".但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学,至少是可模仿的.华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:"相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸."

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Halmos, Paul Richard)一句"问题是数学的心脏"的惊人之语,将解题运动推向高潮.1987年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:"如果说确有一股贯穿20世纪80年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流".

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现. 光是著名的斯普林格出版社(Springer Verlug)从1981年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就出版了20多种. 我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在1949年2月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并"希望各大书局大量编印中学解题参考用书". 近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》(13册)，北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书.

哈尔滨工业大学出版社作为一"边陲小社"，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖.

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以"贪大求全"为原则，试图穷尽一切方法，妄称"解题精技，悉数其间". 然而这实在是不可能的，也是不必要的. 正所谓"有法法有尽，无法法无穷". 况且即使是已有的方法也不能生搬硬套. 我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳(1835—1902)曾指出：解题要随机应变，不能"执一而论"，死记硬背为"呆法"，"题目一变即无所用之矣"，须"兼综各法"以解之，方可有效. 数学家惠特霍斯(Whitworth)说过"一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法".

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题. 正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握.

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆(1850—1941，Pringsheim，Alfred)的名言.

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度.

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事.

刘培杰

2013年12月15日

于哈工大

前言

有网友将社会等级排列为：

暴发户＞高富帅＞白富美＞女神＞粉木耳＞黑木耳＞女屌丝＞失足＞男屌丝.

网络语言往往是社会中最潮的语言，也是应用得最广泛的语言.不等号出现其中说明普及之广.

“大于”和“小于”号(signs for “greater” and “less”)现在通用的“大于”号＞和“小于”号＜都是英国人哈里奥特于1631年开始采用的.但当时并没有为数学界所接受.直到100多年后，才逐渐成为标准的应用符号.

沃利斯在1655年曾用$\underline{>}$表示“等于或大于”，1670年他又写为$\underline{>}$(等于或大于)及$\underline{<}$(等于或小于).现在常用的符号$\geqslant$和$\leqslant$符号，据哥德巴赫在1734年1月写给欧拉的一封信中所述，是一个法国人P·布盖(1698—1758)首先采用的.后来渐流行.

符号≪(远小于)和≫(远大于)是庞加莱和波莱尔于1901年引入的，很快就为数学界接受了.现在也这样用.

相等是相对的，不等是绝对的．世界上的事物大多是以不等式的形式出现在我们周围，我们随时要比较大小．比如，最近有电视台盯上了麦当劳的薯条，对其大包、中包、小包逐一过称，得出的结论是有时候中包比小包还少，认为快餐店的员工仅靠目测装袋的方式不合理，还在大街上随机采访消费者对此的态度．

比较大小光靠直觉是不行的，要靠严格的数学理论，这个理论统称为不等式．举个例子：将 $n\times n$ 个数排成一个方阵，先取每列的最小值，再取每行的最大值．那么，是这些最小值中的最大值大，还是那些最大值中的最小值大呢？单靠直觉难以回答．但当取这两个值行列交叉的数作中间量后，再根据不等式的传递性即可得出结论．

洛尔迦在介绍当今最伟大的拉丁美洲诗人之一的聂鲁达时说：他是“离死亡比哲学近，离痛苦比智力近，离鲜血比墨水近”的作家．

数学作为一种文化，不等式语言和不等式的思维已经深深地植入了文明社会的每一位成员的头脑中．不论你是从事什么职业，都不可能完全脱离不等式的思维方法．因为你总要比远近、比轻重、比大小，即便是宣称自己最不善长数学的作家也是如此．张爱玲在其小说中就写道：“个人即便等得及，时代是仓促的，已经在破坏中，还有更大的破坏要来”．

在1978年“文化大革命”结束后的第一次全国各省市自治区中学生数学竞赛总结大会上，华罗庚教授举了一个非常现实的例子，在解放前地主剥削农民主要是靠收地租的方式．由于是按土地面积收，所以地主便利用农民数学知识贫乏多算土地面积．一块不规则的四边形土地，北方地主使用的公式是：用两组对边中点的连线长度之积来进行计算；而南方地主是利用两组对边长度的平均值的乘积来进行计算．华罗庚指出后者大于前者，而前者又大于土地的真实面积，这其中的差就是多算的面积．而当土地形状为矩形时，这三者又是相等的，所以这两种算法又都带有一定的欺骗性．这真是“算计不到就受穷”啊！在现代人的生活中这样的例子也比比皆是，比如我们去菜市场买菜，我们一般会买很多样．我们希望买每一样菜时都将零头抹去．而菜贩们往往希望称完后加一起抹零．虽然菜贩们文化普遍不高，但他（她）们却不自觉地运用了$[\alpha]+[\beta]+\cdots+[\gamma]\geqslant[\alpha+\beta+\cdots+\gamma]$这个含高斯函数的不等式．

在当代经济学中许多问题最终都会被归结为不等式问题，所以提出康托洛维奇不等式的俄罗斯数学家康托络维奇居然获得了诺贝尔经济奖．当然更多的

不等式还是被用到纯数学中，几乎每一位著名数学家都有一个或几个以自己名字命名的不等式.如希尔伯特不等式、柯西不等式、哈代不等式、阿贝尔不等式、伯努利不等式、切比雪夫不等式等.还有以国人命名的华罗庚不等式、徐利治不等式、樊畿不等式等.湖南师范大学数学系的匡继昌先生曾编过一本《常用不等式》(已经出到第三版)其中收录了几千个常用不等式.英国数学家哈代也写过一本经典的著作就叫《不等式》.最近一位越南人写了一部《不等式的秘密》(共2卷)在我室出版成为一时亮点，可惜的是题目较难，不太适合普通高中生，不像本书适合于所有高中师生.

建立并用好一个不等式对所有学习和研究数学的人都是重要的，大者可以像美国数学家德布朗斯通过证明一个古典不等式而解决了著名的比勃巴赫猜想.小者可以帮助考生巧妙地攻克高考和竞赛中的不等式问题.

不等式在数学中的位置如同诗歌在文学中的地位，都追求自由与多样性.有人说：帝国是诗的敌人，因为：帝国追求控制，诗追求独立；帝国追求奴役，诗追求自由；帝国追求坟墓的整齐，诗追求生命的参差.

不等式亦如此！

刘培杰

2013 年 12 月 12 日

于哈工大

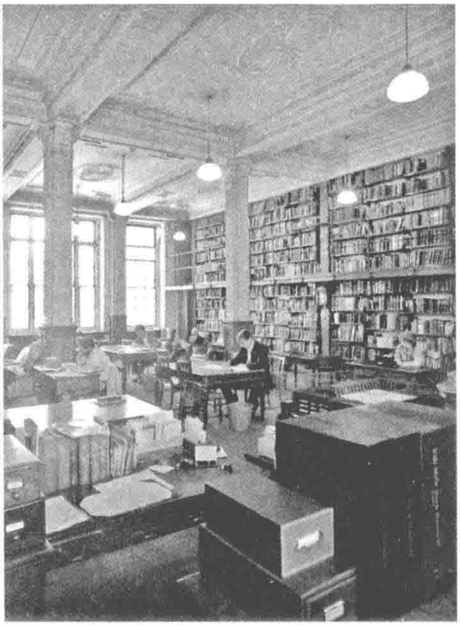
目录

第一编 解题方法编

第二编　试题精粹编

第一编

解题方法编



怎样用初等方法解函数方程

确定不等式恒成立的参数的取值范围，是中学数学教学的难点之一，也是高考、数学竞赛的热点．本节就此类问题的几种基本解法加以论述．

一、利用一次函数的性质

一次函数 $y=f(x)=ax+b$ 在 $x\in[m,n]$ 上恒大于零的充要条件是

$$\begin{cases}a>0\\f(m)>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a<0\\f(n)>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(m)>0\\f(n)>0\end{cases}$$

（对于 $y=f(x)=ax+b$ 恒小于零的条件亦可类似给出）．

例 1　已知，满足 $p=4\sin^4\alpha,\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 的所有实数 p，不等式 $x^2+px+1>2x+p$ 恒成立，求 x 的取值范围．

解　由 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 知 $\sin\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，从而有 $p=4\sin^4\alpha\in\left[\frac{1}{4},4\right]$．

现在考查关于 p 的一次函数 $f(p)=(x-1)p+(x^2-2x+1)$ 恒为正的条件．

显然，当 $x=1$ 时，$f(p)>0$ 不成立，所以 $x\neq1$，依一次函数的性质可知，只要

$$\begin{cases}x-1>0\\f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}(x-1)+(x^2-2x+1)>0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x-1<0\\f(4)=4(x-1)+(x^2-2x+1)>0\end{cases}$$

故 $x>1$ 或 $x<-3$．

故对于一切 $p\in[\frac{1}{4},4]$ 恒有 $f(p)>0$ 的 x 的取值范围是 $\{x\mid x>1$ 或 $x<-3\}$．

例 2　已知 $p=(\log_2x-1)(\log_ab)^2-6\log_2x\log_ab+\log_2x+1$（其中，$a$ 为正数），若当 x 在区间 $[1,2]$ 内任意取值时，p 的值恒为正，求 b 的取值范围．

解　p 可变形为

$$p=[(\log_ab)^2-6\log_ab+1]\log_2x-(\log_ab)^2+1$$

令 $u=\log_2x$，则 $u\in[0,1]$，则

$$p=f(u)=[(\log_ab)^2-6\log_ab+1]u-(\log_ab)^2+1$$

于是该题就变成：当 u 在 $[0,1]$ 内任意取值时，$f(u)$ 恒为正，求 b 的取值范围．

因 $f(u)$ 是一次函数，所以 $f(u)$ 在 $[0,1]$ 上为正，所以

$$\begin{cases}f(0)=-(\log_ab)^2+1>0\\f(1)=-6\log_ab+2>0\end{cases}$$

所以

$$-1<\log_ab<\frac{1}{3}$$

故当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<b<\sqrt[3]{a}$；当 $0<a<1$ 时，$\sqrt[3]{a}<b<\frac{1}{a}$.

说明：在不等式恒成立的问题中，若主元(或参数)能变为一次的形式，则我们都能利用一次函数的性质来求解.

二、利用二次函数的单调性

任何一个一元二次不等式总可以化成 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的形式，由二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象和性质，我们不难得出以下两个结论.

(1) $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的充要条件是 $\Delta<0$.

(2) $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 在区间 $[m,n]$ 上恒成立的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(n)>0\\ -\frac{b}{2a}>n\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(m)>0\\ -\frac{b}{2a}<m\end{cases} \quad 或\ \Delta<0$$

例3 设 $f(x)=x^2-2ax+2$，当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，都有 $f(x)\geqslant a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解 设 $F(x)=f(x)-a=x^2-2ax+2-a$，则问题转化为当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$F(x)\geqslant 0$ 恒成立.

(1) 当 $\Delta=4(a-1)(a+2)<0$，即 $-2<a<1$ 时，对一切 $x\in[-1,+\infty)$，总有 $F(x)>0$ 成立.

(2) 若 $\Delta=4(a-1)(a+2)\geqslant 0$ 时，由图1可知，$F(x)\geqslant 0$ 的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ F(-1)\geqslant 0\\ -\frac{-2a}{2}\leqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(a+2)\geqslant 0\\ a+3\geqslant 0\\ a\leqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow -3\leqslant a\leqslant -2$$

综上所述可知，a 的取值范围是 $a\in[-3,1)$.

例4 已知集合 $A=\{b\mid$ 对任意的实数 x,y，有 $2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0\}$，$B=\{b\mid$ 对任意的复数 z_1,z_2，有 $|z_1-z_2|>b\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 b 的取值范围.

解 由于 z_1,z_2 是任意的两个复数，而 $|z_1-z_2|$ 又是非负数，其最小值可能是0，因而 $b<0$.

在 $b<0$ 的条件下，集合 A 可化为

$$2\cos 2(x-y)+8b\cos(x-y)+8b(b+1)+5>0$$

令 $u=\cos(x-y)$，则 $-1\leqslant u\leqslant 1$，则

$$f(u)=4u^2+8bu+8b(b+1)+3>0$$

于是问题就转化成：当 b 为何值时，函数 $f(u)$ 在区间 $[-1,1]$ 上位于 x 轴的上方(或恒大于0).

依二次函数恒大于 0 的充要条件有

(1)$\begin{cases}\Delta<0\\ b<0\end{cases}$　　(2)$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(1)>0\\ -\dfrac{8b}{2\times 4}>1\end{cases}$　　(3)$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(-1)>0\\ -\dfrac{8b}{2\times 4}\leqslant -1\\ b<0\end{cases}$

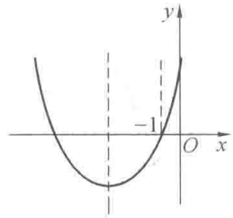


图 1

解之得 $-\dfrac{1}{2}<b<0$ 或 $b<-1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

三、分离参数

若关于 x 的不等式

$$f(x,\lambda)\geqslant 0(\text{或 } f(x,\lambda)\leqslant 0) \quad ①$$

在区间 D 上恒成立,求实参数 λ 的范围.

如果能将不等式 ① 化为 $F(\lambda)\geqslant G(x)$(或 $F(\lambda)\leqslant G(x)$)的形式,且可求出 $G(x)$ 在区间 D 上的最大(最小)值,那么不等式 ① 在区间 D 上恒成立的充要条件是:$F(\lambda)\geqslant \max\{G(x)\}$(或 $F(\lambda)\leqslant \min\{G(x)\}$).

例 5　已知不等式$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{12}\log_a(a-1)+\dfrac{2}{3}$ 对于一切大于 1 的自然数 n 都成立,试求实数 a 的取值范围.

解　设 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2)$. 因为

$$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

所以 $f(n+1)>f(n)$,即 $f(n)$ 是关于 n 的递增函数.

故有 $f(n)\geqslant f(2)=\dfrac{7}{12}$,即 $f(n)$ 的最小值是$\dfrac{7}{12}$.

要使 $f(n)>\dfrac{1}{12}\log_a(a-1)+\dfrac{2}{3}$ 对于一切 $n\geqslant 2$ 的自然数 n 恒成立,则必须$\dfrac{1}{12}\log_a(a-1)+\dfrac{2}{3}<\dfrac{7}{12}$,即有 $\log_a(a-1)<-1$.

因为 $a>1$,所以 $a-1<\dfrac{1}{a}$,解之得 $1<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 6　若 $x\in(-\infty,-1]$,$1+3^x+(a-a^2)9^x>0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

解　原不等式 $\Leftrightarrow a-a^2>\dfrac{-3^x-1}{9^x}$,则有

$$a-a^2>\max\left\{\frac{-3^x-1}{9^x}\right\} \quad ①$$

令 $y=\dfrac{-3^x-1}{9^x}=-(\dfrac{1}{3})^{2x}-(\dfrac{1}{3})^x=-u^2-u$(设 $u=(\dfrac{1}{3})^x$).

由 $x\in(-\infty,-1]$ 得 $u\in[3,+\infty)$. $y=-u^2-u$ 在 $u\in[3,+\infty)$ 上最大值为 -12，代入不等式①得，$a-a^2>-12$，解之得 $-3<a<4$.

故实数 a 的取值范围为 $\{a\mid -3<a<4\}$.

四、数形结合

例7 设 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0$ 恒成立，求 m 的取值范围.

解 令 $x=\sin\theta$，由 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 得 $0\leqslant x\leqslant1$，则原不等式可化为

$$x^2-2mx+2m+1>0$$

即

$$x^2+1>2m(x-1)$$

作抛物线弧 $\overset{\frown}{AB}$，$y=x^2+1(0\leqslant x\leqslant1)$.

作过点 $C(1,0)$ 且斜率为 $2m$ 的直线 l：$y=2m(x-1)$，如图2所示.

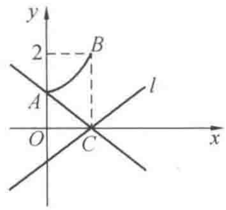


图2

则只须求使 $\overset{\frown}{AB}$ 位于直线 l 上方的 m 的取值范围即可.

这由直线 l 的斜率 $2m>k_{CA}=-1$ 即知，$m>-\frac{1}{2}$.

以上四种方法是确定不等式恒成立的参数的取值范围的基本方法. 此外，还有其他一些方法，如讨论法、参数法、判别式法、待定系数法等.

怎样证明绝对值不等式

证明绝对值不等式有多种方法，其中有两种基本方法（等价变换法和放缩法）和一种特殊方法（三角法）颇为重要，现举几例说明.

一、等价变换法

这种方法的基本思想是：把证明绝对值不等式的问题转化为一般不等式的证明. 此法的关键是在去掉绝对值的符号时，要保持所得的不等式与原不等式等价. 等价变换的主要理论依据是：$|f(x)| \leqslant |\varphi(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leqslant \varphi^2(x)$. 此时 x 的取值范围为 $f(x)$，$\varphi(x)$ 的定义域的交集.

例 1　如果 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，求证：$\left|\dfrac{1-abc}{ab-c}\right|>1$.

证明
$$\left|\frac{1-abc}{ab-c}\right|>1 \Leftrightarrow \frac{(1-abc)^2}{(ab-c)^2}>1$$

条件 $ab \neq c \Leftrightarrow (1-abc)^2>(ab-c)^2 \Leftrightarrow (1-abc)^2-(ab-c)^2>0 \Leftrightarrow (1-abc+ab-c)(1-abc-ab+c)>0 \Leftrightarrow (1-c)(1+ab)(1+c)(1-ab)>0 \Leftrightarrow (1-c^2)(1-a^2b^2)>0$.

因为 $|a|<1$，$|b|<1$，所以 $|ab|<1$，又因为 $|c|<1$，所以 $a^2b^2<1$，$c^2<1$.

故 $1-c^2>0$，$1-a^2b^2>0$，所以 $(1-c^2)(1-a^2b^2)>0$. 根据等价不等式的传递性推知 $\left|\dfrac{1-abc}{ab-c}\right|>1$ 成立（此处 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$）.

二、放缩法

要证 $a<b$，可先证 $a<c$，若易证 $c<b$，则由 $a<c$ 且 $c<b$ 推得 $a<b$.

这就是用放缩法证不等式的思路. 用此法证明绝对值不等式时，在中学里常用到下述公式：$a^2+b^2 \geqslant 2|a||b|$，即 $a^2+b^2 \geqslant 2|ab|$（当 $|a|=|b|$ 时等号才成立），$|a|-|b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$（$|a-b| \leqslant |a|+|b|$ 是 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ 的重要推论）.

例 2　如果 $|a|<1$，$|b|<1$，求证：$\left|ab \pm \sqrt{(1-a^2)+(1-b^2)}\right| \leqslant 1$.

证明　因为 $|a|<1$，$|b|<1$，所以 $|ab|<1$，即有 $1-|ab|>0$.

因为 $a^2+b^2 \geqslant 2|ab|$，所以
$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\sqrt{1-(a^2+b^2)+a^2b^2} \leqslant \sqrt{1-2|ab|+|ab|^2}=\sqrt{(1-|ab|)^2}=1-|ab|$$

因为 $|x \pm y| \leqslant |x|+|y|$，所以
$$\left|ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right| \leqslant |ab|+\left|\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right| \leqslant |ab|+1-|ab|=1$$

即
$$\left|ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right| \leqslant 1$$

例 3　证明：$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right| \leqslant |a_1-b_1|+|a_2-$