大学数学应用型本科
“十二五”规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

主 编 樊 丹 宋军智
副主编 苗成双 吴莉华

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

大学数学应用型本科“十二五”规划教材

线性代数

主　编　樊　丹　宋军智
副主编　苗成双　吴莉华

重庆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/樊丹,宋军智主编.—重庆:重庆大学出版社,2015.2

ISBN 978-7-5624-8719-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①樊…②宋… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 280390 号

大学数学应用型本科"十二五"规划教材

线性代数

主 编 樊 丹 宋军智

副主编 苗成双 吴莉华

责任编辑:文 鹏 版式设计:文 鹏

责任校对:关德强 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

万州日报印刷厂印刷

*

开本:720×960 1/16 印张:8.25 字数:139 千

2015 年 2 月第 1 版 2015 年 2 月第 1 次印刷

印数:1—4 200

ISBN 978-7-5624-8719-7 定价:22.00 元

前言

线性代数是高等学校诸多专业的重要基础课,是解决工程技术领域问题和经济管理问题的理论依据。本书以适应培养应用型人才为目标的高等学校各专业的需要,在保证整体框架完整的前提下,降低了理论性的讲解,增强了应用性的讲解。这种教材体系既有利于教师教学,也有利于学生学习。

本书内容包括n阶行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、相似矩阵与二次型。在内容的编排上,全书围绕线性方程组,利用矩阵的初等变换展开讨论。在保证整体框架完整的前提下,局部调整了章节内容的顺序,对定理和性质的证明进行了合理取舍,体现出本书轻理论、重应用的价值。在例题的选择上,本书以例题具有代表性、针对性以及题型具有多样性为原则进行编排。这种选题方式,可以使大多数学生掌握常见题型的解法,在此基础上也为有兴趣进一步自主学习线性代数的学生提供了参考。

全书由西南交通大学胡成教授筹划、修订和统稿。在编写过程中,胡成教授也给予了悉心指导,在此表示诚挚的感谢。本书第1章由宋军智和苗成双执笔,第2章由刘洋和李政文执笔,第3章由樊丹和康淑菊执笔,第4章由殷勇和王妍执笔,第5章由吴莉华和吴田峰执笔。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请读者不吝指正。

编　者

2014年9月

目　录

第1章　n阶行列式

行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的.行列式的提出可以追溯到17世纪,最初的雏形由日本数学家关孝和与德国数学家戈特弗里德·莱布尼茨各自独立得出,时间大致相同.

行列式是线性代数中的重要概念之一,它在数学的许多分支和工程技术中有着广泛的应用.本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质以及计算方法.此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

§1.1　行列式的概念

行列式是研究许多线性代数问题的一个重要工具,起源于解线性方程组.因此首先讨论解方程组的问题,进而给出二三阶行列式的定义.

设有二元一次方程组(二元线性方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中,$a_{ij}(i,j=1,2)$叫做方程组的系数,$b_i(i=1,2)$为常数项,用消元法求解:

① $\times a_{22}$ − ② $\times a_{12}$ 消去 x_2 得到 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$

② $\times a_{11}$ − ① $\times a_{21}$ 消去 x_1 得到 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,可解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)是二元一次方程组的一般解.

但这个公式不好记忆,应用时十分不便.可想而知,后面将要讲的多元线性方程组的解肯定更复杂.因此,我们引进新的符号来表示上述解.

若另设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

则解的形式更简洁:$x_1=\dfrac{D_1}{D}$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

由此给出二阶行列式的定义和计算:

定义 1.1.1 有 4 个数排成两行两列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

两对角线上的元素乘积之差 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

例 1.1.1 求$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$的值.

解 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5\times2-(-1)\times3=13.$

例 1.1.2 当 λ 为何值时,行列式 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$的值为 0?

解 因为 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)$,要使 $\lambda(\lambda-3)=0$,须使 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$.

即知当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时,行列式 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$的值为 0.

思考:当 D 的值不为 0 时,λ 又该如何取值呢?

例 1.1.3 求解二元线性方程组$\begin{cases}5x+4y=8\\4x+5y=6\end{cases}$.

解 由于系数行列式 $D=\begin{vmatrix}5&4\\4&5\end{vmatrix}=25-16=9\neq 0$,知该方程组有解.

再由于 $D_1=\begin{vmatrix}8&4\\6&5\end{vmatrix}=40-24=16$,$D_2=\begin{vmatrix}5&8\\4&6\end{vmatrix}=30-32=-2$,即得方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{16}{9}$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-2}{9}$.

用这个式子表示线性方程组的解的形式比原来更为烦琐,但这创造了多元线性方程组的解的公式及其规律性的解法,为下一步学习矩阵知识做好了准备.

与二元一次方程组类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

的解,引进记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})+$$

$$(-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}).$$

同样令 $D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}$,$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$.

则当$D\neq 0$时,三元一次方程组的解可简洁地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

定义 1.1.2 有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) + (-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})$$

为三阶行列式. a_{ij}称为行列式的元素(简称元),其中 i 称为元素的行标,j 称为列标.

可见三阶行列式仍为一个数值,这个数值可按图 1.1 的对角线法则计算得到.

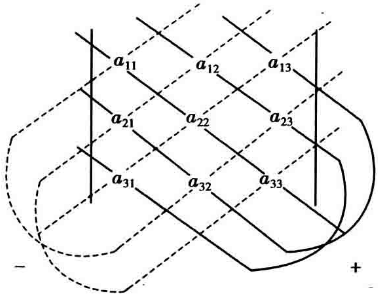

图 1.1

从上图中可看出,三阶行列式是满足以下条件的 6 个项的代数和:从左上角到右下角的每条连线上,来自不同行不同列的三个元素的乘积,规定代数符号为正号;从右上角到左下角的每条连线上,来自不同行不同列的三个元素的乘积,规定代数符号为负号.

例 1.1.4 求行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$的值.

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = [1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0]-[-1\times5\times0+2\times4\times6+3\times0\times(-1)]$$
$$=-10-48=-58.$$

例 1.1.5 a,b 满足什么条件时有$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$.

解　由于$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2-(-b)^2=a^2+b^2$,可见,若要使$a^2+b^2=0$,$a$与$b$必须同时为0.

因此,当$a=b=0$时,$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$.

下面对三阶行列式进行整理,观察其与二阶行列式的关系.

设
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})+$$
$$(-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})$$

上式右端6项两两合并,提取公因式后可得下式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+$$
$$a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由上述结果可见,一个三阶行列式可以表示为三个二阶行列式的代数和.推广二阶、三阶行列式的定义,可以得到一般的n阶行列式的定义.

为了给出n阶行列式的计算,我们先给出余子式和代数余子式的概念.

定义1.1.3　在n阶行列式D中划去元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$所在的第i行、第j列后,余下的元素按原来的次序构成的$(n-1)$阶行列式,称为元素a_{ij}的**余子式**,记为M_{ij};并称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的**代数余子式**,记为A_{ij},即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

如在三阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$中,$a_{11},a_{12},a_{13}$的余子式和代数余子式分别为

$$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix};$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}.$$

不难写出

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

由此可以用递推法定义 n 阶行列式的值:

定义 1.1.4 当 $n=1$ 时 $|a_{11}|=a_{11}$(注意这里 $|a_{11}|$ 不是 a_{11} 的绝对值),当 $n\geqslant 2$ 时,n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

注:①通过定义 1.1.4 计算一个 $n(n>3)$ 阶行列式,就要计算 n 个 $n-1$ 阶行列式,而计算一个 $n-1$ 阶行列式,就要计算 $n-1$ 个 $n-2$,……如此进行下去,最后计算一个 n 阶行列式,就要计算 $n(n-1)\cdots 4$ 个三阶行列式,计算量相当大.

②四阶以上(包含四阶)的行列式的计算不再适用对角线法则.

③行列式 D 的左上角到右下角连线称为 D 的主对角线,主对角线上元素为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$.

为了简化计算,我们需要研究行列式具有的性质,为此先计算几个特殊的 n 阶行列式.

由行列式定义知道,如果行列式中第一行元素除 a_{1j} 以外都为零,则有

$$D=a_{1j}A_{1j}$$

例 1.1.6 计算 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{12}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

此行列式称为**下三角行列式**,其特点是当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0(i,j=1,2\cdots,n)$,即主对角线以上元素都为零,主对角线下方元素不全为零.

解 行列式的第一行除 a_{11} 以外都为零,所以由定义得

$$D=a_{11}A_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A_{11}是 $n-1$ 阶下三角行列式,则继续由定义得

$$A_{11}=a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以此类推,可得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角行列式等于主对角线上元素之积.

特别地,**主对角行列式**

$$\Lambda=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.1.7 证明 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$

证 行列式的第一行除 a_{1n} 以外都为零,所以由定义得

$$D=a_{1n}A_{1n}=a_{1n}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3n-2} & a_{3n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} a_{2n-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4n-3} & a_{4n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-3} & a_{nn-2} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdots (-1)^{1+2} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{(n-1)+\frac{(n-1)(n+2)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2(n-1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{2(n-1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

特别地,副对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

例 1.1.8 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

记 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$,证明 $D=D_1D_2$.

证 由行列式定义

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=D_1D_2$$

类似地,可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

***注:n 阶行列式还可以有另外一种定义方式,可以证明这两种定义是等价的,而这种新的定义需要先定义全排列及其逆序数的概念.如下:**

定义 1.1.5　由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为这 n 个元素的一个 n 阶全排列(简称 n 阶排列),记为 $i_1i_2\cdots i_n$ 或 $j_1j_2\cdots j_n$.

n 个不同元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示. 如 1,2,3 的所有排列为 $P_3=3\cdot 2\cdot 1=6$.

同理 $P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$.

按数字由小到大的自然顺序排列的 n 阶排列 $1,2,\cdots,n$ 称为标准排列.

定义 1.1.6　在 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,则称这两个数构成一个逆序. 在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1.1.9　求排列 3214 的逆序数.

解　在排列 3214 中,3 排在首位逆序数为 0;2 的前面比 2 大的数只有一个"3",故逆序数为 1;1 的前面比 1 大的数有两个"3、2",故逆序数为 2;4 是最大数,逆序数为 0.

于是排列的逆序数为 $\tau(3214)=0+1+2+0=3$.

注:一般求逆序数都是从一侧(左侧或右侧)依次查找计算,也可按照自然

顺序查找.

定义 1.1.7 n 阶行列式的定义：设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^\tau$，得到形如

$$(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1.3}$$

的项，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数.这样的排列共有 $n!$ 个，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式的元素.

§1.2 行列式的性质

利用行列式的定义直接计算行列式一般很困难，行列式的阶数越高，困难越大.为了简化行列式的计算，下面来讨论行列式的性质.

首先介绍一个重要定理.由上节 n 阶行列式的定义知，n 阶行列式可表示为第一行的元素与起对应的代数余子式的乘积之和.事实上，行列式可由任意一行(列)的元素与其对应的代数余子式的乘积之和表示.

定理 1.2.1 n 阶行列式等于它的任意一行(列)各元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

证明略.

该定理又称为行列式按某行(列)展开定理,特别地:

推论 1.2.1　如果行列式中第 i 行元素除 a_{ij}外都为零,那么行列式等于 a_{ij}与其对应的代数余子式的乘积,即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

对于 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若把 D 中每一行元素换成同序数的列的元素,得新行列式:

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式,有时也用 D'表示 D 的转置行列式.

性质 1.2.1　**行列式与它的转置行列式相等.**

证　用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$,结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立.对于 n 阶行列式 D 和 D^{T},分别按第一行和第一列展开,得

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj-1} & a_{nj+1} & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}^{T} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}^{T}$$