普华文化

数独的逻辑

数独算法从入门到精通

SUDOKU

严人觉◎著

直指数独本质的创新解法完整介绍

全面提升**逻辑思维能力**、

判断推理能力、

观察能力的数学游戏

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

数独的逻辑

数独算法从入门到精通

SUDOKU

严人觉◎著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

数独的逻辑：数独算法从入门到精通 / 严人觉著
. —北京：人民邮电出版社，2015. 2
ISBN 978-7-115-37924-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①严… Ⅲ. ①智力游戏 Ⅳ.
①G898. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 291230 号

内 容 提 要

数独游戏看似简单、容易上手，实则逻辑严谨，研究起来永无止境。本书作者深入探究数独的内在机理，以深入浅出的语言和丰富的图解，详细总结了数独的求解方法、设计方法，以及数独所具有的诸多特性，有很多自己独到的发现与创造，为大众读者了解数独、理解数独、提升数独求解能力，提供了一套系统的方法和思路。

本书适合数独初学者以及希望提升自己数独解题能力的读者参考阅读。

◆ 著　　　严人觉
责任编辑　王飞龙
责任印制　焦志炜
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164　　电子邮件 315@ptpress. com. cn
网址 http://www. ptpress. com. cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：787 × 1092　1/16
印张：14. 5　　2015 年 2 月第 1 版
字数：200 千字　　2015 年 2 月北京第 1 次印刷

定　价：35. 00 元

读者服务热线：（010）81055656　印装质量热线：（010）81055316
反盗版热线：（010）81055315
广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

前　言

数独是一种老少咸宜的九方格填字游戏。每个数独只有九个九方格（又名井格），需要我们在每个九方格内填入 1、2…9 九个数字。游戏的要求很简单：每大格内、每小行内、每小列内务必九字俱全，不重不缺。这个要求看起来很简单，做起来却不容易，因为数独涉及许多代数里关于排列组合的知识，如果不能用算术语言把这些排列组合说得深入浅出，数独则难以在民间被普及推广。本书绕过了代数的暗礁，用直观易懂的通俗语言，乃至顺口溜，再配上多种图解，所使用的方法不过是算术里的乘除法，便把数独中的许多关键问题交代得一清二楚，使读者不但知其然还知其所以然。

作者煞费苦心，从眼花缭乱、错综复杂的众多数独中梳理出一套清晰的脉络来，并首创了“二同三不”总则、轮换手段、六种错开、八个标本、九套九同字阵式和避己法、模式法、拼列法、圈选清单法，这些都是高屋建瓴、别具匠心的构思。读者只要融会贯通了书中阐述的思路，便能在设计和求解数独时得心应手。若本书的问世能促进数独在我国的传播，使数独成为一项更为广泛流传的民间休闲活动，则作者幸甚。

本书的出版惠承人民邮电出版社各位编辑的精心指导，对全书的增删取舍提出了真知灼见。成书的过程中欣蒙北京师范大学王建平教授出谋划策、穿针引线，使本书得以付梓，在此一并表示谢忱。

此书纯系作者自撰，错误之处在所难免，敬希海内外贤达予以指正，不胜感激。

严人觉

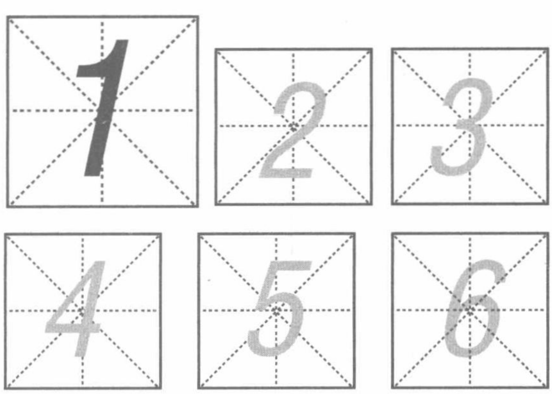
于美国华盛顿

目 录

第一章

数独中的排列组合知识

SUDOKU



数独的基石是排列组合。本章主要讲解代数中的排列组合，并以通俗直观的方式来解释数独所涉及的排列组合概念。即便读者未学过代数，只要细读本章也可以掌握数独中排列组合的要领。

1.1 ①排列组合的概念

事物的件数（或方式数）若是按成分的顺序不同数计出来的，则总件数（或总方式数）称为排列数；事物的件数（或方式数）若是按成分的不同数计出来的，则总件数（或总方式数）称为组合数。

例 1，三人互通电话和三人相互握手有所不同。

三人通话与顺序有关。我打给你和你打给我各算一次，总次数涉及谁打谁接的顺序，故属于排列。

打电话发生在两人之间，即发话人与受话人之间，发话人是三人中之任一，受话人则是其余二人之任一，故发话有 3 方式，受话只有 2 方式，如图 1-1 所示。

图 1-1 打电话

按 $a \times b \times c$ 法则得：

排列总数 $=3\times2=6$ 方式（排列）

上式因子 3、2 不可颠倒，故 6 为排列数。6 个排列（排队列表法）是 1 2、1 3、2 1、2 3、3 1、3 2。

这 6 个排列是三人通话的次数和方式数。

三人握手与成分有关。只要两个人的手拉到一起，不管谁先伸手谁后伸手都只算一次，故握手总次数只与握手的两人有关，而与顺序无关，故握手总次数属于求组合。

由于握手也发生在两人之间，先伸手者可称为主动一方，后伸手者可称为被动一方，

---

① 本书各章标题采用章·节·条·款四级编码，比如 2.1.3.4 表示第 2 章 1 节 3 条 4 款（简读为 2.1.3.4 款），2.1 表示第 2 章 1 节（简读为 2.1 节），2.1.3 表示第 2 章 1 节 3 条（简读为 2.1.3 条）。如此标注较为醒目，方便读者查阅。

今三人参加则主动一方为三人中之任一，故有 3 方式，而被动一方则为三人中余下的两人之任一，故有 2 方式。

如果握手分主被动则应有（a×b×c 法则）：

$3\times2=6$ 方式（排列）

但握手不分主动和被动，每两次只算作一次，故实际握手次数是：

$\frac{3\times2}{2}=3$ 次（组合）

这 3 次组合（排队列表法）是：1 2、1 3、2 3。这 3 个组合是三人握手的次数或方式数。

1.2　排列组合的求法

1.2.1 a×b×c 法则（求答数用）

设每件事物各含 3 个成分，若完成第一成分则有 a 个方式，完成第二成分则有 b 个方式，完成第三成分则有 c 个方式，则全部完成 3 成分共有 a×b×c 个方式，这叫作 a×b×c 法则。故欲求得事物的总排列数或总组合数，或求得事物的总件数，则可按有几成分便设立几个小格，每小格算出其方式数，然后取各方式数连乘起来，其乘积便是总方式数或总件数。但是应当注意并不是所有组合都是直接由 a×b×c 法则求得的，有些组合应先求得排列总数，再求得每个组合的排列数，最后用排列总数除以每组合的排列数，方得出组合数，这便是公式 C_2^4 的运用。

例 1，2 顶帽子 3 件衣服 4 条裤子可以搭配成几套？

用交叉线图表示如图 1-2 所示。

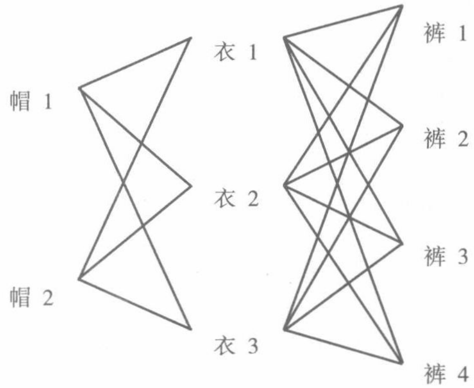


图 1-2　交叉线图

具体计算结果为：

$$2\times3\times4=24 \text{套（组合）}$$

上式诸因子2、3、4的顺序可任意颠倒，故乘积为组合数。

例2，从1、2、3三数字任取两个数字，可得几个两位数（见图1-3）？

图1-3　两位数

因十位数可用1、2、3三个数字之任一，故有3方式，个位数只可用余下两个数字之任一，故只有2方式。

按 $a\times b\times c$ 法则共有两位数的个数为：

$$3\times2=6 \text{方式（排列）}$$

上式中两因子先有3后有2，不可任意颠倒，故乘积属于排列数。6个排列是（排队列表法）：

1 2、1 3、2 1、2 3、3 1、3 2。

1.2.2 公式法（求答数用）

1.2.2.1 排列公式 P_2^4

P_2^4 是4物取2之排列，每个排列含2成分（见图1-4）。

图1-4　4物取2的排列

第一物可取4物之任一，故有4方式，轮到第二物仅余3物之任一可取的有3方式。按 $a\times b\times c$ 法则，从4起连取2数相乘，总排列数 $=4\times3=12$ 个（排列）。

1.2.2.2 组合公式 C_2^4

C_2^4 为 4 物取 2 之组合，每组合含 2 成分 $C_2^4 = \dfrac{4\text{ 物取 }2\text{ 之总排列数}}{\text{每组合所含排列数}}$（见图 1-5）。

先求总排列数（见图 1-5），总排列数 $=4\times3=12$ 方式（排列）。

图 1-5　总排列数

再求每组合（2 成分）之排列数（见图 1-6），每组合之排列数 $=2\times1=2$ 方式（排列）。

图 1-6　每组合之排列数

$$C_2^4 = \frac{\text{从 4 起连取 2 数相乘}}{\text{从 2 起连取 2 数相乘}} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6\text{ 方式(组合)}$$

1.2.3 排队列表法（求项目用）

可以用下面的口诀表示排队列表法：

最小先行（a），　依次递增（b），

后满前涨（c），　涨后复升（d），

如此反复（e），　极大而终（f）。

我们举例并运用图解来说明排队列表法的步骤。

例 1，从 1、2、3、4 四个数字中任取两个数字作为两位数，共有哪些两位数？（见图 1-7）

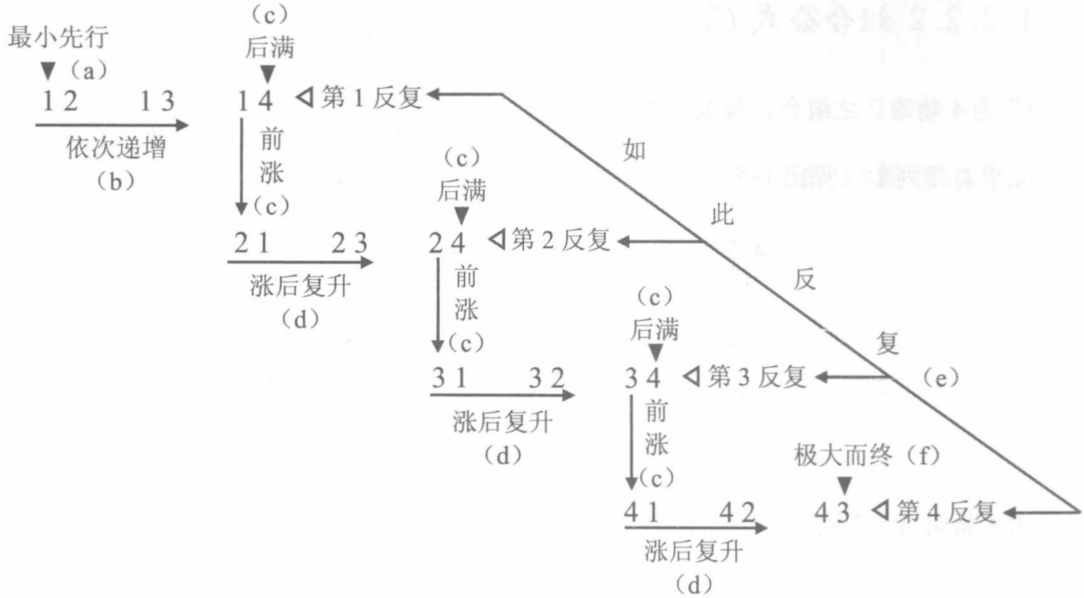


图 1-7　排队列表法图解

以上图解为排队列表法的用法，其中包含两个要点：(1) 记住口诀，(2) 弄懂步骤。一旦掌握这两点后，读者不难直接写出排队列表法的下列成果来（并不一定要求读者仿上图写出具体步骤）：

12、13、14、21、23、24、31、32、34、41、42、43。

必须指出：排队列表法和 a×b×c 法则一样，既可用来求排列也可用来求组合。当用于求排列时，成果表中的各项采用有升有降的顺序。

比如本例的 12 个排列的顺序便是有升有降：

↗	↗	↗	↘	↗	↗	↘	↘	↗	↘	↘	↘
12	13	14	21	23	24	31	32	34	41	42	43

这 12 项排列按总值均系由左到右、由小到大，按位值便是有升（↗）有降（↘）。

反之，当用于求组合时则成果表各项采用光升不降的顺序。比如本例的组合数是 6 个，具体如下：

↗	↗	↗	↗	↗	↗
12	13	14	23	24	34

这 6 项组合按总值仍是后大于前，但按位值则是光升不降（6 项组合表是从 12 项排列表中摘取其中光升不降的顺序而得出的）。

排队列表法是任何书中都找不到的，是作者的首创，是一种直观易懂的通俗方法。作者根据排列公式 P_r^n（n 物取 r 物的排列），从 n 起连取 r 个数相乘，则一个井块（九方格）

若任意填入1、2、3、4、5、6、7、8、9九个数字，可得九字取九的排列数：$P_9^9=9\times8\times7\times\cdots\times2\times1=362880$个排列。这36万多个排列便可用排队列表法一个不漏地写出来（详见1.2.3条），可见排队列表法的神奇威力！

1.2.4 交叉线图（求答数和项目用）

每件事物由哪几个成分组成便立几个栏目，标明每个栏目有哪些方式，然后各栏目之方式借用直线连接起来，便得出交叉线图。由交叉线图即可获得事物的总件数（排列总数或组合总数），也可获得排列组合成果表。

例1，设定以下一个大列首块。今欲由左至右从每列里各取一字组成一个三字正交线（正交线对大列而言是指由左至右沿横向扫描，从各列任取一字所得的三字线）。问可得多少根正交线？（见图1-8）

图1-8 大列首块

今三字正交线是一个三位数，其成分有百位、十位、个位。百位可用3、6、9三方式，十位可用2、5、8三方式，个位可用1、4、7，亦有三方式，于是可作出以下交叉线图（见图1-9）。

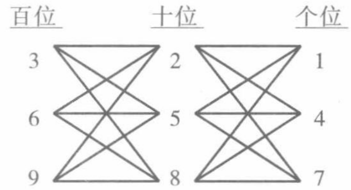


图1-9 三位数之交叉线图

$$3\times3\times3=27\text{个（排列）}$$

上式因子第一列指百位，第二列指十位，第三列指个位，不可颠倒，故27为排列数。那么欲得出排列成果表有何步骤呢？

用图解表示步骤如下（见图 1-10，①②③表示头三步）。

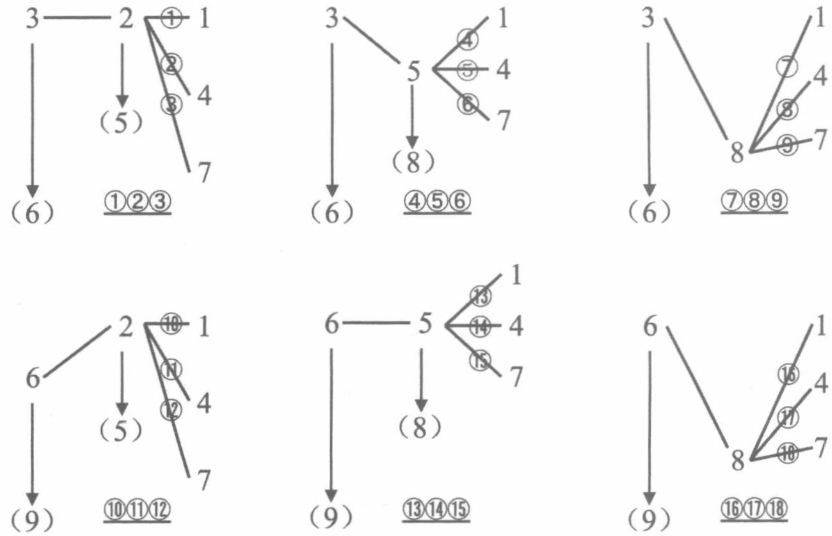


图 1-10　三位数构成步骤

由此得以下成果序列（见图 1-11）。

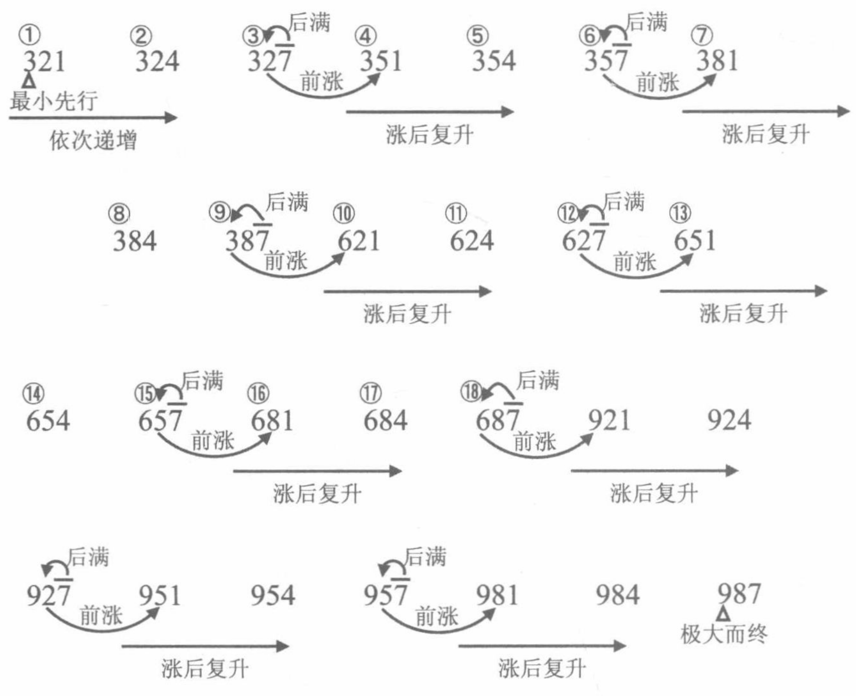


图 1-11　序列

故 27 个排列成果如下：

321	324	327	351	354	357	381	384	387
621	624	627	651	654	657	681	684	687
921	924	927	951	954	957	981	984	987

由排队列表法所得出的排列成果表，各项务必通通是由小到大排列，这才能保证由交叉线图的摘取方法是正确的。

注意在引用排列组合方法时是单用一种方法的情况非常少。比如，用排队列表法时往往先用 $a\times b\times c$ 法则求得答数，然后再用排队列表法求出答案来。采用交叉线图时，同时要用 $a\times b\times c$ 法则和排队列表法。各种排列组合答数没有哪一个不是以 $a\times b\times c$ 法则为基础的，求排列如此，求组合亦如此。但求排列时直接用 $a\times b\times c$ 法则即可，而求组合时有的可直接运用 $a\times b\times c$ 法则，有的得先用 $a\times b\times c$ 法则求得总排列数和每组合的排列数，然后再取两排列数之商方得出组合数。

求排列组合时不是都可写出算式的，比如排队列表法就没有算式。又比如选连交叉线图（非全连交叉线图）求答数时也没有算式。

对于一个排列组合的问题，先要确定它是要求组合还是要求排列，然后酌情选用具体的方法。

1.3 数独中的排列组合

其实数独中的排列组合实例不胜枚举。这里仅举数例。其他一些实例分散在数独中的求解，设计和特性的章节中，请读者随时注意。

例 1，大列首块一横条的错开（参看 4.1.1.2 节的模式法）：欲使大列首块一横条 321 三字在中块内错开有几种方式？

错开乃是数独设计的精髓。数独大列首块一横条上三字如何在中块内错开，按数独的八个标本（见 4.1.1.4）有两方式，一是三字分配到中块的横条的三格内，一格一字，这叫散开式。比如图 1-12（a）。二是三字分配到中块的两格内，其中有一格两字龟缩到一起，这叫龟缩式，如图 1-12（b）所示。

欲求首块一横条三字如何在中块按散开式错开，须引用排列组合中的守位离位概念。横条三字 321 如原封不动叫守位，如果任一数字离开了原位叫离位。根据三字的守位离位情况即可摘出三字的两个错开方式。横条 321 三字有 6 个排列（$P_3^3=3\times2\times1=6$），其成果表（排队列表法）如图 1-13 所示。

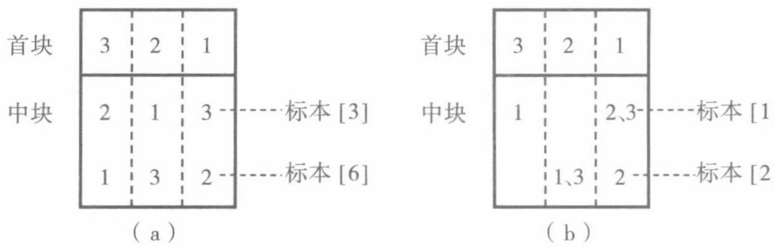


图 1-12　散开式（a）与龟缩式（b）

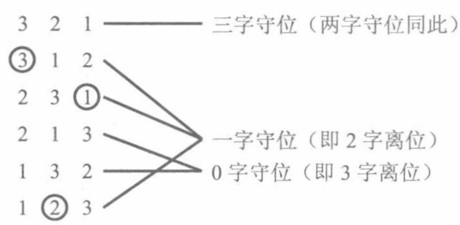


图 1-13　三字守位与三字离位

其中只有 0 字守位才是对 321 的错开：

<u>3</u>　<u>2</u>　<u>1</u>
2　1　3……可看成原三字首字后移而成 3 2 1
1　3　2……可看成原三字末字前移而成 3 2 1

也可以运用以下思路得到上述结果（见图 1-14）。

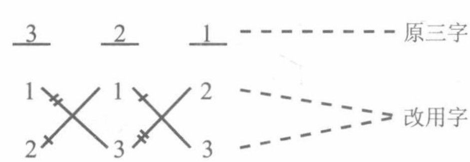


图 1-14　三字的散开式

再借以上的交叉线图即得 321 之两种错开方式：

<u>3</u>　<u>2</u>　<u>1</u>
2　1　3　（记有单点之连线）
1　3　2　（记有双点之连线）

故三字横条的散开式两错开方式可规范化如下（见图 1-15）。