

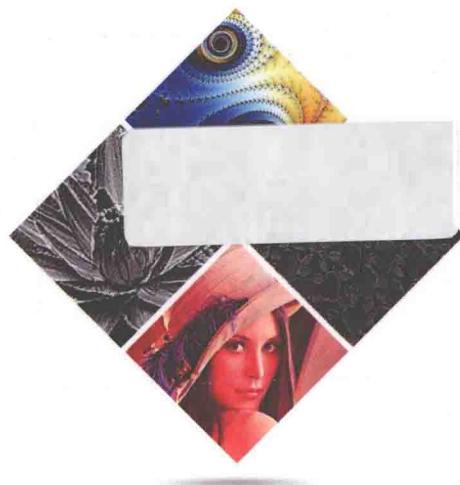


自动化类专业系列实验教材
AUTOMATION

EXPERIMENT OF DIGITAL IMAGE PROCESSING

数字图像处理 实验技术

陈明杰◎编著



清华大学出版社





自动化类专业系列实验教材
AUTOMATION EDUCATION

EXPERIMENT OF DIGITAL IMAGE PROCESSING

数字图像处理 实验技术

陈明杰◎编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书在数字图像处理实验技术的理论基础上,着重介绍了基于 MATLAB 软件平台的数字图像处理相关算法的编程及实现方法,并从工程实例出发,由浅入深地设计了大量基础性实验和综合设计性实验。全书从内容结构上可分为三部分。第一部分为数字图像处理实验技术基础篇,共包括 8 章内容,包括图像处理的基本操作、基本运算、图像变换、图像增强、彩色图像处理以及图像分割等算法的实验技术基础及其 MATLAB 编程实现方法;第二部分为数字图像处理基础性实验篇,包括 7 个基础性实验;第三部分为数字图像工程实例综合设计性实验篇,包括 7 个工程实例综合设计性实验。全书提供了大量应用实例及其相应的 MATLAB 实现代码。

本书适合作为高等院校数字图像处理及相关课程的高年级本科和研究生教材,同时可供相关科研人员、工程技术人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据



责任编辑：文 怡

封面设计：李召霞

责任校对：焦丽丽

责任印制：宋林

出版发行：清华大学出版社

网址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮编：100084

社总机：010-62770175 邮购：010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 素：北京国马印刷厂

经 销：全国新华书店

开 本：185mm×230mm 印 张：12.5 字 数：255千字

版 次：2014 年 12 月第 1 版

印 张：12.5

字 数：255 千字

印 数：1~2000

印 次：2014年12月第1次印刷

定 价：29.00 元



FOREWORD

理论和实践相结合是数字图像处理研究和应用的关键。本实验教材根据“数字图像处理”课程的理论知识,运用 MATLAB 软件平台,结合图像处理工具箱,探讨数字图像处理技术及其相关算法的编程及实现方法。

全书从内容结构上分为三部分。第一部分为数字图像处理实验技术基础篇,共包括 8 章内容。第 1 章介绍数字图像和数字图像处理的基本概念、数字图像的表示方法及数字图像处理软件和工具箱等;第 2 章介绍数字图像的基本操作及其 MATLAB 编程实现;第 3 章介绍数字图像的基本运算及其 MATLAB 编程实现;第 4 章介绍图像的傅里叶变换及其 MATLAB 编程实现;第 5 章和第 6 章着重介绍数字图像的空域和频域增强技术及其 MATLAB 编程实现;第 7 章介绍彩色图像处理及其 MATLAB 编程实现;第 8 章介绍图像分割方法及其 MATLAB 编程实现。

第二部分和第三部分分别从基础性实验和工程实例综合设计性实验两个层次,由浅入深地引导读者从理论进入实践阶段。第二部分为数字图像处理基础性实验篇,包括 7 个基础性实验。其中,实验一为数字图像处理的基本操作,实验二为数字图像的基本运算,实验三为图像的傅里叶变换,实验四为空域图像增强方法,实验五为频域图像增强方法,实验六为彩色图像处理,实验七为图像分割方法。

第三部分为数字图像工程实例综合设计性实验篇,包括 7 个针对工程实例的综合设计性实验,内容涉及数字图像处理应用的各个领域,包括检测技术、生物医学、信号处理、国防科技、身份识别和其他信息识别等。其中,实验八为某 CCD 器件采集的噪声图像的增强处理,实验九为某医用人体骨架扫描图像的增强处理,实验十为某工业检测光学透镜图像的增强处理,实验十一为某电视接收图像的增强处理,实验十二为某飞行器定位技术中的图像分割处理,实验十三为某指纹图像识别(选作),实验十四为某图书索书号的图像识别(选作)。实验十三和实验十四是综合性比较强的工程拓展性实验,可供广大读者部分选做,或者供感兴趣和有能力的研究者使用。本书末尾为每个实验均设计了相应的实验报告,可以作为活页供实验者直接填写,方便快捷。

本书结合了作者多年来的教学实践和研究经验,并力图体现以下特点:

第一,系统介绍了数字图像处理技术的相关知识和内容。每一个知识点的理论都配有相应的应用举例,使读者对数字图像处理技术有一个全面的了解。全书提供了大量应用实例及其相应的 MATLAB 实现代码。

第二,将图像处理理论和应用实例相结合,注重 MATLAB 图像处理功能在实际生活中的应用,使读者学以致用。实验设计由浅入深,从简单实例到复杂的工程实例,循序渐进。

第三,力求内容丰富、图文并茂、文字流畅,将会成为一本学习和使用 MATLAB 数字图像处理方面有价值的参考书。

本实验教材由陈明杰副教授编写,在编写过程中为了更好地反映新技术的发展,参考和引用了前人的研究成果,在此对有关作者一并表示衷心感谢。

由于时间仓促,加上作者水平所限,错误或疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正。

作 者

2014 年 6 月

目录

CONTENTS

第一部分 数字图像处理实验技术基础篇

第 1 章 绪论	3
1.1 什么是数字图像处理	3
1.2 数字图像处理系统	5
1.2.1 数字图像处理系统的硬件结构	5
1.2.2 图像处理的软件开发工具	6
1.3 数字图像的表示	8
1.3.1 数字图像的坐标约定	8
1.3.2 数字图像的矩阵表示	8
1.4 MATLAB 图像处理工具箱的安装	9
思考题 1	11
第 2 章 数字图像的基本操作	12
2.1 数字图像的读、写和显示	12
2.1.1 图像的读取	12
2.1.2 图像的显示	15
2.1.3 图像的保存	18
2.2 数据类和图像类型及其转化	19
2.2.1 数据类	19
2.2.2 数字图像类型	20
2.2.3 数据类和图像类型间的转化	22
思考题 2	24

第 3 章 数字图像的基本运算	25
3.1 图像点运算	25
3.1.1 线性点运算	25
3.1.2 非线性点运算	29
3.1.3 灰度直方图与点运算	30
3.2 图像代数/逻辑运算	32
3.2.1 图像的加法运算	33
3.2.2 图像的减法运算	35
3.2.3 图像的乘法运算	36
3.2.4 图像的除法运算	36
3.2.5 图像的逻辑运算	37
3.3 图像几何运算	38
3.2.1 图像插值法	38
3.2.2 图像变换	38
思考题 3	41
第 4 章 图像的傅里叶变换	42
4.1 图像傅里叶变换	42
4.1.1 图像的离散傅里叶变换	43
4.1.2 图像的快速傅里叶变换	43
4.2 图像傅里叶变换的物理意义	46
思考题 4	49
第 5 章 空域图像增强	50
5.1 灰度变换图像增强	51
5.2 直方图增强	52
5.2.1 直方图均衡化	52
5.2.2 直方图匹配	53
5.3 空域滤波增强	55
5.3.1 空域平滑滤波	55
5.3.2 空域锐化滤波	60
思考题 5	63

第 6 章 频域图像增强	64
6.1 低通滤波器	65
6.2 高通滤波器	67
思考题 6	70
第 7 章 彩色图像处理	71
7.1 真彩色图像处理	72
7.1.1 彩色图像格式	72
7.1.2 彩色图像之间的转化	73
7.1.3 真彩色图像处理方法	74
7.2 假彩色图像处理	76
7.3 伪彩色图像处理	77
7.3.1 灰度分层法伪彩色处理	77
7.3.2 灰度变换法的伪彩色处理	78
思考题 7	81
第 8 章 图像分割	82
8.1 点、线和边缘检测分割	82
8.1.1 点检测	82
8.1.2 线检测	83
8.1.3 边缘检测	84
8.2 基于阈值的图像分割	89
8.3 基于区域提取的图像分割	93
思考题 8	98

第二部分 数字图像处理基础性实验篇

实验一 数字图像的基本操作	101
实验二 数字图像的基本运算	104
实验三 图像的傅里叶变换	107
实验四 空域图像增强方法	111

实验五 频域图像增强方法.....	116
实验六 彩色图像处理.....	122
实验七 图像分割方法.....	126

第三部分 数字图像处理工程实例综合设计性实验篇

实验八 某 CCD 器件采集的噪声图像的增强处理	131
实验九 某医用人体骨架扫描图像的增强处理.....	133
实验十 某工业检测光学透镜图像的增强处理.....	135
实验十一 某电视接收图像的增强处理.....	137
实验十二 某飞行器定位技术中的图像分割处理.....	139
实验十三 某指纹图像识别(选做).....	141
实验十四 某图书索书号的图像识别(选做).....	144
参考文献.....	148
 实验报告一 数字图像的基本操作.....	149
实验报告二 数字图像的基本运算.....	152
实验报告三 图像的傅里叶变换.....	155
实验报告四 空域图像增强方法.....	158
实验报告五 频域图像增强方法.....	161
实验报告六 彩色图像处理.....	164
实验报告七 图像分割方法.....	167
实验报告八 某 CCD 器件采集的噪声图像的增强处理	170
实验报告九 某医用人体骨架扫描图像的增强处理.....	173
实验报告十 某工业检测光学透镜图像的增强处理.....	176
实验报告十一 某电视接收图像的增强处理.....	179
实验报告十二 某飞行器定位技术中的图像分割处理.....	182
实验报告十三 某指纹图像识别(选做).....	185
实验报告十四 某图书索书号的图像识别(选做).....	188

第一部分

数字图像处理实验技术基础篇

数字图像处理实验技术基础篇的目的是全面介绍基于 MATLAB 语言的数字图像处理基本操作和处理技术基础,为后续的数字图像处理基础性实验和综合设计性实验提供技术基础。

本篇共包括 8 章内容。第 1 章介绍数字图像和数字图像处理的基本概念、数字图像的表示方法及数字图像处理软件和工具箱等;第 2 章介绍数字图像的基本操作及其 MATLAB 编程实现;第 3 章介绍数字图像的基本运算及其 MATLAB 编程实现;第 4 章介绍图像的傅里叶变换及其 MATLAB 编程实现;第 5 章和第 6 章着重介绍数字图像的空域和频域增强技术及其 MATLAB 编程实现;第 7 章介绍彩色图像处理及其 MATLAB 编程实现;第 8 章介绍图像分割方法及其 MATLAB 编程实现。

绪 论

本章学习目标

- (1) 掌握什么是数字图像和数字图像处理。
- (2) 理解数字图像处理系统的软、硬件构成。
- (3) 熟练掌握数字图像的矩阵表示法。
- (4) 熟悉 MATLAB 图像处理工具箱的安装步骤。

本章旨在介绍数字图像和数字图像处理的基本概念和表示方法等基本常识,使读者对数字图像处理有一个全面的概略认识。

1.1 什么是数字图像处理

一幅连续图像可以被定义为一个二维函数 $f(x, y)$, 其中, x, y 是空间(平面)坐标, 而 f 在任意一对空间坐标 (x, y) 处的幅值称为图像在该点的亮度或灰度。当 x, y 分量和幅值 f 都是有限的、离散的数值时, 称该图像为数字图像。数字图像处理就是利用计算机处理数字图像^[1-1]。

要将一幅连续图像转化为数字图像, 就要求数字化坐标和幅值。将坐标值数字化称为采样; 将幅值数字化称为量化。采样和量化的过程如图 1.1 所示^[2-3]。图 1.1 中数字图像被大小完全相等的网格分割成大小相同的小方格, 每一个小方格称为组成数字图像的基本元素。数字图像就是由有限数量的元素组成的, 而每个元素都有一个特殊的空间坐标位置和幅值, 这些元素称为像素^[3]。像素是广泛用于定义数字图像元素的术语。

视觉是人类感觉中最高级的, 因此, 图像在人类感知中起着最重要的作用并不令人奇怪。然而, 人类的视觉被限制在电磁波谱的可视波段, 而成像机器几乎覆盖了全部电磁波谱, 其范围从伽马射线到无线电波。它们还可以在人类不常涉及的图像源所产生的图像上进行处理, 包括超声波、电子显微镜和计算机产生的图像。这样, 数字图像处理就包含

了很宽的应用领域。数字图像处理已成功应用于许多领域,给人们带来了巨大的社会价值和经济效益^[2]。

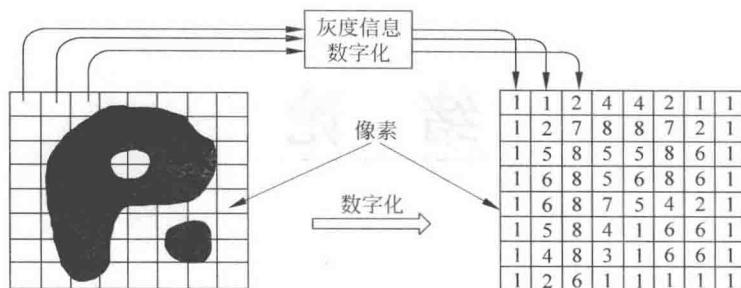


图 1.1 图像的采样和量化

图像处理所涉及的领域到底有多广并无统一的见解。有时,人们将图像处理定义为其输入和输出均是图像的一个学科,但这存在局限性,并有点人为界定的意思。例如,在这种定义之下,计算图像的平均亮度这种简单任务将不被认为是图像处理操作。另外,存在像计算机视觉这样的领域,其最终目的是用计算机来模仿人类视觉,包括学习和推理,并根据视觉输入采取相应的行动。该领域本身是人工智能的一个分支,其目的是模仿人类智能。人工智能的研究领域从发展的意义上讲还处于初始阶段,其进展要比预期的慢得多。图像分析领域(也称为图像理解)介于图像处理和计算机视觉之间。

图像处理和计算机视觉之间并没有明显的界限,但可通过考虑三种类型的计算机化处理来加以划分:低级、中级和高级处理。低级处理包括原始操作,如降低噪声的图像预处理、对比度增强和图像锐化。低级处理的特点是其输入与输出均为图像。中级处理涉及分割这类任务,即把图像分为区域或对象,然后对对象进行描述,以便把它们简化为适合计算机处理的形式,并对单个对象进行分类(识别)。中级处理的特点是,其输入通常是图像,但输出则是从这些图像中提取的属性(如边缘、轮廓以及单个对象的特性)。高级处理通过执行通常与人类视觉相关的感知函数,来对识别的对象进行总体确认。图像处理和图像分析之间的重叠之处是图像中单个区域或对象的识别。为说明这些概念,现在考虑文本的自动分析这一领域。该领域的图像获取过程,包括获取文本、预处理图像、提取(分割)个别字符以适合计算机处理的形式描述字符以及识别这些个别字符,就在本书中所谓的数字图像处理范围之内^[2-3]。特别指出,本书中所谓的数字图像处理就包含了其输入和输出都是图像的过程;本书只是介绍具有广泛适用性和普遍性的图像处理基本知识和方法,内容只涉及数字图像的低级计算机化处理。至于从图像中提取特性的过程,以及对单个对象进行识别的过程,即图像处理的中级和高级阶段——图像描述和图像识别,参见冈萨雷斯的《数字图像处理》^[2-3]的图像描述和图像识别相关章节。

数字图像处理主要依靠计算机对代表图像的整数矩阵进行处理,针对现有的实际应

用,数字图像处理具有如下特点^[3,10-11]:

(1) 处理精度高,处理内容丰富,灵活性和再现性好,适用面广。利用计算机进行图像处理,其实质是对矩阵进行各种运算。现在的计算机计算精度都很高,目前已有 32 位和 64 位的 DSP,对于一般的图像处理来说,其处理精度绰绰有余。另外,通过调用或编写不同的软件程序可以实现对图像的不同处理,如图像增强、图像滤波、图像恢复和图像压缩等,其处理内容十分丰富,因此具有相当的灵活性。此外,对同一图像用相同的方法处理多次,也可得到完全相同的效果,具有良好的再现性。在图像处理程序中,可以任意设定或变动各种参数,从而有效地控制处理过程以达到预期的处理效果,这一特点在改善图像质量的处理中表现更为突出。由于图像处理是通过程序进行的,因此,设计不同的图像处理程序可以实现各种不同的处理目的,其适用性非常广泛。

(2) 图像数据量大,处理量大。图像中含有丰富的信息,通过图像处理用户可获取图像中所包含的有用信息,但数字图像的数据量非常庞大。这是因为一幅数字图像是由图像矩阵中的像素组成的,通常每个像素都用红(R)、绿(G)、蓝(B)3 种颜色表示,每种颜色用 8 位表示灰度级。例如,一幅不经压缩的 1024×1024 像素的真彩色图像,数据量将达到 3MB。如此庞大的数据量自然给存储、传输和处理工作都带来了巨大的困难。如果精度及分辨率再提高,所需的处理时间将大大增加。因此对于一些具有实时要求的图像处理系统必须采取相应的图像处理措施,否则会影响其实时性。

(3) 知识和技术综合性强。数字图像处理技术中涉及的基础知识和专业技术相当广泛,如计算机技术、通信技术、微电子技术、电视技术以及更多的数学、物理学等方面的基础知识。例如,图像编码的理论基础是信息论和抽象数学的结合,而图像识别则需要掌握随机过程和信号处理方面的知识。此外,数字图像处理的具体应用有时还会涉及更加专业的知识,如小波变换、神经网络、分形理论等。

1.2 数字图像处理系统

1.2.1 数字图像处理系统的硬件结构

数字图像处理系统有各种各样的结构,若按用途分类,数字图像处理系统可分为专用和通用两大类。图 1.2 是通用数字图像处理系统的基本组成结构^[1-3]。

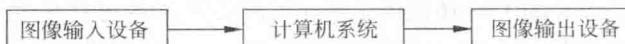


图 1.2 数字图像处理系统的三大组成部分

1. 图像输入设备

图像输入设备在输入信息的速度、空间分辨率等方面各有特点,可以根据需要选用。一般常用的图像输入设备有 CCD 摄像机、磁带录像机、扫描仪等。输入设备一般只起光电转换的作用,即将图像的光强信息转换为模拟电信号,然后再送到数字化设备进行模数转换。

2. 计算机系统

图像信息的处理由计算机担任。由于数字图像信息量十分巨大,要求计算机系统运算速度快、存储容量大,且有较强的软件功能。根据图像处理系统不同的用途,可以采用不同的计算机系统,可以是一台微机,一台大型计算机,也可以用阵列机、多处理机或计算机网络。

3. 图像输出设备

处理后的图像可以在图像显示器上显示,如计算机的显示器、电视机等,同时也可以通过打印机、绘图仪、图像拷贝机等图像记录设备得到图像的硬拷贝。

1.2.2 图像处理的软件开发工具

图像处理系统除了硬件外,还需要有一个软件运行环境。Windows 操作系统提供了一个软件运行环境。Windows 操作系统不仅直观、高效地面向对象的图形用户界面,而且用户界面统一、友好,Windows 下应用程序的所有输出都是图形,它是由图形设备接口(GDI)来完成的。GDI 是系统原始的图形输出库,它用于在屏幕上输出像素、在打印机上输出硬拷贝以及绘制 Windows 用户界面。

有了 Windows 运行环境,还需要有用于图像处理的各种通用或专用软件开发工具,才能在 Windows 环境下进行各种图像处理编程。现在比较通用的开发工具有 Visual C++、Delphi 和 MATLAB 等。

1. Visual C++

Visual C++是一个面向对象、可视化开发工具,提供了面向对象的应用程序框架 MFC(Microsoft Foundation Class,微软基础类库),大大简化了程序员的编程工作,提高了模块的可重用性。Visual C++还提供了基于 CASE 技术的可视化软件自动生成和维护工具 AppWizard、ClassWizard、Visual Studio、WizardBar 等,帮助用户直观地、可视地设计程序的用户界面,可以方便地编写和管理各种类,维护程序源代码,从而提高了开发效率。用户可以比较容易地使用 C/C++ 编程。

MFC 未提供现成的 DIB(与设备无关的位图,一般是以 *.BMP 文件格式保存的)类,因此用户在编写图像处理软件时,要自己设计 Windows API 的图像输入输出模块,这给 MFC 用户带来很多不便。

2. Delphi

Delphi 有一个面向对象的、可视化的集成开发环境(IDE),它提供了大量组件(Component),能够方便、高效地建立起所需要的 Windows 界面设计。利用 Delphi 带有的面向对象的程序设计语言 Object Pascal,编写出响应某个事件发生时的事件处理程序。Delphi 还提供了大量的过程与函数,极大地方便了程序设计。

Delphi 有一个图像对象 Image 组件,支持多种常用的图像文件格式,这为编写图像处理程序带来了极大的方便。

3. MATLAB

MATLAB 对于技术计算来说是一种高性能的语言。它以易于应用的环境集成了计算、可视化和编程,在该环境下,问题及其解以人们熟悉的数学表示法来表示。MATLAB 是一种交互式系统,其基本数据元素是并不要求确定维数的一个数组,这就允许人们用公式化方法求解许多技术计算问题,特别是涉及矩阵表示的问题。有时,MATLAB 可调用使用 C 或 FORTRAN 这类非交互式语言所编写的程序。

MATLAB 是 matrix laboratory 的缩写。MATLAB 由 LINPACK (Linear System Package) 和 EISPACK (Eigen system Package) 项目开发,最初用于矩阵处理。今天, MATLAB 已集成了 LAPACK 和 RLAS 库,并成为了矩阵计算的首选软件。与 C 语言等高级语言相比,MATLAB 是一种基于矩阵/数组的高级语言,也是语法规则最简单的语言,它用贴近人的思维方式进行编程,使得用 MATLAB 编写程序就像在便笺上列公式和求解一样方便。现在 MATLAB 已成为世界上应用最广泛的工程计算开发软件。

在高等院校中,对于数学、工程和科学理论中的入门课程和高级课程,MATLAB 都是标准的计算工具。在工业领域,MATLAB 对于研究、开发和分析也是首选的计算工具。MATLAB 中补充了许多针对于特定应用的工具箱。图像处理工具箱是一个 MATLAB 函数(称为 M 函数或 M 文件)集。它扩展了 MATLAB 解决图像处理问题的能力。图像处理工具箱是由一系列支持图像处理操作的函数组成的。所支持的图像处理操作有图像的几何操作、邻域和区域操作、图像变换、图像恢复与增强、线性滤波和滤波器设计、变换(DCT 变换等)、图像分析和统计、二值图像操作等。MATLAB 在图像处理中各方面的应用包括^[1-2,4-9,12]:

(1) 图像文件格式的读、写和显示。MATLAB 提供了图像文件读入函数 imread(),用来读取如 BMP、GIF、HDF、JPEG、TIFF 等不同格式的图像文件;图像写出函数

imwrite(),还有图像显示函数 image()、imshow()等。

(2) 图像处理的基本运算。MATLAB 提供了图像的和、差等线性运算,以及卷积、相关、滤波等非线性算。例如,conv2(I,J)实现了 I 和 J 两幅图像的卷积。

(3) 图像变换。MATLAB 提供了一维和二维离散傅里叶变换(DFT)、快速傅里叶变换(FFT)、离散余弦变换(DCT)及其反变换函数,以及连续小波变换(CWT)、离散小波变换(DWT)及其反变换。

(4) 图像的分析和增强。针对图像的统计计算,MATLAB 提供了校正、直方图均衡、中值滤波、对比度调整、自适应滤波等对图像进行的处理。

(5) 图像的数学形态学处理。针对二值图像,MATLAB 提供了数学形态学运算函数;腐蚀(Erode)、膨胀(Dilate)算子,以及在此基础上的开(Open)算子、闭(Close)算子、厚化(Thicken)算子、薄化(Thin)算子等丰富的数学形态学运算。

针对 MATLAB 的以上特点,本书将使用 MATLAB 开发工具来实现数字图像实验编程。

1.3 数字图像的表示

1.3.1 数字图像的坐标约定

如图 1.1 所示,图像采样和量化的结果是一个实数矩阵。在本书中,假设对一幅图像 $f(x,y)$ 采样后,得到一幅有着 M 行和 N 列的图像,称这幅图像的大小为 $M \times N$,坐标 (x,y) 的值是离散量。为使符号表示清晰和方便,这些离散坐标使用整数值。在很多图像处理书籍中,图像原点定义在 $(x,y)=(0,0)$ 处,沿图像第一行的下一坐标值为 $(x,y)=(0,1)$ 。注意,符号 $(0,1)$ 用来表示沿第一行的第二个取样,而不表示图像在取样时的实际物理坐标值。图 1.3 显示了这种坐标约定。注意, x 的范围是从 0 到 $M-1$ 的整数, y 的范围是从 0 到 $N-1$ 的整数。

1.3.2 数字图像的矩阵表示

由图 1.3 所示的坐标系统和前述讨论,可以得到如下数字化图像函数的表示:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$