

高等学校经济、管理与理工科
非数学专业必修数学基础课程

习题集

第一分册

微积分习题集

单立波 张广梵 主编

南开大学出版社

高等学校经济、管理与理工科
非数学专业必修数学基础课程

习题集 第一分册

微积分习题集

单立波 张广梵 主编



南开大学出版社

天津

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题集. 第1分册 / 单立波, 张广梵主编.
天津: 南开大学出版社, 2004. 3
(高等学校经济、管理与理工科非数学专业必修数学
基础课程习题集)
ISBN 7-310-02043-X

I. 微... II. ①单... ②张... III. 微积分—高等学
校—习题 IV. 0172-44.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 120237 号

出版发行 南开大学出版社

地址: 天津市南开区卫津路 94 号 邮编: 300071

营销部电话: (022)23508339 23500755

营销部传真: (022)23508542

邮购部电话: (022)23502200

出版人 肖占鹏

承印 南开大学印刷厂印刷

经销 全国各地新华书店

版次 2004 年 3 月第 1 版

印次 2004 年 3 月第 1 次印刷

开本 880mm×1230mm 1/32

印张 18.5

字数 585 千字

印数 1—4000

定价 28.00 元

前 言

根据国家经济发展的需要,全国各高等院校几乎都设置了经济及管理专业,在该专业中,微积分学是一门必修课,也是经济工作者和技术工作者必备的专业知识,为了帮助本科生及报考硕士研究生的考生学习、掌握好教育部规定的内容,我们编写了这本与教材配套的习题集。

本书是笔者依据多年的教学经验与长期积累的资料编写的,在编写过程中,还参阅了许多高等院校中造诣高深、学识广博的专家、学者、教授们的有关著作及历年全国硕士研究生入学考试的试题,并精选了一部分有代表性的例题、试题作为本书的练习题。

本书所包括的内容全面,在选材上既照顾本科生学习的要求,也兼顾报考经济类硕士研究生所需要的内容。习题集是按章节内容的顺序编写的,每章都包括内容提要、练习、参考答案与提示三个部分,每章最后都有杂题形式的综合练习题,并附有参考答案与提示。所有练习都包含单项选择题、计算题、证明题三种类型,全书共计 3097 道题。学员通过解答问题过程,会提高对数学中的概念、性质、定理的理解和掌握程度,并能增加学员解题的技巧和方法,扩展学员的思维能力及解决实际问题的能力。

本书由于编著者的能力有限,编写时间仓促,难免会出现一些问题及错误,欢迎读者批评指正。

编 者

2003.5

目 录

前 言	(1)
第一章 函数	(1)
§ 1.1 函数的概念	(1)
练习	(4)
参考答案与提示	(7)
§ 1.2 函数的几种简单性质	(9)
练习	(11)
参考答案与提示	(13)
§ 1.3 反函数 复合函数	(14)
练习	(15)
参考答案与提示	(17)
§ 1.4 初等函数	(20)
练习	(22)
参考答案与提示	(24)
§ 1.5 简单经济函数	(24)
练习	(25)
参考答案与提示	(27)
§ 1.6 杂题	(28)
参考答案与提示	(34)
第二章 极限与连续	(38)
§ 2.1 数列极限	(38)
练习	(40)
参考答案与提示	(44)
§ 2.2 函数极限	(51)
练习	(53)

参考答案与提示	(55)
§ 2.3 无穷小量与无穷大量	(57)
练习	(59)
参考答案与提示	(61)
§ 2.4 极限运算法则 两个重要极限	(61)
练习	(63)
参考答案与提示	(67)
§ 2.5 函数的连续	(73)
练习	(75)
参考答案与提示	(80)
§ 2.6 杂题	(86)
参考答案与提示	(93)
第三章 导数与微分	(102)
§ 3.1 导数的概念	(102)
练习	(104)
参考答案与提示	(108)
§ 3.2 求导法则与导数基本公式	(114)
练习	(116)
参考答案与提示	(123)
§ 3.3 隐函数、参数方法求导法则及高阶导数	(130)
练习	(133)
参考答案与提示	(137)
§ 3.4 微分及运算	(142)
练习	(144)
参考答案与提示	(147)
§ 3.5 杂题	(150)
参考答案与提示	(157)
第四章 中值定理 导数应用	(164)
§ 4.1 微分中值定理	(164)
练习	(167)

参考答案与提示	(172)
§ 4.2 洛必达法则	(181)
练习	(183)
参考答案与提示	(186)
§ 4.3 导数在研究函数上的应用	(188)
练习	(192)
参考答案与提示	(198)
§ 4.4 导数在经济学中的简单应用	(206)
练习	(209)
参考答案与提示	(213)
§ 4.5 杂题	(215)
参考答案与提示	(224)
第五章 不定积分	(238)
§ 5.1 原函数与不定积分概念、性质、基本积分表	(238)
练习	(240)
参考答案与提示	(243)
§ 5.2 不定积分的基本算法	(245)
练习	(247)
参考答案与提示	(255)
§ 5.3 有理函数 三角函数 无理函数的积分	(266)
练习	(270)
参考答案与提示	(275)
§ 5.4 杂题	(282)
参考答案与提示	(286)
第六章 定积分	(290)
§ 6.1 定积分的概念与性质	(290)
练习	(292)
参考答案与提示	(295)
§ 6.2 定积分的计算	(297)
练习	(299)

参考答案与提示	(311)
§ 6.3 反常积分、 Γ 函数、 B 函数	(318)
练习	(323)
参考答案与提示	(329)
§ 6.4 定积分应用	(335)
练习	(337)
参考答案与提示	(347)
§ 6.5 杂题	(357)
参考答案与提示	(356)
第七章 多元函数微积分学	(359)
§ 7.1 预备知识	(359)
练习	(363)
参考答案与提示	(364)
§ 7.2 多元函数的概念	(365)
练习	(366)
参考答案与提示	(370)
§ 7.3 二元函数的极限与连续	(371)
练习	(372)
参考答案与提示	(375)
§ 7.4 偏导数、全微分、方向导数、梯度	(377)
练习	(380)
参考答案与提示	(385)
§ 7.5 多元复合函数与隐函数的微分法	(389)
练习	(391)
参考答案与提示	(397)
§ 7.6 高阶偏导数、高阶全微分	(400)
练习	(401)
参考答案与提示	(404)
§ 7.7 多元函数的极值	(406)
练习	(408)

参考答案与提示·····	(411)
§ 7.8 二重积分·····	(412)
练习·····	(416)
参考答案与提示·····	(422)
§ 7.9 杂题·····	(425)
参考答案与提示·····	(426)
第八章 无穷级数 ·····	(427)
§ 8.1 常数项级数的概念和性质·····	(427)
练习·····	(429)
参考答案与提示·····	(433)
§ 8.2 正项级数·····	(437)
练习·····	(442)
参考答案与提示·····	(448)
§ 8.3 任意项级数·····	(454)
练习·····	(455)
参考答案与提示·····	(459)
§ 8.4 幂级数·····	(463)
练习·····	(467)
参考答案与提示·····	(470)
§ 8.5 函数 $f(x)$ 的幂级数展开及简单应用·····	(473)
练习·····	(476)
参考答案与提示·····	(479)
§ 8.6 杂题·····	(482)
参考答案与提示·····	(486)
第九章 微分方程 ·····	(491)
§ 9.1 微分方程的基本概念·····	(491)
练习·····	(492)
参考答案与提示·····	(494)
§ 9.2 一阶微分方程·····	(494)
练习·····	(499)

参考答案与提示·····	(507)
§ 9.3 可降价的高阶微分方程·····	(513)
练习·····	(514)
参考答案与提示·····	(517)
§ 9.4 线性微分方程的基本理论·····	(518)
练习·····	(521)
参考答案与提示·····	(524)
§ 9.5 常系数线性微分方程·····	(525)
练习·····	(528)
参考答案与提示·····	(533)
§ 9.6 杂题·····	(539)
参考答案与提示·····	(541)
第十章 差分方程简介·····	(546)
§ 10.1 差分与差分方程的基本概念·····	(546)
练习·····	(548)
参考答案与提示·····	(550)
§ 10.2 一阶常系数线性差分方程·····	(551)
练习·····	(553)
参考答案与提示·····	(556)
§ 10.3 二阶常系数线性差分方程·····	(558)
练习·····	(559)
参考答案与提示·····	(565)
§ 10.4 n 阶常系数线性差分方程·····	(569)
练习·····	(570)
参考答案与提示·····	(572)
§ 10.5 杂题·····	(574)
参考答案与提示·····	(576)
附录一 关于第一积分中值定理·····	(577)
附录二 关于多元函数的最值·····	(580)
参考文献·····	(581)

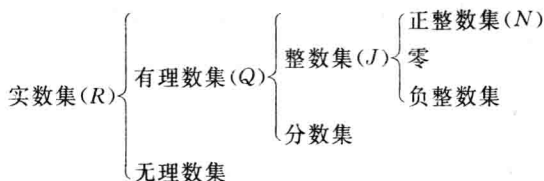
第一章 函数

函数是讨论变量之间对应关系的,是微积分学研究的主要对象,本书中的变量规定在实数集中取值.

§ 1.1 函数的概念

一、实数

(一)实数是一个数的集合,用 R 表示,每个数与数轴上的点是一一对应的.



(二)实数的绝对值及其基本性质

1. 绝对值:设 x 是一个实数,则绝对值

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$|x|$ 表示数轴上的点 x 到原点的距离. 设 x, y 是两个任意实数,则 $|x-y|$ 表示数轴上 x, y 两点间的距离.

2. 性质

$$(1) |x| \geq 0, |-x| = |x|, \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$(2) -|x| \leq x \leq |x|, |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a (a \geq 0).$$

$$(3) |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

$$(4) |x-y| \geq ||x| - |y||.$$

$$(5) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

$$(6) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

(三) 区间

设 $a, b \in R$ 且 $a < b$ 规定

1. $(a, b) = \{x | a < x < b, x \in R\}$.
2. $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in R\}$.
3. $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in R\}$.
4. $(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in R\}$.
5. $(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b, x \in R\}$.
6. $(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b, x \in R\}$.
7. $(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty, x \in R\}$.
8. $[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty, x \in R\}$.
9. $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty, x \in R\}$.

其中 1, 2, 3, 4 为有限区间, 5, 6, 7, 8, 9 为无限区间.

称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 为以点 x_0 为中心、半径为 δ 的邻域; 称 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 为以 x_0 为中心、半径为 δ 的空心邻域; $(x_0 - \delta, x_0)$ 为点 x_0 的左邻域; $(x_0, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的右邻域.

二、函数的概念

(一) 常量与变量

在某一过程中始终取同一数值的量称为常量, 可以取不同数值的量为变量.

(二) 函数的定义

定义 1.1 设 D 是一个非空的实数集合, 若存在一个对应法则“ f ”, 使对任意一个 $x \in D$ 都有惟一确定的实数 y 与之对应, 则称对应法则“ f ”为定义在 D 上的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in D$, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域.

设点 $x_0 \in D$, 则 $y_0 = f(x_0)$ 称为当 $x = x_0$ 时的函数值, 也可记为 $y|_{x=x_0}$, 全体函数值的集合称为函数“ f ”的值域记作 $Z(f)$, 即 $Z(f) = \{y | y = f(x), x \in D\}$.

注意: (1) 由函数定义知 $D \neq \emptyset$, 且对任意 $x \in D, y = f(x)$ 仅有惟一确定值, 如 $y = \sqrt{\cos x - 2}$, 其 $D = \emptyset$ 所以它不是我们所说的函数, 同样 $y = \pm \sqrt{x}$ 也不是我们所说的函数, 而是多值函数, 我们所说的函数是单值函数.

(2) 决定函数关系有两个要素: 定义域 D 及对应法则“ f ”. 若两个要素相同, 则两个函数是相同的, 而与变量使用的字母无关.

如函数 $y=1+x$, $D_1=(-\infty, +\infty)$ 与函数 $y=\frac{x(1+x)}{x}$, $D_2=(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的定义域 $D_1 \neq D_2$, 所以它们是不同的函数. 又如 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}=|x|$, 虽定义域相同但对应法则不同, 因而也是不同的函数, 而 $y=1+x^2$ 与 $Z=1+t^2$ 是同一函数, 因为它们的定义域及对应法则都相同.

(三) 函数的表示法

1. 表格法.
2. 图像法.
3. 解析法(公式法).

用解析法表示的函数中, 有一种特别情形, 函数在定义域的各不相交子集上分别用不同的表达式表示, 该类函数称为分段函数. 如:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \geq 0, \\ 1-x, & x < 0, \end{cases}$$

即当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 $f(x)=1-x$, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时 $f(x)=1+x$, 它是一个函数, 其定义域是各子集的并 $D=(-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = (-\infty, +\infty)$.

(四) 函数符号“ f ”的使用方法

函数 $y=f(x)$ 中的“ f ”是变量之间的对应规则, 对于任一个 $x \in D$, 按规则“ f ”确定一个单值与之对应, “ f ”是对括号内的 x 施用的, 若把括号内的 x 换成 D 内的一个具体函数值或一个代数式, 则规则“ f ”施用于那个具体数或代数式

如 $y=f(x)=\frac{1}{1+x}$, $D=(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 则

$$f(2) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3},$$

$$f[f(x)] = \frac{1}{1+f(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{x+1}{x+2}, x \neq -1 \text{ 且 } x \neq -2.$$

(五) 函数定义域的求法

根据函数构成的两个要素, 我们知道给定一个函数. 这句话意味着“给定了函数的定义域, 函数与其定义域两者是不能分开的, 没有定义域或定义域不明确的函数是没有的, 在讨论函数时, 它的定义域是客观存在的, 是明确的, 但往往不是在给定函数的同时就明确写出它的定义域, 这时我们自然认为定义域就是自变量允许取值范围的全体. 若函数的表示形式是解析式子给出的, 此时我们根据解析式子的结构及问题的实际意义确定出它的定义域. 确定函数定义域有如下几个原则:

1. 分式函数(分母中含有自变量)的自变量的取值范围不能使其分母的值为零.

2. 偶次根式的函数自变量的取值范围应使根号下的式子的值是非负的.

3. 对数函数自变量的取值范围应使真数部分的真数值大于零.

4. 三角函数中的 $\tan x, x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$; $\cot x, x \neq k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

5. 反三角函数中的 $\arcsin x$ 及 $\arccos x$ 中的 x 要满足 $|x| \leq 1$.

6. 有限个函数经过四则运算得到新函数, 它的定义域是这有限个函数定义域的交集.

7. 具有实际意义的函数要由问题的实际意义确定, 它的定义域应是解析式子表达的该函数定义域的子集.

练 习

一、选择题

1.1.1 下列函数对中, 相同函数的是().

(A) $\sqrt{\ln^2 x}$ 与 $\ln|x|$ (B) $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}$

(C) $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 与 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (D) $\frac{1}{x+1}$ 与 $\frac{x-1}{x^2-1}$

1.1.2 函数 $f(x) = \frac{1}{|x| - x}$ 的定义域是().

(A) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0)$
(C) $(0, +\infty)$ (D) $(-\infty, +\infty)$

1.1.3 函数 $f(x) = \frac{2}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$ 的定义域是().

(A) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (B) $(-\infty, +\infty)$
(C) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

1.1.4 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = ()$.

(A) $x, x \in R$

(B) $0, x \in R$

(C) $1, x \in R$

(D) 无意义

1.1.5 设 $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 则 $\varphi(x) = f(2x) + f(x-3)$ 在 ().

(A) $[0, 1]$ 上有意义

(B) 在 $[3, 5]$ 上有意义

(C) $[1, 3]$ 上有意义

(D) 无意义

1.1.6 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[3, 8]$, 则 $f(x^2 - 1)$ 的定义域是 ().

(A) $[-3, -2] \cup [2, 3]$

(B) $[3, 8]$

(C) $[-3, 3]$

(D) $[-2, 2]$

1.1.7 已知 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0)$, 则 $f(\ln x) - f(x-1)$ 的定义域是 ().

(A) $(0, 1)$

(B) $(-\infty, 1)$

(C) $(-\infty, 0)$

(D) $(-\infty, +\infty)$

1.1.8 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 则 $f(x+1) = ()$.

(A) $x^2 - 2x + 1$

(B) x^2

(C) $x^2 + 4x$

(D) $x^2 - 4x + 2$

1.1.9 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$, $g(x) = 1-x$, 则 $f[g(x)] = ()$.

(A) $\frac{x}{2-x}$

(B) $\frac{2x}{1+x}$

(C) x

(D) $\frac{1}{2+x}$

1.1.10 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 1+x, & 0 < x \leq 1, \\ x^2, & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $f(-1) = ()$.

(A) $\frac{1}{e}$

(B) 0

(C) 1

(D) e

1.1.11 已知 $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x} + x + 2$, 则 $f(x) = ()$.

(A) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

(B) $\frac{1}{x} + x + 2$

(C) x^2

(D) $\frac{1}{x^2}$

1.1.12 已知 $f(x)=e^{2x}$, $f[\varphi(x)]=x+1$, 则 $\varphi(x)=(\quad)$.

(A) $e^{2(x+1)}$

(B) $e^{2x}+1$

(C) $\ln(x+1)$

(D) $\frac{1}{2}\ln(x+1)$

二、计算题

1.1.13 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$;

(2) $f(x)=\frac{1}{\ln|x-4|}$;

(3) $f(x)=\ln\frac{x}{x-3}+\arcsin\frac{2x-1}{5}$;

(4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x|\leq 1, \\ x^2-1, & 1<|x|\leq 2. \end{cases}$

1.1.14 已知 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0, \\ 1, & x\geq 0, \end{cases}$ 求 $f(x-2)$ 与 $f(-x)$ 及其定义域.

1.1.15 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$, 求 $f(x)$.

1.1.16 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases} x^2, & 0\leq x\leq 1, \\ 2x, & 1< x\leq 2, \end{cases}$ 求 $\varphi(x)$.

1.1.17 将函数 $f(x)=4-|2x-1|$ 化为分段函数.

1.1.18 设 $f(x)=\frac{x+|x|}{2}$, 描绘函数 $y=f(1-x)\cdot f(1+x)$ 的图形.

1.1.19 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ ($x\neq 0$), 求 $f(x)$.

1.1.20 设 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$ 求 $g[g(x)]$,

$f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

三、证明题

1.1.21 若对任意 $x, y\in R$, 都有 $2f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+$

$f(x-y)$ 且 $f(x) \neq 0$, 则 $f^2(x) = \frac{f(2x)+1}{2}$.

1.1.22 若对任意 $x, y \in R$, 都有 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ 且 $f(0) = 0$, 则 (1) $f(x) \cdot f(y) = xy$, (2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

参考答案与提示

【选择题】

- 1.1.1 (B). 1.1.2 (B). 1.1.3 (C). 1.1.4 (C).
 1.1.5 (D). 1.1.6 (A). 1.1.7 (A). 1.1.8 (B).
 1.1.9 (A). 1.1.10 (A). 1.1.11 (A). 1.1.12 (D).

【计算题】

- 1.1.13 (1) $D = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$;
 (2) $D = (-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$;
 (3) $D = [-2, 0) \cup [2, 3]$;
 (4) $D = [-2, 2]$.

- 1.1.14 $f(x-2) = \begin{cases} x-1, & x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases} D = (-\infty, +\infty).$
 $f(-x) = \begin{cases} 1-x, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases} D = (-\infty, +\infty).$

- 1.1.15 $f(x) = x^2 - x + 1$.

- 1.1.16 $\varphi(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2(x-1), & 2 < x \leq 3. \end{cases}$

提示: 设 $u = x+1, x = u-1$, 则

$$\varphi(u) = \begin{cases} (u-1)^2, & 0 \leq u-1 \leq 1, \\ 2(u-1), & 1 < u-1 \leq 2, \end{cases} = \begin{cases} (u-1)^2, & 1 \leq u \leq 2, \\ 2(u-1), & 2 < u \leq 3. \end{cases}$$

$$\text{故 } \varphi(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2(x-1), & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

- 1.1.17 $f(x) = \begin{cases} 3+2x, & x < \frac{1}{2}, \\ 5-2x, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$

- 1.1.18 $f(1-x) \cdot f(1+x) = \begin{cases} 1-x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$