高等学校经济、管理与理工科
非数学专业必修数学基础课程

习题集 第一分册

微积分习题集

单立波 张广梵 主编

南开大学出版社

高等学校经济、管理与理工科
非数学专业必修数学基础课程

习题集第一分册

微积分习题集

单立波　张广梵　主编

南开大学出版社
天津

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题集．第1分册／单立波，张广梵主编．天津：南开大学出版社，2004.3
(高等学校经济、管理与理工科非数学专业必修数学基础课程习题集)
ISBN 7-310-02043-X

Ⅰ.微... Ⅱ.①单...②张... Ⅲ.微积分－高等学校－习题 Ⅳ.O172－44.

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第120237号

出版发行 南开大学出版社
地址：天津市南开区卫津路94号 邮编：300071
营销部电话：(022)23508339 23500755
营销部传真：(022)23508542
邮购部电话：(022)23502200

出版人 肖占鹏
承　印 南开大学印刷厂印刷
经　销 全国各地新华书店
版　次 2004年3月第1版
印　次 2004年3月第1次印刷
开　本 880mm×1230mm 1/32
印　张 18.5
字　数 585千字
印　数 1－4000
定　价 28.00元

前　　言

根据国家经济发展的需要，全国各高等院校几乎都设置了经济及管理专业，在该专业中，微积分学是一门必修课，也是经济工作者和技术工作者必备的专业知识，为了帮助本科生及报考硕士研究生的考生学习、掌握好教育部规定的内容，我们编写了这本与教材配套的习题集。

本书是笔者依据多年的教学经验与长期积累的资料编写的，在编写过程中，还参阅了许多高等院校中造诣高深、学识广博的专家、学者、教授们的有关著作及历年全国硕士研究生入学考试的试题，并精选了一部分有代表性的例题、试题作为本书的练习题。

本书所包括的内容全面，在选材上既照顾本科生学习的要求，也兼顾报考经济类硕士研究生所需要的内容。习题集是按章节内容的顺序编写的，每章都包括内容提要、练习、参考答案与提示三个部分，每章最后都有杂题形式的综合练习题，并附有参考答案与提示。所有练习都包含单项选择题、计算题、证明题三种类型，全书共计 3097 道题。学员通过解答问题过程，会提高对数学中的概念、性质、定理的理解和掌握程度，并能增加学员解题的技巧和方法，扩展学员的思维能力及解决实际问题的能力。

本书由于编著者的能力有限，编写时间仓促，难免会出现一些问题及错误，欢迎读者批评指正。

编　者

2003.5

目　　录

第一章　函数

函数是讨论变量之间对应关系的，是微积分学研究的主要对象，本书中的变量规定在实数集中取值．

§1.1　函数的概念

一、实数

(一)实数是一个数的集合，用 R 表示，每个数与数轴上的点是一一对应的．

$$
\text{实数集}(R)\begin{cases}\text{有理数集}(Q)\begin{cases}\text{整数集}(J)\begin{cases}\text{正整数集}(N)\\ \text{零}\\ \text{负整数集}\end{cases}\\ \text{分数集}\end{cases}\\ \text{无理数集}\end{cases}
$$

(二)实数的绝对值及其基本性质

1. 绝对值：设 x 是一个实数，则绝对值

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x\ , & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$|x|$ 表示数轴上的点 x 到原点的距离．设 x,y 是两个任意实数，则 $|x-y|$ 表示数轴上 x,y 两点间的距离．

2. 性质

(1) $|x|\geqslant 0$，$|-x|=|x|$，$\sqrt{x^2}=|x|$.

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$，$|x|\leqslant a\Longleftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a\,(a\geqslant 0)$.

(3) $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$.

(4) $|x-y|\geqslant \big||x|-|y|\big|$.

(5) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$.

(三)区间

设 $a,b\in R$ 且 $a<b$ 规定

1. $(a,b)=\{x|a<x<b,x\in R\}$.

2. $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in R\}$.

3. $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in R\}$.

4. $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in R\}$.

5. $(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b,x\in R\}$.

6. $(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b,x\in R\}$

7. $(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty,x\in R\}$.

8. $[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty,x\in R\}$.

9. $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty,x\in R\}$.

其中 1,2,3,4 为有限区间,5,6,7,8,9 为无限区间.

称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$为以点 x_0 为中心、半径为 δ 的邻域;称$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$为以 x_0 为中心、半径为 δ 的空心邻域;$(x_0-\delta,x_0)$为点 x_0 的左邻域;$(x_0,x_0+\delta)$为点 x_0 的右邻域.

二、函数的概念

(一)常量与变量

在某一过程中始终取同一数值的量称为常量,可以取不同数值的量为变量.

(二)函数的定义

定义 1.1 设 D 是一个非空的实数集合,若存在一个对应法则"f",使对任意一个 $x\in D$ 都有惟一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则"f"为定义在 D 上的一个函数,记作 $y=f(x),x\in D$,x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域.

设点 $x_0\in D$,则 $y_0=f(x_0)$称为当 $x=x_0$ 时的函数值,也可记为 $y|_{x=x_0}$,全体函数值的集合称为函数"f"的值域记作 $Z(f)$,即 $Z(f)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

注意:(1)由函数定义知 $D\neq\phi$,且对任意 $x\in D$,$y=f(x)$仅有惟一确定值,如 $y=\sqrt{\cos x-2}$,其 $D=\phi$ 所以它不是我们所说的函数,同样$y=\pm\sqrt{x}$ 也不是我们所说的函数,而是多值函数,我们所说的函数是单值函数.

(2)决定函数关系有两个要素:定义域 D 及对应法则"f"。若两个要素相同,则两个函数是相同的,而与变量使用的字母无关.

如函数 $y=1+x, D_1=(-\infty,+\infty)$ 与函数 $y=\frac{x(1+x)}{x}, D_2=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的定义域 $D_1\neq D_2$，所以它们是不同函数．又如 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，虽定义域相同但对应法则不同，因而也是不同函数，而 $y=1+x^2$ 与 $Z=1+t^2$ 是同一函数，因为它们的定义域及对应法则都相同．

（三）函数的表示法

1. 表格法．

2. 图像法．

3. 解析法（公式法）．

用解析法表示的函数中，有一种特别情形，函数在定义域的各不相交子集上分别用不同的表达式表示，该类函数称为分段函数．如：

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0,\\ 1-x, & x<0,\end{cases}$$

即当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f(x)=1-x$，当 $x\in[0,+\infty)$ 时 $f(x)=1+x$，它是一个函数，其定义域是各子集的并 $D=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$．

（四）函数符号"f"的使用方法

函数 $y=f(x)$ 中的"f"是变量之间的对应规则，对于任一个 $x\in D$，按规则"f"确定一个单值与之对应，"f"是对括号内的 x 施用的，若把括号内的 x 换成 D 内的一个具体函数值或一个代数式，则规则"f"施用于那个具体数或代数式

如 $y=f(x)=\frac{1}{1+x}, D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，则

$$f(2)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3},$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2}, x\neq -1 \text{ 且 } x\neq -2.$$

（五）函数定义域的求法

根据函数构成的两个要素，我们知道给定一个函数．这句话意味着"给定了函数的定义域，函数与其定义域两者是不能分开的，没有定义域或定义域不明确的函数是没有的，在讨论函数时，它的定义域是客观存在的，是明确的，但往往不是在给定函数的同时就明确写出它的定义域，这时我们自然认为定义域就是自变量允许取值范围的全体．若函数的表示形式是解析式子给出的，此时我们根据解析式子的结构及问题的实际意义确定出它的定义域．确定函数定义域有如下几个原则：

1. 分式函数(分母中含有自变量)的自变量的取值范围不能使其分母的值为零.

2. 偶次根式的函数自变量的取值范围应使根号下的式子的值是非负的.

3. 对数函数自变量的取值范围应使真数部分的真数值大于零.

4. 三角函数中的 $\tan x$, $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$; $\cot x$, $x \neq k\pi (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

5. 反三角函数中的 $\arcsin x$ 及 $\arccos x$ 中的 x 要满足 $|x| \leqslant 1$.

6. 有限个函数经过四则运算得到新函数,它的定义域是这有限个函数定义域的交集.

7. 具有实际意义的函数要由问题的实际意义确定,它的定义域应是解析式子表达的该函数定义域的子集.

练　　习

一、选择题

1.1.1 下列函数对中,相同函数的是(　　).

(A) $\sqrt{\ln^2 x}$ 与 $\ln|x|$　　(B) $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{x}$

(C) $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 与 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$　　(D) $\frac{1}{x+1}$ 与 $\frac{x-1}{x^2-1}$

1.1.2 函数 $f(x)=\frac{1}{|x|-x}$ 的定义域是(　　).

(A) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　(B) $(-\infty,0)$

(C) $(0,+\infty)$　　(D) $(-\infty,+\infty)$

1.1.3 函数 $f(x)=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域是(　　).

(A) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　(B) $(-\infty,+\infty)$

(C) $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

1.1.4 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$(　　).

(A)$x, x\in R$ (B)$0, x\in R$

(C)$1, x\in R$ (D)无意义

1.1.5 设 $f(x)=\begin{cases}2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$则 $\varphi(x)=f(2x)+f(x-3)$在( ).

(A)$[0,1]$上有意义 (B)在$[3,5]$上有意义

(C)$[1,3]$上有意义 (D)无意义

1.1.6 已知函数 $f(x)$的定义域是$[3,8]$,则 $f(x^2-1)$的定义域是( ).

(A)$[-3,-2]\cup[2,3]$ (B)$[3,8]$

(C)$[-3,3]$ (D)$[-2,2]$

1.1.7 已知 $f(x)$的定义域是$(-\infty,0)$,则$f(\ln x)-f(x-1)$的定义域是( ).

(A)$(0,1)$ (B)$(-\infty,1)$

(C)$(-\infty,0)$ (D)$(-\infty,+\infty)$

1.1.8 已知 $f(x)=x^2-2x+1$,则 $f(x+1)=$( ).

(A)x^2-2x+1 (B)x^2

(C)x^2+4x (D)x^2-4x+2

1.1.9 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq-1)$,$g(x)=1-x$,则$f[g(x)]=$( ).

(A)$\dfrac{x}{2-x}$ (B)$\dfrac{2x}{1+x}$ (C)x (D)$\dfrac{1}{2+x}$

1.1.10 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2, & \text{其他}.\end{cases}$则$f(-1)=$( ).

(A)$\dfrac{1}{e}$ (B)0 (C)1 (D)e

1.1.11 已知 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{x}+x+2$,则 $f(x)=$( ).

(A)$x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ (B)$\dfrac{1}{x}+x+2$ (C)x^2 (D)$\dfrac{1}{x^2}$

1.1.12 已知 $f(x)=e^{2x}$，$f[\varphi(x)]=x+1$，则 $\varphi(x)=($　　$)$.

(A)$e^{2(x+1)}$　　　　(B)$e^{2x}+1$

(C)$\ln(x+1)$　　　　(D)$\frac{1}{2}\ln(x+1)$

二、计算题

1.1.13 求下列函数的定义域.

(1)$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$；

(2)$f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-4|}$；

(3)$f(x)=\ln\dfrac{x}{x-3}+\arcsin\dfrac{2x-1}{5}$；

(4)$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2.\end{cases}$

1.1.14 已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x-2)$ 与 $f(-x)$ 及其定义域.

1.1.15 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$.

1.1.16 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\varphi(x)$.

1.1.17 将函数 $f(x)=4-|2x-1|$ 化为分段函数.

1.1.18 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$，描绘函数 $y=f(1-x)\cdot f(1+x)$ 的图形.

1.1.19 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\,(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

1.1.20 设 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 求 $g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

三、证明题

1.1.21 若对任意 $x,y\in R$，都有 $2f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+$

$f(x-y)$且$f(x)\neq 0$,则$f^2(x)=\dfrac{f(2x)+1}{2}$.

1.1.22 若对任意$x,y\in R$,都有$|f(x)-f(y)|=|x-y|$且$f(0)=0$,则(1)$f(x)\cdot f(y)=xy$,(2)$f(x+y)=f(x)+f(y)$.

参考答案与提示

【选择题】

1.1.1	(B).	**1.1.2**	(B).	**1.1.3**	(C).	**1.1.4**	(C).
1.1.5	(D).	**1.1.6**	(A).	**1.1.7**	(A).	**1.1.8**	(B).
1.1.9	(A).	**1.1.10**	(A).	**1.1.11**	(A).	**1.1.12**	(D).

【计算题】

1.1.13 (1)$D=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$;

(2)$D=(-\infty,3)\cup(3,4)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)$;

(3)$D=[-2,0)\cup[2,3]$;

(4)$D=[-2,2]$.

1.1.14 $f(x-2)=\begin{cases}x-1, & x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ $D=(-\infty,+\infty)$.

$f(-x)=\begin{cases}1-x, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $D=(-\infty,+\infty)$.

1.1.15 $f(x)=x^2-x+1$.

1.1.16 $\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$

提示:设$u=x+1,x=u-1$,则

$$\varphi(u)=\begin{cases}(u-1)^2, & 0\leqslant u-1\leqslant 1,\\ 2(u-1), & 1<u-1\leqslant 2,\end{cases}=\begin{cases}(u-1)^2, & 1\leqslant u\leqslant 2,\\ 2(u-1), & 2<u\leqslant 3.\end{cases}$$

故 $\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$

1.1.17 $f(x)=\begin{cases}3+2x, & x<\dfrac{1}{2},\\ 5-2x, & x\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

1.1.18 $f(1-x)\cdot f(1+x)=\begin{cases}1-x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$