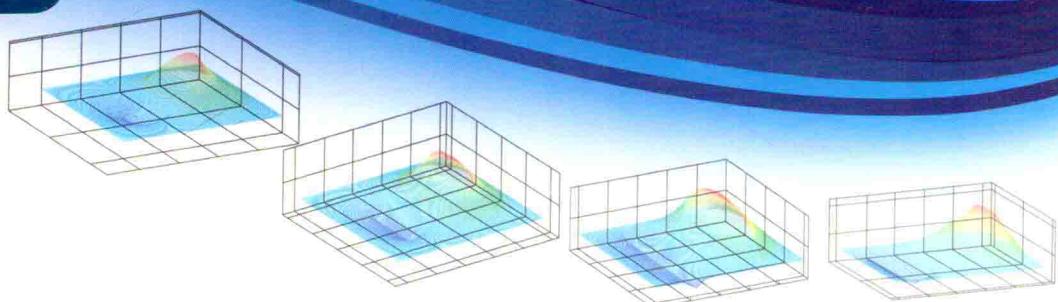


多形组织界面摩擦特性及 润滑数值计算

Tribological Properties and Lubrication Numeric Calculation of
Polytype Texturing Interface

赵运才 韩雷 刘宗阳 高彩云 著



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

江西理工大学优秀学术著作出版基金资助出版

多形织构界面摩擦特性及 润滑数值计算

赵运才 韩雷 刘宗阳 高彩云 著

北京
冶金工业出版社
2014

内 容 提 要

摩擦学涵盖了润滑、摩擦以及磨损三方面知识，主要以两相对运动物体表面为研究对象。节能、节材、提高产品质量、延长机械设备的使用寿命以及增加机械设备的可靠性是摩擦学研究的终极目标。表面织构作为一种改善摩擦学性能的方法受到广泛关注。

本书系统阐述流体润滑状态下表面织构的润滑减摩机理，并依此设计出最优的表面织构模型。本书内容包括绪论、流体力学及 FLUENT 相关理论、织构化表面动压润滑计算模型、计算模型及数值方法的有效性、不同雷诺数下非对称织构承载性能的 CFD 研究、部分表面凹槽织构对摩擦学性能的影响、基于求解 Reynolds 的最优织构设计模型分析、总结与展望。

本书可供从事表面织构界面摩擦特性及表面织构的润滑减摩机理研究工作的人员、大专院校摩擦学及表面工程专业的师生以及有意于机械工程领域发展的企业相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

多形织构界面摩擦特性及润滑数值计算 / 赵运才等著 . —北京：
冶金工业出版社，2014. 12
ISBN 978-7-5024-6821-7

I. ①多… II. ①赵… III. ①机械—摩擦—研究 IV. ①TH117

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 280153 号

出版人 谭学余

地址 北京市东城区嵩祝院北巷 39 号 邮编 100009 电话 (010) 64027926

网址 www.cnmip.com.cn 电子信箱 yjbs@cnmip.com.cn

责任编辑 刘小峰 美术编辑 吕欣童 版式设计 孙跃红

责任校对 郑娟 责任印制 李玉山

ISBN 978-7-5024-6821-7

冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；北京百善印刷厂印刷

2014 年 12 月第 1 版，2014 年 12 月第 1 次印刷

169mm × 239mm；9 印张；175 千字；135 页

45.00 元

冶金工业出版社 投稿电话 (010) 64027932 投稿信箱 tougao@cnmip.com.cn

冶金工业出版社营销中心 电话 (010) 64044283 传真 (010) 64027893

冶金书店 地址 北京市东四西大街 46 号(100010) 电话 (010) 65289081(兼传真)

冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgy.tmall.com

(本书如有印装质量问题，本社营销中心负责退换)

前　　言

摩擦学（Tribology）涵盖了润滑、摩擦以及磨损三方面知识，其主要以两相对运动物体表面为研究对象。节能、节材、提高产品质量、延长机械设备的使用寿命以及增加机械设备的可靠性是摩擦学研究的终极目标。近年来，表面织构作为一种改善摩擦学性能的方法受到广大学者追捧，其定义为在摩擦副表面加工出具有一定规则和排列方案的介、微观结构。

为了进一步深入了解流体润滑状态下表面织构的润滑减摩机理以设计出最优的表面织构模型，本书对织构化表面的摩擦学性能做如下研究：第一，建立了非对称性凹槽织构的计算流体动力学（CFD）模型，利用商业软件 FLUENT 对其进行求解，模拟分析了凹槽织构非对称参数 H 以及雷诺数 Re 对油膜承载的影响。模拟结果表明：当凹槽织构的几何形状呈现非对称性时，油膜承载与凹槽织构的非对称性参数 H 在低雷诺数下表现出很强的依赖关系，随织构非对称性参数 H 的减小而增大，如雷诺数 $Re = 20$ ， H 从 4 减小到 0.2，油膜承载增加了 73.44%。然而此种作用伴随雷诺数的增加逐渐减弱，如雷诺数 $Re = 160$ ， H 从 4 减小到 0.2，油膜承载仅增加了 4.68%。另外，雷诺数对油膜承载有较大影响，随雷诺数 Re 的增大，油膜承载几乎单调递增。第二，针对摩擦副表面，近年来有实验证明在其上加工部分表面织构比充满织构的摩擦副表面能更进一步改善摩擦学性能。因此，利用计算流体动力学（CFD）模型模拟研究了部分表面凹槽织构的动压润滑性能，详细分析了表征部分凹槽织构在摩擦副表面排列布局的位置参数 L 对油膜承载的影响。研究结果表明：低雷诺数下位置参数 L 对油膜承载影响明显，如确定凹槽织构宽度 $D = 0.2$ ，在雷诺数 $Re = 3$ 时， L 从 0.4 减少到 0.05，油膜承载提升了 58.99%，相同条件下，摩擦系数

也得到明显改善，减少了 59.1%。第三，建立了动压润滑下基于 Reynolds 方程的三维表面织构润滑计算模型，利用 Visual Fortran 语言编程对其进行了数值求解，分析了凹槽类及凹坑类织构的动压承载性能，并提出一种全新类型的表面织构——矩形织构。研究发现：不同类型织构间存在一个共同的最优深度范围，其无量纲大小为 0.5~0.7，正方形凹坑织构和圆柱形凹坑织构存在最优的面密度，分别为 0.36 和 0.5024，且正方形凹坑织构比凹槽类织构、圆柱形凹坑织构表现出更好的摩擦学性能。另外，通过与传统类型表面织构对比分析，研究还发现：最优组合参数下的矩形织构比传统类型织构能产生更大的油膜承载，其最优组合参数为 $w=0.6$, $c=0.8$, $h=0.5~0.7$ 。本书最后依据最优组合参数下的矩形织构，提出了一种摩擦副表面理想的矩形织构加工布局方案，此方案对摩擦副表面实际织构处理具有一定的参考价值。

本书可供从事表面织构界面摩擦特性及表面织构的润滑减摩机理研究工作的人员、大专院校摩擦学及表面工程专业的师生以及有意于机械工程领域发展的企业相关人员参考。同时作者要特别感谢国家自然科学基金资助项目（编号：50965008）、江西省教育厅自然科学研究项目（编号：GJJ11555）和作者任职单位江西理工大学优秀学术著作出版基金对本书研究和出版经费的支持。

由于作者水平所限，书中不足之处，敬请读者批评指正，对此作者将不胜感谢。

作 者

2014 年 10 月

目 录

1 绪论	1
1.1 织构化表面研究的背景及意义	1
1.2 织构化表面研究的现状	2
1.2.1 加工技术	2
1.2.2 工程应用	4
1.2.3 润滑计算模型	6
1.2.4 关键研究参数	9
1.2.5 润滑减摩机理	10
1.3 表面织构的润滑减摩机理研究的思考	11
参考文献	12
2 流体力学及 FLUENT 相关理论	17
2.1 引言	17
2.2 流体力学相关概念	17
2.2.1 理想流体和黏性流体	17
2.2.2 牛顿流体与非牛顿流体	18
2.2.3 流体的可压缩及不可压缩	18
2.2.4 定常与非定常流动	19
2.2.5 层流与湍流	19
2.3 流体力学运动方程	20
2.3.1 连续性方程	20
2.3.2 动量方程	22
2.3.3 能量方程	24
2.4 FLUENT 软件介绍	27
2.4.1 FLUENT 软件的基本特点	27
2.4.2 FLUENT 软件的基本构成	28
2.4.3 FLUENT 软件求解领域	28
2.4.4 FLUENT 软件对计算机的要求	29

2.4.5 FLUENT 软件求解问题的主要步骤	30
2.4.6 FLUENT 用户图形界面	31
参考文献	33
3 织构化表面动压润滑计算模型	35
3.1 引言	35
3.2 CFD 简介	35
3.3 CFD 基本理论	36
3.4 CFD 模型及无量纲化处理	37
参考文献	40
4 计算模型及数值方法的有效性	42
4.1 引言	42
4.2 库埃特流动及其解析解	42
4.3 库埃特流动数值解	45
参考文献	49
5 不同雷诺数下非对称织构承载性能的 CFD 研究	51
5.1 引言	51
5.2 非对称凹槽织构物理模型	51
5.3 数值方法及边界条件	53
5.3.1 计算模型及几何参数定义	53
5.3.2 计算域及边界条件	54
5.3.3 计算网格收敛分析	54
5.4 非对称凹槽织构动压润滑性能分析	55
5.4.1 织构上壁面压力分布	55
5.4.2 织构表面油膜动压承载	58
参考文献	60
6 部分表面凹槽织构对摩擦学性能的影响	62
6.1 引言	62
6.2 部分凹槽织构物理模型	63
6.3 数值方法及边界条件	63
6.3.1 基本控制方程	63

6.3.2 计算域及边界条件	64
6.4 部分凹槽织构动压润滑性能分析	65
6.4.1 位置参数对油膜承载的影响	65
6.4.2 雷诺数对油膜承载的影响	68
6.4.3 凹槽宽度对油膜承载的影响	70
6.5 部分凹槽织构摩擦特性分析	72
6.5.1 位置参数与摩擦力的关系	72
6.5.2 位置参数与摩擦系数的关系	73
6.5.3 关键参数下的流线分布	77
6.5.4 部分凹槽织构减摩机理	80
参考文献	84
 7 基于求解 Reynolds 的最优织构设计模型分析	85
7.1 引言	85
7.2 基本理论	85
7.2.1 雷诺方程 (Reynolds)	85
7.2.2 雷诺方程 (Reynolds) 定解条件	87
7.2.3 流体润滑性能计算	88
7.2.4 雷诺方程的数值解法	89
7.3 润滑计算模型建立及有限差分法	89
7.3.1 润滑计算模型	89
7.3.2 有限差分法	91
7.4 织构几何参数表征	93
7.5 基于有限差分法的计算模型求解流程图	95
7.6 Reynolds 方程的有效性	95
7.7 网格收敛性分析	96
7.8 传统表面织构润滑性能分析	98
7.8.1 织构的最优深度	98
7.8.2 织构的最优宽度及面密度	102
7.9 矩形凹坑织构的提出	106
7.9.1 最优宽度确定	107
7.9.2 最优长度确定	108
7.9.3 织构数量的影响	110
参考文献	113

· VII · 目 录 ·

8 总结与展望	115
8.1 研究总结	115
8.2 研究展望	116
附录 A	117
附录 B	120

1 緒論

1.1 組構化表面研究的背景及意義

21世紀将是人类社会和谐发展的世纪，建立和谐社会同样即是建立和谐的人类生态环境。据世界自然基金会（WWF）2010年《地球生命力报告》指出，人类对自然资源的需求已经超越了地球生态承载力的50%。而在我国，自2009年来能源消耗首次超越美国位居世界第一大能源消耗国，能否兑现“节能降耗”的承诺成为我国政府面临的一大重要挑战^[1,2]。图1.1为1990~2009年中国、美国及世界能源消耗对比及近十年我国能源消耗走势。

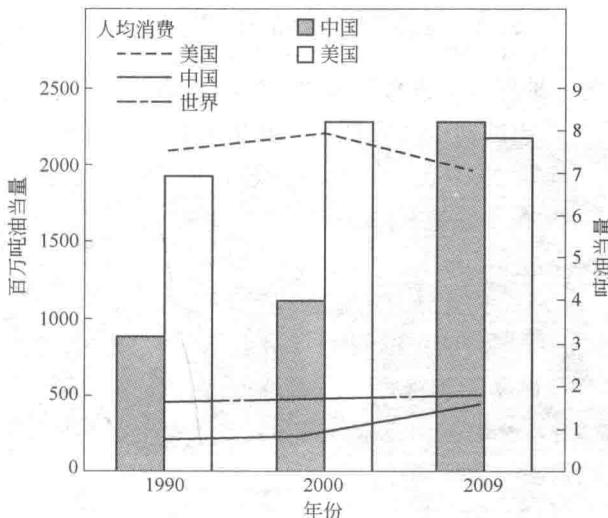


图 1.1 中国、美国及世界能源消耗对比

据统计，全球约有1/2~1/3的能源消耗源自摩擦，而磨损导致的机械部件失效大约占70%以上^[3]。因此，控制摩擦、减少磨损及改善润滑性能以节约能源及提高机械系统的稳定性、可靠性和使用寿命，将成为广大摩擦学者面临的一个具有战略意义的课题。

传统控制摩擦的方法是：润滑油的选择、摩擦副材料的配对以及表面涂层技术的应用^[4~6]。随着对材料表面性能要求日益增加，近些年呈现出了一种新型的有

效控制摩擦方法——表面织构，其定义为在摩擦副表面加工出具有一定规则和排列方案的介、微观结构。已有相关研究表明，通过对摩擦副材料表面进行织构化处理可以明显改善两接触表面的摩擦学性能^[7~15]。随着微机电制造技术的发展，表面织构作为一种改善机械系统摩擦学性能的方法已逐渐成为摩擦学领域的研究热点^[16~23]。

由于表面织构对摩擦学性能的影响受到具体润滑工况的作用，如相同几何参数的表面织构在边界润滑和流体润滑状态下表现出完全不一样的摩擦学特性^[21]，因此对织构化表面进行润滑减摩机理研究时必须针对不同润滑工况逐一施展；同时为使表面织构能在工程应用中得到足够的理论支撑，以及全面系统地研究表面织构的摩擦学性能，必须提出控制摩擦和优化设计方法。本书拟针对流体润滑状态下织构的几何参数、织构的几何形状以及织构在摩擦副表面的排列布局进行深入的研究，以期待在具体工况和润滑条件下得到最优的表面织构模型。这对完善织构摩擦学理论，减少机械系统的磨损消耗以及延长机械零部件的使用寿命具有重要的理论指导和实际意义，同时还可以节约能源，减少浪费，符合当今我国国情，促进我国经济的可持续发展。

1.2 织构化表面研究的现状

表面织构作为一种提升机械系统摩擦学性能的方法，其思想源于 20 世纪 60 年代 Hamilton 等^[12]提出的动压润滑理论，其指出在材料表面人为制造一些可控的无规则微凸体可以产生额外的动压承载。源于此，对织构化表面的摩擦学性能研究日益增多，如 1986 年有学者用类似理念在发动机气缸套表面进行研磨并首次运用于商业领域^[13]。而在其后一年，即 1987 年，Rightmire 等^[14]利用实验验证了对摩擦副表面进行织构化处理能显著提升油膜动压举升力及降低摩擦系数。

由此一种全新的材料表面控摩技术（表面织构）和一个新的摩擦学研究领域（织构摩擦学）开始逐步被业内学者接受。下面将分别从表面织构的加工技术、工程应用、润滑计算模型、关键研究参数以及润滑减摩机理等方面对目前织构摩擦学的研究现状逐一进行阐述。

1.2.1 加工技术

早期表面织构的加工一般采用 Vibrorolling（振动压延）技术^[15]，此技术由俄罗斯彼得斯堡机械工程研究院的 Schneider 教授在 1984 年提出，它主要由坚硬的压头在物体表面滚压使其产生塑性变形而形成较浅的凹槽。此项技术当时在东欧国家得到长足的发展和利用，但在西方世界却并未得到重视，其主要原因是同时期的美国麻省理工学院 Saka 等^[24]提出了另一种表面织构加工技术——Undulatedsurfaces（波形表面），利用刻蚀技术（后来一般使用砂轮机械替代）在材料表面制造一个全波形起伏的凹槽表面。以上两种表面织构的加工方法，其加工精度

很难满足现今人们对表面微观尺寸的苛刻要求。随着微机电系统和计算机技术的发展，不同类型的表面织构加工技术得到了充分的发展和完善，近些年发展起来的表面织构加工技术如下。

(1) 反应离子刻蚀 (RIE)。由日本东北大学 Kato 教授^[17~19]领导的研究团队于 2002 年首次提出，并应用于织构摩擦学领域，此加工技术的优点在于能精确地控制所加工物体表面微凹坑的几何尺寸和分布情况。

(2) LIGA 技术。由美国肯塔基大学微制造实验室的 Ravinder 等^[20]于 2004 年提出，同时他们还提出了另一种织构加工技术 UV，但与前者比较，其制造精度较低，一般仅能达到微米级，而 LIGA 加工精度可达到纳米级，当然 LIGA 制造工艺的费用要比 UV 昂贵得多。

(3) 激光表面织构。20 世纪 90 年代，该技术就已应用于磁存储器（如电脑硬盘等）以防止启动阶段的黏附效应^[21]。之后由以色列 Etsion 等^[7,22,23]把激光表面织构引入摩擦学领域且以实验验证了经激光表面织构处理所得的织构化表面能明显改善其摩擦学性能。

目前业内较为侧重对上述几种表面织构加工技术的应用，其他加工技术包括日本的 Abrasive jet machining 技术^[25]，瑞典 Uppsala 大学 Pettersson 教授^[26]提出的光刻蚀织构技术，巴西圣保罗大学 Bottene 等^[27]提出的研磨织构技术，以及国内杭州电子工业学院张云电教授等^[28]提出的超声加工方法等，图 1.2 所示为几

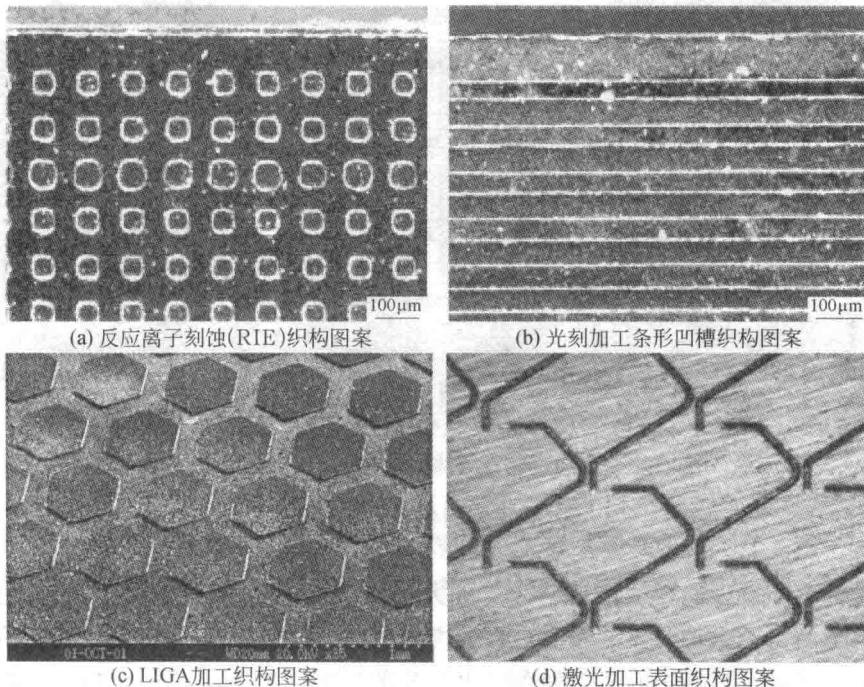


图 1.2 表面织构示意图

种常见的表面织构加工技术加工出的表面织构形貌。

如前所述，微机电系统制造技术（MEMS）的发展，使上述各种表面织构加工技术也得到相应的提升，其加工方法的优劣体现在：介、微观表面织构几何参数精度的控制、加工成本以及是否环境友好型等。对比诸多织构化表面的加工方法，激光表面织构对材料表面进行加工时，其加工过程简单、不需掩膜且耗时短，同时设备成本较低且加工对象范围广，可加工出具有一定精度要求的尺寸和形貌，被认为是到目前为止最为先进的一种表面织构加工方法^[21]。

1.2.2 工程应用

表面织构作为一种改善摩擦学性能的方法，在得到国内外各学者验证的同时也逐渐应用于工业当中^[22]。如图 1.3 所示为表面织构在部分工业领域的应用，下面将分别从磁储存系统、机械密封、发动机及轴承等方面介绍织构化表面在工程领域应用的研究现状。



图 1.3 表面织构在部分行业的应用

磁存储系统方面，国内清华大学陈大融教授等^[29]研究了表面织构对磁盘 - 磁头间隙润滑的影响，研究表明，当织构高度在润滑膜厚的 1% 以上时，表面织构对润滑流场及流场中的压力分布产生明显的影响。Aravind 等^[30]也对织构化磁头 - 磁盘接触表面的摩擦学性能进行了深入的探讨，指出磁头 - 磁盘接触表面进

行织构化处理能明显改善磁头飞行高度、气体强度以及阻尼角度。其他如 Knigge 等^[31]、Khurshudov 等^[32]、Hu 和 Bogy 等^[33]、Zhou 等^[34]、Su 等^[35]、Gui 等^[36]以及 Fu 等^[37]对表面织构在磁存储系统中的应用也做了相应的研究。

机械密封方面，20世纪90年代以色列科学家 Etsion 已对表面织构的密封性能进行了详细的理论研究和实验分析，研究表明织构化表面的机械密封性能可比无织构表面产生更大的动态和静态承载力，且能降低密封端面温升和摩擦力矩^[7,23,38,39]。同时，国内华东理工大学在研究织构化表面密封性能时也得出了类似的结论^[40]。近两年 Hadinata 等^[41]开始对织构化唇密封环表面的摩擦性能进行探索，并指出表面织构不仅能够增加密封环两表面之间的承载能力，而且还能减少摩擦及密封环的泄漏量。

发动机方面，大约有 20% ~ 30% 的摩擦损耗来自于气缸套和活塞环系统^[42,43]。近几年 Etsion 等^[44]把表面织构运用于汽车发动机且实验验证了织构化气缸套表面能够减少 4% 的燃料损耗。国内中国矿业大学朱华教授等^[45,46]也对汽车发动机做了类似的实验研究，结果表明，在汽车发动机气缸套表面加工合适的织构能够减少 30% ~ 49% 的摩擦损耗和气体泄漏量。同时 Pettersson 和 Jacobson^[47]对液压电动机上的活塞表面进行了织构化处理，并利用扫描电子显微镜（SEM）分析了活塞表面磨损形貌，研究表明，织构表面有更好的耐磨性，图 1.4 为扫描电子显微镜下织构表面和无织构表面经磨损实验后的表面形貌。

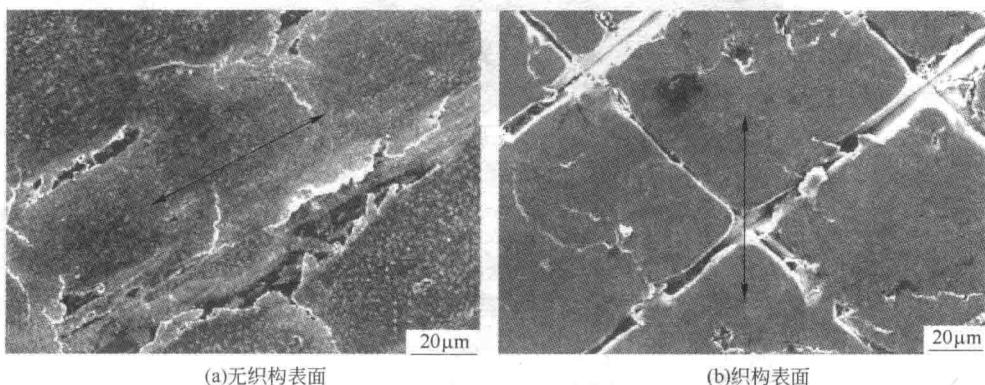


图 1.4 不同表面磨损后的微观形貌

同样，也有相关文献^[9,48~50]报道了表面织构在轴承方面的应用，如 Mitidieri 等^[48]利用了计算流体动力学模型模拟分析了表面织构在瓦片轴承中的作用，结果表明，织构化瓦片轴承表面能产生明显的动压效果。Rahmani 等^[49]则报道了织构化表面在平行推力轴承中的应用且得出了类似的结论，其主要结论指出，表面织构不仅能增加了润滑膜的承载力，而且还能减少两接触表面间的摩擦系数。其

他类似的报道还有 Kango 和 Sharma^[50]对径向轴承表面织构的研究和 Etsion^[9]实验调查织构化推力轴承表面等。

综述以上相关文献足以见得，表面织构作为一种改善摩擦学性能的方法，在摩擦学领域已经取得初步的进展。

1.2.3 润滑计算模型

研究流体润滑计算时，几何模型的建立是进行数值模拟的关键，由于织构图案有圆形、菱形、梯形等（如图 1.2 所示），在此只以传统的凹槽表面织构为例介绍研究表面织构时的关键性参数。如图 1.5（a）所示的凹槽织构表面三维示意图，由于表面织构呈周期性分布，一般取其中单个织构单元进行分析^[51]，如图 1.5（b）所示。对单个织构单元进行分析时，涉及的无量纲参数一般有：织构密度，等于单个织构面积与单个织构单元面积比；面积比率，定义为织构的直径或宽度与深度的比（如图 1.5（b）中面积比率等于 d/w ）；以及织构深度与膜厚比等。从已发表的文献^[52~61]可知，对表面织构进行研究时（不管是流体、边界、混合润滑等），以上无量纲参数作为主要的关键研究参数。

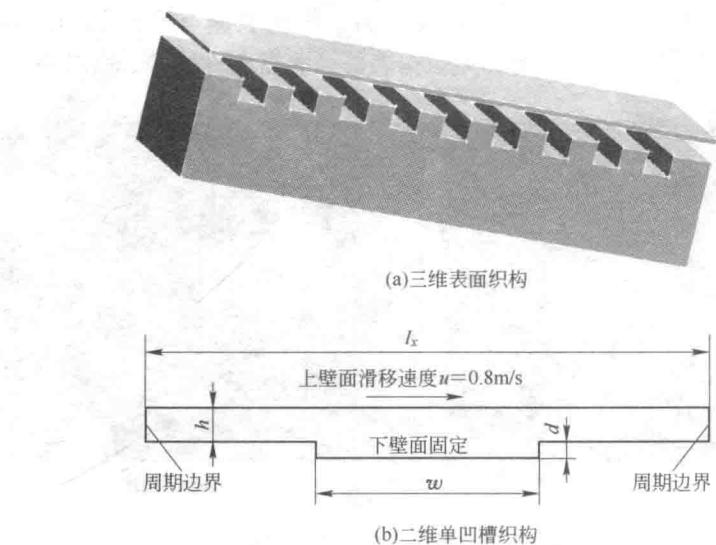


图 1.5 表面凹槽织构几何模型

如果确定了上述所讨论的表面织构几何模型及关键性研究参数，就可依据所建几何模型，忽略一些次要因素，建立所需的织构润滑计算模型，进而分析不同的织构参数下织构化表面的摩擦学表现。目前人们一般采用两种模型模拟分析表面织构的润滑性能。一种是基于 Reynolds 方程利用零平均法预测压力场、速度

场^[11,62~64]，另一种是基于 N-S 方程的计算流体动力学模型^[48,51,65]。Reynolds 方程的一般形式为^[3]：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6 \left[\frac{\partial}{\partial x} (U\rho h) + \frac{\partial}{\partial y} (V\rho h) + 2\rho \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (1.1)$$

式中 ρ ——润滑油密度；

η ——润滑油黏度；

h ——油膜厚度；

p ——油膜压力；

U ——摩擦副相对运动速度；

t ——时间。

方程左端表示润滑膜压力在润滑表面上随坐标 x 、 y 的变化，右端表示产生润滑膜压力的各种效应，其物理意义如下：

(1) $U\rho \frac{\partial h}{\partial x}, V\rho \frac{\partial h}{\partial y}$ ——产生动压效应；

(2) $\rho h \frac{\partial U}{\partial x}, \rho h \frac{\partial V}{\partial y}$ ——产生伸缩效应；

(3) $Uh \frac{\partial \rho}{\partial x}, Vh \frac{\partial \rho}{\partial y}$ ——变密度效应；

(4) $\rho \frac{\partial h}{\partial t}$ ——产生挤压效应。

根据所研究具体情况，Reynolds 方程可进一步进行简化，有些计算模型可以不考虑式 1.1 的挤压效应，又或者当流动假设为不可压流时，可省去变密度效应等，因此 Reynolds 方程的形式应视具体工况选择最合适的简化计算模型。

采用基于 Reynolds 方程的润滑计算模型分析流体润滑问题已有一个多世纪，且在大多数情况下能给出一个精确的解^[51]。但 Elrod^[66]于 1979 年首次提出，并非所有润滑问题都可采用雷诺方程进行求解，雷诺方程只有在表面粗糙度为“雷诺粗糙度”时才可用，即表面粗糙度的高度要比润滑膜厚小一个数量级。之后，部分学者开始对雷诺方程的有效性及适用范围进行了相关报道^[67~69]。如 Arghir 等^[67]提出，当求解表面织构润滑问题时，如果考虑惯性项的影响，就不能再使用雷诺方程。Dobrica 等^[68]指出，当雷诺数 $Re \leq 3$ ，面积比率 $\lambda = 10$ 以及雷诺数 $Re \leq 60$ ，面积比率 $\lambda = 100$ 时才能使用雷诺方程。Li 等^[69]认为，当表面粗糙度高度大于膜厚的 10% 时，雷诺方程不可用。

鉴于雷诺方程的使用范围，近些年国内外学者开始提出了第二种计算模型，基于 N-S 方程的计算流体动力学模型^[51,54,55,65]，同时 Almqvist 等^[70]也对 N-S 方程和雷诺方程做了一个系统的比较研究，指出在大多数情况下，利用 N-S 方程建模求解表面织构润滑问题能得到更加精确的解。N-S 方程的一般形式如下。^[71]

连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1.2)$$

动量方程：

$$x \text{ 方向} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u V) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (1.3)$$

$$y \text{ 方向} \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v V) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (1.4)$$

$$z \text{ 方向} \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w V) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (1.5)$$

式中 ρ ——润滑油密度；

$\nabla \cdot V$ ——单位体积运动着的流体微团体积变化的时间变化率；

u, v, w ——速度的三个分量；

p ——油膜压力；

t ——时间；

τ ——切应力；

f ——单位质量流体微团上的体积力。

润滑计算问题中，一般假设润滑油为牛顿流体，对于牛顿流体^[70]，式 1.3、式 1.4、式 1.5 中的切应力 τ 有如下转换关系：

$$\tau_{xx} = \lambda (\nabla \cdot V) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$\tau_{yy} = \lambda (\nabla \cdot V) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.7)$$

$$\tau_{zz} = \lambda (\nabla \cdot V) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.8)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.9)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.10)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1.11)$$

式中 μ ——分子的黏性系数；

λ ——第二黏性系数，斯托克斯提出假设，认为：

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (1.12)$$

这一关系式已被广泛采用，但至今尚未被严格证明。

虽从某种意义上讲，N-S 方程求解会比雷诺方程要精确，但并不代表 N-S 方