同济数学系列丛书
TONGJISHUXUEXILIECONGSHU

文科微积分

同济大学数学系　兰　辉　刘庆生　主编

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济数学系列丛书

TONGJISHUXUEXILIECONGSHU

文科微积分

同济大学数学系　兰　辉　刘庆生　主编

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是同济大学数学系承担高等数学课程的骨干教师，在借鉴了同济大学相关优秀教材的基础上编写而成的。全书通过探讨数学思想本质的方法阐述数学理论，避免过多的数学公式和繁琐的计算技巧，注重数学理论与实际生活的联系，直观易懂，深入浅出，符合文科学生的学习特点；并通过巧妙地使用数学史、科学家文献中的原始论述、数学理论与实际生活的联系等，使历史背景与理论知识无缝对接，延伸了知识点的内涵。

本书内容包括一元函数微积分理论及应用，可供高等院校文科专业的学生使用，也可供相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

文科微积分 / 兰辉，刘庆生主编. -- 上海：同济大学出版社，2014. 8

ISBN 978-7-5608-5564-6

Ⅰ. ①文… Ⅱ. ①兰… ②刘… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 159156 号

同济数学系列丛书

文科微积分

同济大学数学系 兰 辉 刘庆生 主编

责任编辑 张 莉 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)
经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 同济大学印刷厂
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 13. 75
印　　数 1—3 100
字　　数 275 000
版　　次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5608-5564-6

定　　价 28. 00 元

前言

借助于1995年开始的数学类基础课程建设的契机，同济大学数学系于2011年进行了"'文科高等数学'教学方法的改革与实践"的探索，决定以部分语言类专业学生作为试点班，开展教学内容、教学方法、成绩评定等系列改革，目的是为高校更好地培养文科交叉型人才做有益的探索。在此背景下，同济大学数学系编写了《文科高等数学讲义》，并在试点班使用了三年，本书正是在该讲义的基础上修改定稿的.

对于理工科专业的学生来说，高等数学是思想，也是工具.教师可以在教学中结合数学经典理论与专业应用案例培养学生的创造性思维能力、抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及分析问题和解决问题的能力，使学生进一步体会到大学数学在专业能力拓展中的基础核心价值，从而提升学生的学习积极性，完善教学成果.与之相对应，文科高等数学的教学却呈现低效、难教的状态.学生反映数学内容抽象，与未来的职业规划脱节，无法认同学习高等数学的必要性及重要性，而教师拘泥于过于数学专业化的教材，很难设计与文科专业相关的应用实例，从而很难调动学生的主观能动性.另一方面，数字化的大时代又使得文科专业的同学在未来的职场生活中不可避免地会面对和应用数学的概念和词汇，因此，根据文科专业特点编写合适的高等数学教材是有必要的。

本书主要供高等院校文科专业的学生使用，内容包括一元函数微积分理论及应用.本书有以下几方面的特点：(1)参与编写的人员都是同济大学数学系承担高等数学课程的骨干教师，有丰富的教学经验，并在编写过程中借鉴了同济大学相关优秀教材的精华；(2)全书用论述性探讨数学思想本质的语言阐述数学理论，避免过多的数学公式，繁琐的计算技巧，注重数学理论与实际生活的联系，直观易懂，深入浅出，符合文科学生的学习特点；(3)本教材巧妙地使用了数学史，使历史

背景与理论知识无缝对接，在知识点的引入部分，教材使用了相关科学家文献中的原始论述，使读者了解问题产生的背景，数学巨匠研究的初衷，在阐述理论的正文中插入“广角镜”，介绍数学理论与实际生活的联系，延伸知识点的内涵，在每一章的结尾补充总结性、概述性的数学史话，介绍数学家的贡献，微积分的发展历程以及数学家的创新精神；(4)在每一章的结束都编写寄语，自然引出下章的核心问题，与下一章开始的综述遥相呼映，使得内容环环相扣，自成体系；(5)每章配有难易程度适中的习题和测试题，方便读者巩固、加强对知识点的理解；(6)教材根据文科专业所需数学程度不同把较难内容用“ * ”标出，任课老师可以依据学时和学生基础删减或增加。

本书最初的讲义第一章、第二章由兰辉执笔，第三章由方小春、刘庆生执笔，第五章、第六章由张华隆、李少华、兰辉执笔. 讲义完成后，兰辉老师使用该讲义作为文科类学生的高等数学教材，在使用过程中不断总结调整，使得该讲义不断完善，最终由兰辉统稿，刘庆生审稿形成本书.

在本书的编写过程中，得到了数学系全体教师的鼓励和支持，特别是徐建平老师、殷俊峰老师、梁进老师，他们都为编者提供了新的视角和思路.

本书的出版得到了同济大学出版社的大力支持，在此向他们表示感谢！

对于热情接受本书的文科相关专业的学生和老师们，我们也表示由衷的感谢！

限于学识和阅历，本书难免有不当和疏漏之处，敬请读者批评、指正.

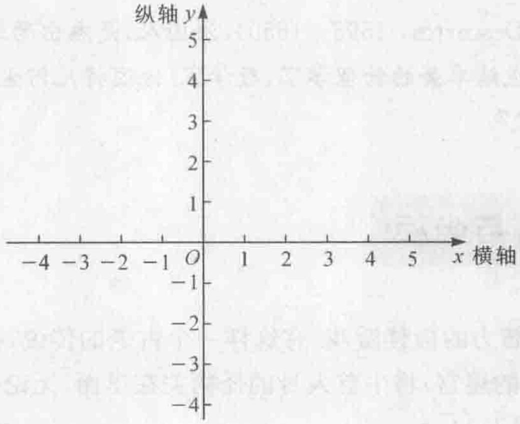
编　者

2014 年 5 月

目 录

第1章

谜题与微积分



微积分并不是横空出世的理论，这一富有创造性的数学理论是在相关知识结构发展到一定程度，由量变到质变，再由恰逢其时的两位天才数学家牛顿和莱布尼茨把分散的结论提升为具有较大普遍性的思想方法，从而闻名于世的. 因此要理解微积分，我们必须先了解对其发展产生重要影响的诸多概念及方法. 本章我们借助一些大家耳熟能详的谜题来展示数学家是如何从生活中发现与微积分相关的数学问题的，他们又是如何用数学的逻辑推理分析、获取“灵感”，继而解决问题，并开拓数学研究新领域的.

1.1 迷宫与解析几何

几何学家惯于在困难的证明中使用达到结论的成长串的简单推理，使我想到，所有人们能够知道的东西，同样是互相联系的.

—— 笛卡尔 《思想的指导法则》

笛卡尔(Rene Descartes, 1596—1650)，法国人，是杰出的近代哲学家，近代生物学的奠基人，是成绩卓著的物理学家、数学家. 他因将几何坐标系公式化被人们尊为“解析几何之父”.

1.1.1 迷宫与坐标

走迷宫是培养智力的极佳游戏. 有这样一个古老的传说，在希腊克里特岛国王修建了一座著名的迷宫，将牛首人身的怪物关在里面，无论谁，只要走进去，就再也找不到出口(图 1.1).

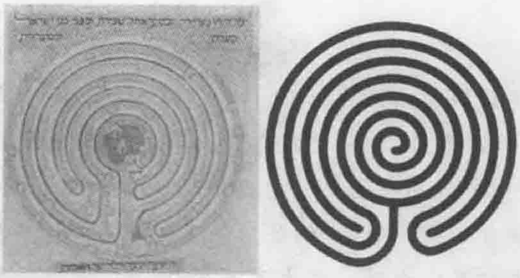


图 1.1

每隔七年，雅典人都要向怪物献上童男童女作为祭品. 第三个七年时，雅典王子主动请缨去消除这场灾难. 他战胜了怪物，并顺着一条系在入口处的线顺利地找到了返回的路.

这个故事暗藏着与数学的密切联系.

在走迷宫的时候,我们关心的是从一个岔路口如何走到另一个岔路口(或绝点),因此,我们可以把迷宫中的每一个岔路口、绝点用顶点表示,如果两个岔路口(或绝点)有一个通道连接,就在两个顶点之间连一条边. 这样,我们就可以用一个数学意义上的"图"[①]来表示一个迷宫了. 这里的"图"指的是由线或顶点构成的图形,通常用来描述某些事物之间的某种特定关系,用顶点代表事物,用连接两顶点的边来表示相应两个事物间具有的关系. 图中的边没有交点. 数学意义上的"图"可以帮助我们理解事物的本质.

图 1.2

将克里特迷宫的起点标为 A,怪物所在地标为 B(图 1.2),你很快会发现此迷宫其实特别简单,没有岔路和绝点,只要从入口进去,沿单一路径一直走,就可以到达迷宫的中央,是个一笔画——沿一条路径可以走完的图. 如果存在多条备选路径的迷宫,我们依然可以画出相应的数学"图",走法也许会困难了,但此类"图解问题"的数学方法依然有效.

仔细看克里特迷宫,把它想象成一只小虫沾了墨迹画出来的图,你会有什么想法? 大多数人可能谈不出有什么创意的点子,但是法国数学家笛卡尔会产生带给数学革命性发展的想法. 据说有一天,笛卡尔生病卧床,这时他看见屋顶上的一只蜘蛛在他上边左右拉丝,在空中结成复杂的迷宫. 蜘蛛的动态"表演"让笛卡尔茅塞顿开,他终于找到了直观表达函数的方法.

一直以来,笛卡尔对几何学中占主导地位的欧几里得几何很不满,他认为古希腊人的数学是几何式的代数,例如一个变量表示某线段长度,两个变量乘积表示某矩形的面积,三个变量的乘积表示某长方体体积. 三个以上的乘积则无法处理. 定理的证明也过分依赖几何图形,证明方法不具有推广性. 笛卡尔对当时的代数也有诸多批评,认为它完全拘泥于法则和公式,是牵线的木偶,以至于"成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的没用的艺术,而不像一门改进思想的科学"[②]. 他希望能够撷取代数与几何中最好的东西,互相取长补短:几何图形是直观

---

① 研究数学意义上的图的学科称为图论,是数学的一个分支.

② 选自"更好地指导推理和寻求科学真理的方法论",笛卡尔,1637.

的，易于理解的，而代数方程是比较抽象的，富有规则的，能不能把几何图形与代数方程结合起来，也就是说，用几何图形来刻画方程，用方程来表示几何图形呢？要想达到这个目的，运动的“点”是关键，如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组“数”挂上钩？

蜘蛛给了他启示，如果把蜘蛛看做一个动点，它的每个位置是否能用一组数确定下来呢？以地面上的墙角作为起点，把屋子里相邻的两面墙与地面相交出来的三条线作为三根数轴（图 1.3），那么，空间中任意一点的位置就可以用这三根数轴找到有顺序的三个数. 反过来，任意给一组三个有顺序的数也可以在空间中找出一点 P 与之对应（图 1.3）. 同样道理，用一组数（x，y）可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组有顺序的两个数来表示，这就是坐标系的雏形（图 1.4）.

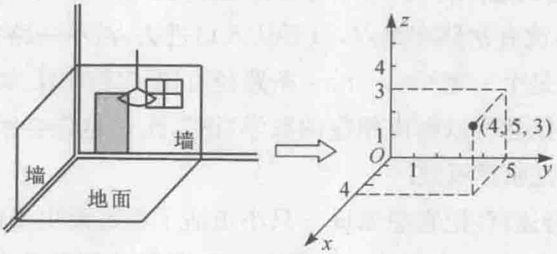


图 1.3

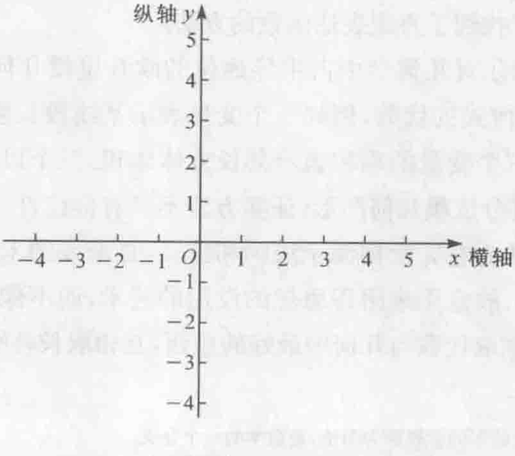


图 1.4

1.1.2　向量与空间直角坐标系

要实现笛卡尔的初衷，即点与坐标的一一对应，还需借助于向量. 起源于自然界的向量意为有大小、有方向的量，通常用带箭头的线段表示，线段长度表示向量的大小，箭头表示方向，记作$\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$或$\boldsymbol{a}$(图 1.5). 向量可自由平移. 向量的大小称为向量的模，记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$.

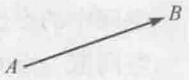


图 1.5

模为 0 的向量称为零向量，模为 1 的向量称为单位向量. 模相等、方向相同的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 方向相同或相反的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为平行向量，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量可以认为与任意向量平行.

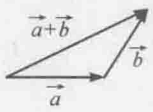


图 1.6

向量不能像数量那样直接比较大小，但它也有自己的运算.

(1) **加法**：将有向线段表示的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 首尾相连，则 $\boldsymbol{a}$ 的起点指向 $\boldsymbol{b}$ 终点的向量称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1.6).

(2) **数乘**：$\lambda\boldsymbol{a}$(其中 $\lambda\in\mathbf{R}$)表示模为$|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$的向量，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

(3) **数量积**：若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则常数$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

特别地，若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 此时 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量具有两个基本的简单性质，这两个性质是实现笛卡尔理想的基础.

性质 1　对于任一向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$，其中 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量. 说明向量可以由模及单位向量刻画.

性质 2　设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 充分必要条件为存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 说明平行向量存在等量关系.

由此，我们可以在代数和几何之间架起一座桥梁：

给定一个点，一个方向，一个单位长度，则可以确定一数轴，使得数轴上任一点 P 有唯一的实数 x 与之对应.

图 1.7

由点 O、指定方向及单位长度，我们可以确定单位向量 $\boldsymbol{i}$，构造一个数轴（图 1.7），数轴上任一点 P，对应向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{i}$，则存在唯一实数 x 使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，于是

$$\text{点 } P \longleftrightarrow \text{ 向量}\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow \text{ 实数 } x,$$

实数 x 成为刻画点的重要指标，称其为点 P 在数轴上的坐标.

空间中的点也可以类似表示.

空间取一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，我们可以确定三个坐标轴 x 轴、y 轴及 z 轴，它们的正向满足右手法则（图 1.8），即右手抓住 z 轴，四指从 x 轴绕到 y 轴正向，称之为空间直角坐标系. 三个坐标轴构成三个坐标平面，分别记作 xOy 面，yOz 面及 xOz 面.

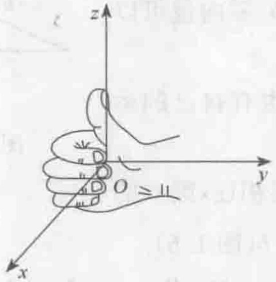


图 1.8

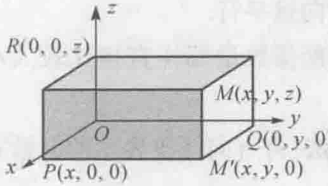


图 1.9

利用向量加法的三角形法则有（图 1.9）

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}.$$

而 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{PM'}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{M'M}=z\boldsymbol{k}$，即 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，于是

$$\text{点 } M \longleftrightarrow \text{ 向量}\overrightarrow{OM} \longleftrightarrow \text{ 数对}(x,\ y,\ z).$$

由此空间任一点 M，都有一组有序三数对 $(x,\ y,\ z)$ 与之一一对应，称为 M 点的坐标.

三维立体空间我们以后可以用 $\mathbf{R}^3$ 来表示，即

$$\mathbf{R}^3=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_i\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2,\ 3\}.$$

从此向量由几何化表示的量转化为可代数化表示的量，它的运算是否也可以代数化表示？

定理 1 设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_i=b_i$，$i=x, y, z$；

(2) $|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，特别地，若点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则两点间距离 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$；

(4) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$，$\lambda \in \mathbf{R}$；

(5) 若 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$；

(6) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$（这里 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角）. 特别地，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=\mathbf{0} \Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

至此，点的几何研究可以转化为用数表示的代数运算，反之，对代数语言表达的理论，我们可以加以几何解释，从而直观地掌握这些理论的意义，并得到启发提出新的结论. 笛卡尔看似偶然的发现，创造了用代数的方法来研究几何图形的数学分支——解析几何，从此改变了数学的面貌. 事实上，17 世纪以来的数学发展（包括微积分），在很大程度上都应归功于坐标几何的诞生.

1.1.3 曲面、曲线的方程

运动的点可以生成更为复杂的几何图形. 曲面在几何上就可以看作是点的运动轨迹.

例 1 建立球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 r 的球面方程.

解 设点 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点，根据题意 $|\overrightarrow{MM_0}|=r$，

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

特别地，当球心是坐标原点时，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=r^2$.

如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1.1}$$

有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1.1)；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(1.1)，

那么，方程(1.1)就叫做曲面 S 的方程，称曲面 S 为方程(1.1)的图形(图 1.10).

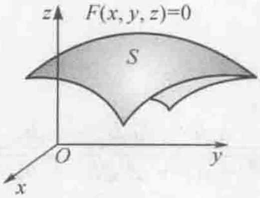


图 1.10

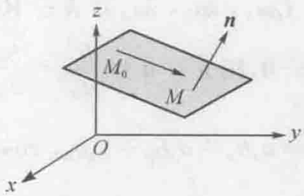


图 1.11

例 2 求经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且垂直于向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 的平面方程.

解 取平面上任一点 $M(x, y, z)$，必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$(图 1.11)，则 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0$，即

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.2}$$

或 $Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$，令 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$，即

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.3}$$

我们称垂直于平面的向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为平面的法向量. 方程(1.2)称为平面的点法式方程，方程(1.3)称为平面的一般方程.

此外，还可以用含两个变量的方程组来表示曲面上任一点坐标，即

> 你能从方程(1.3)中找到平面的法向量吗？

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

这就是曲面的参数方程.

例如，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 还可以表示为(图 1.12)