# 虛數詳論

## 第一章　虛數之基本運算

### § 1. 虛數定義 虛數單位 $i=\sqrt{-1}$ 代數學

御乘法之律曰。

兩同號數(指實數)相乘。其積爲正。

兩異號數相乘。其積爲負。

例如　　$(+a)\times(+b)=+ab$

$(+a)\times(-b)=-ab$

$(-a)\times(-b)=+ab$

$(-a)\times(+b)=-ab$

如 $a=b$ 則有

$(+a)\times(+a)=+a^2$

$(-a)\times(-a)=+a^2$

依定義。$+a^2$ 爲 $+a$ 或 $-a$ 之平方(或二次乘積)。反之 $+a$ 或 $-a$ 爲 $+a^2$ 之平方根。亦卽一實數之平方。恆爲一正數。而一正數必有二平方根。値同而號異也。準此。則一負數不能以一實數爲其平方根矣。換言之。卽下方程式

$$x^2+a^2=0 \qquad (1)$$

爲無解。代數家不因而束手也。因剏新數。以繼運算之窮。以 $\sqrt{-a^2}$ 爲 $(-a^2)$ 之根。卽當有 $\sqrt{-a^2}\times\sqrt{-a^2}=-a^2$。是數者 $\sqrt{-a^2}$。純爲運算符號。以數値論。則無意義可言也。(習算術者。不知何爲 $\sqrt{-4}$。蓋非生於量者也。)

夫 $\sqrt{-a^2}$ 既爲運算符號。則御之之道。在求勿背運算之律。律不背。又可視之無異於他種數矣。

律有

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=ab$$

故亦有

$$\sqrt{-a^2}=\sqrt{a^2(-1)}=\sqrt{a^2}\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$$

令 $\sqrt{-1}=i$ 則

$$\sqrt{-a^2}=ia$$

$ia$ 謂之虛數。$i$ 謂之虛數單位。又凡 $i^2$ 當以 $-1$ 代之。於是 (1) 之解爲

$$\begin{cases} x_1=+ia \\ x_2=-ia \end{cases}$$

## § 2. 雜數

一數而糅合虛實二類數者。謂之雜數。其形爲

$$a+bi$$

$i$ 即符號 $\sqrt{-1}$ 也。$a$ $b$ 爲二實數。$a$ 謂之雜數中之實數部。$b$ 則爲雜數中虛數之係數也。

一雜數 $(a+bi)$ 爲零時。必

$$a=0, \quad b=0$$

謂兩雜數 $a+bi$ $a'+b'i$ 相等。必 $a=a', b=b'$

凡此皆本定義則然也。近行大代數。譯者勉勉然爲證明。非徒無益。又害其義。夫虛實二類數。卓然各別。其能糅和者。符號（$+-\cdots$）爲之介也。其不能相生則明矣。然讀者愼勿以虛實不

能相生之故病雜數。蓋其致用宏妙。皆以此也。是眞代數家意外之獲也。

## § 3. 雜數之運算 加法及減法

問題 求二雜數 $a+bi$ 及 $a'+b'i$ 之和或較。

依定義

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(bi+b'i)$$

$$=(a+a')+(b+b')i=A+Bi$$

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(bi-b'i)$$

$$=(a-a')+(b-b')i=A'+B'i$$

卽以二雜數ㄎ之實數部與實部相加減。虛數係數與虛數係數相加減也。故二雜數之和。恒爲一新雜數。惟當 $B=0$ 時。卽

$$b+b'=0$$

時。則其和爲一實數

$$A=a+a'$$

矣。如 $a=a', b'=-b$ 則有二雜數

$$a+bi \qquad a-bi$$

其和爲一實數。$A=2a$。是二數謂之交錯虛數。二交錯虛數之較。爲一虛數。蓋

$$(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+(bi+bi)=2bi$$

故也。

更推廣之。則有

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)\pm(c_3+b_3i)\pm\cdots\cdots\pm(a_n+b_ni)$$

$$=(a_1\pm a_2\pm a_3\pm\cdots\cdots\pm a_n)+(b_1\pm b_2\pm b_3\pm\cdots\cdots\pm b_n)i$$

$$=A_n+B_ni$$

## §4. 乘法

<u>問題</u> 求二雜數 $a+bi$ 及 $a'+b'i$ 之乘積。

依常律

$$\begin{array}{r} a+bi \\ a'+b'i \\ \hline aa'+a'bi \qquad\qquad \\ +ab'i+bb'i^2 \\ \hline aa'+(a'b+ab')i+bb'i^2 \end{array}$$

即

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$$

以 $i^2=-1$ 也。其積仍爲一雜數。

**定理** 二交錯虛數之乘積。爲一實數。蓋

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2$$

更推廣而求 $n$ 雜數之乘積。($n$ 爲有限者)

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)(a_3+b_3i)\cdots\cdots\cdots\cdots(a_n+b_ni)$$

則先求 $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$ 之積。依上法。立得

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$$

令

$$a_1a_2-b_1b_2=\alpha_1 \qquad\qquad a_1b_2+b_1a_2=\beta_1$$

則

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=\alpha_1+\beta_1i$$

再求 $(\alpha_1+\beta_1i)(a_3+b_3i)$ 之積。同理可令之爲

$$(\alpha_1+\beta_1i)(a_3+b_3i)=\alpha_2+\beta_2i$$

逐漸以至

$$(\alpha_{n-2}+\beta_{n-2}i)(a_n+b_ni)=\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}i$$

$\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}i$ 即所求之積也。

運算時。如任易各因子之次序。其結果終不變。此易得而實按者也。

§ 5. 設有四雜數

$$\begin{cases} a+bi \\ a-bi \end{cases} \qquad \begin{cases} c+di \\ c-di \end{cases}$$

中兩兩互爲交錯虛數。

令
$$P=(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$$
$$\quad 1 \qquad\quad 2 \qquad\quad 3 \qquad\quad 4$$

以 1,2 互乘。3,4 互乘。則

$$P=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

以 1,3 互乘。2,4 互乘。則

$$P=\Big\{(ac-bd)+(ad+cb)i\Big\}\Big\{(ac-bd)-(ad+cb)i\Big\}=(ac-bd)^2+(ad+cb)^2$$

後以 1,4 相乘。2,3 相乘。則有

$$P=\Big\{(ac+bd)+(bc-ad)i\Big\}\Big\{(ac+bd)-(bc-ad)i\Big\}=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

由此得公式焉

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+cb)^2$$

或

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

即兩平方和之乘積。仍等於兩平方之和也。

## § 6. 虛數模

依定義雜數 $a+bi$ 之模爲 $+\sqrt{a^2+b^2}$。可以符號 $|a+bi|$ 表之。

意即
$$|a+bi|=+\sqrt{a^2+b^2}$$
也。

兩交錯虛數 $a+bi$ 及 $a-bi$ 之模。同為 $+\sqrt{a^2+b^2}$。其積為此模之平方。蓋

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

故也。

比較雜數之法。視其模之大小而定。

一雜數之模為零者。則此雜數為零。反之雜數為零。其模亦為零。

一實數之模。即是數之係以正號者也。

**定理**　數雜數乘積之模。等於各雜數之模之乘積。

先設二雜數 $a+bi, c+di$。其模各為 $+\sqrt{a^2+b^2}$ 及 $+\sqrt{c^2+d^2}$。是二數之積。為

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

是積之模為 $+\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$ 惟

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

明兩數之模之乘積也。

更推廣之令 $a_1\ a_2\ a_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n$ 為 $n$ 雜數。$|a_1|\ |a_2|\cdots\cdots|a_n|$ 各為其模。

本上理

$$|a_1\cdot a_2|=|a_1|\,|a_2|$$

$$|\underbrace{a_1a_2}\cdot a_3|=|a_1a_2|\,|a_3|$$

$$|\underbrace{a_1a_2a_3}\cdot a_4|=|a_1a_2a_3|\,|a_4|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\underbrace{a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_{n-1}}\cdot a_n|=|a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_{n-1}|\,|a_n|$$

$\underbrace{a_1\cdots\cdots\cdots a_n}$ 爲一雜數。即 $a_1\cdots\cdots\cdots a_n$ 求得之積也。

兩端互乘。則得

$$|a_1a_2\cdots\cdots\cdots\cdots a_n|=|a_1|\,|a_2|\cdots\cdots\cdots\cdots|a_n|$$

故定理云云。

或書爲

$$mod\,(a_1a_2\cdots\cdots\cdots\cdots a_n)=mod\,a_1\cdot mod\,a_2\cdots\cdots\cdots\cdots mod\,a_n$$

**§7. 定理** 欲 $n$ 雜數之乘積爲零。必此 $n$ 數中至少有一數爲零。($n$ 爲有限者)

如一雜數爲零。則其模必爲零矣。依上理。一乘積之模爲其因子之模之乘積。而此 $n$ 模中有一爲零。於是而此 $n$ 模乘積爲零矣。亦卽此 $n$ 雜數之乘積之模爲零。凡模爲零者。數必從之。故此乘積爲零也。

## §8. 除法

問題　求以 $c+di$ 除 $a+bi$。

令 $x+yi$ 爲得數。則有

$$\frac{a+bi}{c+di}=x+yi$$

或

$$a+bi=(c+di)\,(x+yi)=(cx-dy)+(dx+cy)i$$

欲此兩端相等。必也

$$cx-dy=a$$

$$dx+cy=b$$

由此求得 $x\ y$ 之值爲($c\ d$ 不盡爲零)

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

於是

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

此另可以捷便之法得之。

凡以一數乘一分數上下。則分數之值不變。即

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{(ac+bd)+(cb-ad)i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

$c-di$ 者 $c+di$ 之交錯數也

## § 9. 乘冪

**定義**　一數 $a$ 之 $n$ 次自乘積。謂之此數之 $n$ 次乘冪。以符號 $a^n$ 表之。

問題　求 $i^n$ 之值

依定義

$$i=i$$
$$i^2=-1$$

於是

$$\begin{aligned}i^3&=i(i^2)=i(-1)=-i\\i^4&=(i^2)(i^2)=(-1)(-1)=1\\i^5&=i^4(i)=i\\i^6&=i^4(i^2)=-1\end{aligned}$$

……………………………………

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i^{4p}\quad=1$$

$$i^{4p+1}=i$$

$$i^{4p+2}=i^{2(2p+1)}=-1$$

$$i^{4p+3}=i^{4p}i^{3}=-i$$

乃推廣而展

$$(a+bi)^n$$

依二項式定理。視 $bi$ 爲一數。展之。則得

$$(a+bi)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}(bi)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(bi)^2+\cdots\cdots na(bi)^{n-1}+(bi)^n$$

$$=a^n+i\frac{n}{1}a^{n-1}b+i^2\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+i^{n-1}nab^{n-1}+i^nb^n$$

$$=a^n+i\frac{n}{1}a^{n-1}b-\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-i\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\overbrace{\left[a^n-\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)\cdots(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4\cdots\cdots\cdots\cdots\right]}^{A}$$

$$+i\overbrace{\left[\frac{n}{1}a^{n-1}b-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{5!}a^{n-5}b^5\cdots\right]}^{B}$$

$$=A+Bi$$

變 $i$ 爲 $-i$ 則得

$$(a-bi)^n=\left[a^n-\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots\right]-i\left[\frac{n}{1}a^{n-1}b-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\right]$$

$$=A-Bi$$

$a+bi$ 與 $a-bi$ 爲交錯虛數。$A+Bi$ 與 $A-B$ 亦爲交錯虛數。故兩交錯之等乘冪。恒爲交錯數云。

又有

$$(a+bi)^n\times(a-bi)^n=(A+Bi)(A-Bi)$$

$$(a+bi)^n\times(a-bi)^n=\left\{(a+bi)(a-bi)\right\}^n=(a^2+b^2)^n=A^2+B^2$$

卽兩平方和之 $n$ 次乘冪。仍爲兩平方之和。此 § 5 之推廣也。

## § 10. 應用 已與一元多項全式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

中 $a_0a_1\cdots\cdots\cdots a_n$ 盡爲實數。$n$ 爲正整數。若以雜數 $(a+bi)$ 易 $x$。則 $f(x)$ 之值。變爲

$$f(a+bi)$$

卽

$$f(a+bi)=a_0(a+bi)^n+a_1(a+bi)^{n-1}+a_2(a+bi)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{n-1}(a+bi)+a_n$$

準上節可令

$$(a+bi)^n=\alpha_n+\beta_ni$$
$$(a+bi)^{n-1}=\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a+bi)^2=\alpha_2+\beta_2i$$
$$a+bi=\alpha_1+\beta_1i$$

$$f(a+bi)=a_0(\alpha_n+\beta_ni)+a_1(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}i)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$$
$$=\underbrace{(a_0\alpha_n+a_1\alpha_{n-1}+\cdots a_{n-1}\alpha_1+a_n)}_{P}+i\underbrace{(a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots a_{n-1}\beta_1)}_{Q}$$
$$=P+iQ$$

如以 $a-bi$ 易 $x$。則有(仍依上節)

$$f(a-bi)=a_0(a-bi)^n+a_1(a-bi)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=a_0(\alpha_n-\beta_ni)+a_1(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}i)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$$
$$=(a_0\alpha_n+a_1\alpha_{n-1}+\cdots+a_n)-i(a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_{n-1}\beta_1)$$
$$=P-iQ$$

如 $f(x)$ 以雜數 $a+bi$ 爲根。則 $f(a+bi)$ 必等於零。即

$$P+iQ=0$$

亦即當有

$$\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$$

也。

惟當 $P=0$。及 $Q=0$ 時。$f(a-bi)$ 亦爲零。故 $(a-bi)$ 亦爲 $f(x)$ 之根也。約而言之。凡一實係數一元多項全式。以一虛數爲根時。必仍以其交錯虛數爲根。於是虛根之數恆爲偶。如是則 $n$ 爲奇數時。$f(x)$ 至少必有一根爲實數。

## § 11. 根

**定義**　謂一數 $a$ 爲 $A$ 之 $n$ 次根者。以 $a$ 之 $n$ 次乘冪可生 $A$ 也。即

$$a^n=A$$

問題　求雜數 $a+bi$ 之平方根。

試假定此數之根爲 $x+yi$。依定義。當有

$$(x+yi)^2=a+bi$$

或

$$x^2-y^2+2xyi=a+bi$$

互等兩項之虛實部。則有

$$x^2-y^2=a$$

$$2xy=b$$

由二式得 $y=\dfrac{b}{2x}$。以之代入一式。則有

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a$$

卽

$$4x^4-4ax^2-b^2=0$$

令 $x^2=z$ 此式變爲

$$4z^2-4az-b^2=0$$

其根爲

$$z_1=\frac{2a+\sqrt{4a^2+4b^2}}{4}=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$z_2=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$x$ 當爲實數。故 $z$ 當爲正。如是則不能用 $z_2$。以其爲負。蓋 $\sqrt{a^2+b^2}$ 大於 $a$。故 $a-\sqrt{a^2+b^2}$ 爲負明矣。用 $z_1$ 則 $x$ 之値爲。

$$x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

而

$$y=\frac{b}{2x}=\frac{b}{\pm2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}=\pm\frac{b}{\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}}$$

$$=\pm\frac{b\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}}{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}=\pm\frac{b\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})(-a+\sqrt{a^2+b^2})}}{2(-a^2+a^2+b^2)}$$

$$=\pm\frac{b\sqrt{2(-a^2+a^2+b^2)}\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{2b^2}=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$y$ 之二値皆爲實數。以 $a$ 小於 $\sqrt{a^2+b^2}$ 故也。於是則得 $a+bi$ 之平方根二。亦値同號異。

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

同理易得 $a-bi$ 之根。爲

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

本此甚易於推廣。惟著者將更演捷便之法。故畧之。下節舉例。足供讀者探索也。

## § 12. 求 $i$ 之立方根.

假定 $(x+yi)$ 爲其一根依定義。當有

$$(x+yi)^3=i$$

展之

$$x^3-iy^3+3x^2yi-3xy^2=i$$

或

$$x(x^2-3y^2)+y(3x^2-y^2)i=i$$

互等其兩端之虛實部。則有

$$x(x^2-3y^2)=0$$

$$y(3x^2-y^2)=1$$

第一式分爲二。其一爲 $x=0$。用此則由二式得

$$-y^3=1$$

或

$$y=-1$$

其一爲 $x^2-3y^2=0$。或 $x^2=3y^2$

以此值代入二式得

$$y(9y^2-y^2)=1$$

或

$$y^3(9-1)=1$$

$$y^3=\tfrac{1}{8}$$

$$y=\tfrac{1}{2}$$

於是得 $x$ 之值爲

$$x^2=3y^2=\tfrac{3}{4}$$

或

$$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

約而言之。所得解爲

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

故 $\sqrt[3]{i}$ 有三解卽

$$\sqrt[3]{i}=-i$$

$$\sqrt[3]{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

$$\sqrt[3]{i}=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$$

## 第 一 章 習 題

(1) 證

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)\equiv\Big[e(ac-bd)-f(ad+bc)\Big]^2$$
$$+\Big[f(ac-bd)+e(ad+bc)\Big]^2$$

(2) 如 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 之係數。盡爲實數。并有下關係

$$C=2a=-b$$

則 $f(x)$ 之二根爲二交錯虛數

$$(1\pm i)$$

試證之。

(3), $a\ b\ c\ d\ e$…………五數合下關係時

$$a+e=c$$

$$d=b$$

試證下四次方程式

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

可以 $(x^2+1)$ 除盡。

(4)試證1有三個立方根。其一卽1。其他二根爲交錯虛數 $\omega_1\omega_2$

1° 考求 $\omega_1\ \omega_2$ 之特性

2° 求下乘積

$$(a+b+c)(a+b\omega_1+c\omega_2)(a+b\omega_2+\omega_1)$$

(5) 如令

$$\frac{1}{1-i}+\frac{1}{a-i}+\frac{1}{1-ai}=x+iy$$

求 $x$ 及 $y$ 之值

*(6), $z$ 爲一雜數變數。

$$z=x+yi$$

$x\ y$ 皆實數變數也。

令 $f(z)$ 爲 $z$ 之連倚數以 $x+yi$ 易 $z$ 時。則 $f(z)$ 變爲

$$f(x+yi)=\phi(xy)+\psi(xy)i$$

如與 $x$ 一增量 $\Delta x$,$y$ 一增量 $\Delta y$ 則 $z$ 得一相當增量 $\Delta z$。而倚數 $f(z)$ 所得增量爲

$$\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$$

如 $\Delta x$, $\Delta y$ 同時趨進於零時。試證 $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ 有一定限之情形為

$$
\mathrm{A}\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\equiv-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases}
$$

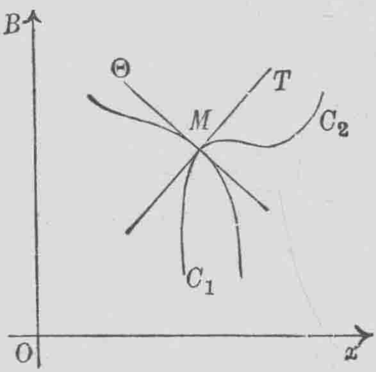
反之。如 $A$ 種情形已合。則 $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ 必有一限。此限卽虛數變數倚數 $f(z)$ 之引數也。(參看著者微分學理解上册)

*(7) $f(z)$ 爲一 $n$ 次多項全式。以 $x+yi$ 易 $z$ 時。則此式變形為

$$f(x+yi)=\phi(xy)+i\psi(xy)$$

證 $\phi(xy)=0$ $\psi(xy)=0$ 兩曲線正交於 $n$ 點(用正經緯)

附註謂二曲線 $c_1$ $c_2$ 正交於 $M$ 點卽謂兩曲線在 $M$ 點之切線 $MT$ 與 $M\Theta$ 互為垂線也




(8) 求 $+i$ 及 $-i$ 之四次根