

EXAMINATION QUESTIONS AND ANSWERS  
OF AMERICAN MIDDLE SCHOOL  
STUDENTS MATHEMATICAL CONTEST FROM  
THE FIRST TO THE LATEST (VOLUME I)



历届美国中学生

# 数学竞赛试题及解答

第1卷 兼谈辛特勒定理

1950~1954

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

EXAMINATION QUESTIONS AND ANSWERS  
OF AMERICAN MIDDLE SCHOOL  
STUDENTS MATHEMATICAL CONTEST FROM  
THE FIRST TO THE LATEST (VOLUME I)



历届美国中学生

# 数学竞赛试题及解答

**第1卷** 兼谈辛特勒定理

1950~1954

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

美国中学生数学竞赛是全国性的智力竞技活动,由大学教授出题,题目具有深厚的背景,蕴涵丰富的数学思想,这些题目有益于中学生培养数学思维,提高辨识数学思维模式的能力.本书面向高中师生,整理了从1950年到1954年美国中学生数学竞赛试题,并给出了巧妙的解答.

本书适合于中学生、中学教师及数学竞赛爱好者阅读参考.

## 图书在版编目(CIP)数据

历届美国中学生数学竞赛试题及解答.第1卷,兼谈辛特勒定理:1950~1954/刘培杰数学工作室编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5603-4547-5

I. ①历… II. ①刘… III. ①中学数学课—题解  
IV. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第309935号

策划编辑 刘培杰 张永芹  
责任编辑 张永芹 钱辰琛  
封面设计 孙茵艾  
出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006  
传 真 0451-86414749  
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>  
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司  
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 10.75 字数 123千字  
版 次 2014年7月第1版 2014年7月第1次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5603-4547-5  
定 价 18.00元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎  
目  
录

- 第1章 1950年试题 //1
- 1 第一部分 //1
  - 2 第二部分 //4
  - 3 第三部分 //8
  - 4 答案 //11
  - 5 1950年试题解答 //12
- 第2章 1951年试题 //25
- 1 第一部分 //25
  - 2 第二部分 //28
  - 3 第三部分 //33
  - 4 答案 //37
  - 5 1951年试题解答 //37
- 第3章 1952年试题 //52
- 1 第一部分 //52
  - 2 第二部分 //55
  - 3 第三部分 //59
  - 4 答案 //63

5	1952 年试题解答	//64
<b>第4章 1953 年试题 //81</b>		
1	第一部分	//81
2	第二部分	//84
3	第三部分	//88
4	答案	//91
5	1953 年试题解答	//92
<b>第5章 1954 年试题 //107</b>		
1	第一部分	//107
2	第二部分	//110
3	第三部分	//115
4	答案	//119
5	1954 年试题解答	//119
<b>附录 辛特勒定理 //135</b>		
1	空间闭曲线的等分点	//135
2	任意五等分点组都不共球的空间闭曲线	//144
3	一个奥数命题	//149
<b>编辑手记 //151</b>		



# 1950 年试题

## 第 1 章

### 1 第一部分

1. 若 64 分成三部分,且成 2,4 与 6 之比,其最小部分是( ).  
(A)  $5\frac{1}{3}$       (B) 11      (C)  $10\frac{2}{3}$   
(D) 5      (E) 非上述答案
2. 设  $R = gS - 4$ , 当  $S = 8$  时,  $R = 16$ ; 当  $S = 10$  时,  $R$  等于( ).  
(A) 11      (B) 14      (C) 20  
(D) 21      (E) 非上述答案
3. 方程式  $4x^2 + 5 - 8x = 0$  的根的和等于( ).  
(A) 8      (B) -5      (C)  $-\frac{5}{4}$   
(D) -2      (E) 非上述答案
4. 化简  $\frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$  至最低项, 等于( ).

(A)  $\frac{a}{b}$       (B)  $\frac{a^2 - 2b^2}{ab}$       (C)  $a^2$

(D)  $a - 2b$       (E) 非上述答案

5. 若在 8 与 5 832 之间插入 5 个等比中项, 则此等比级数的第 5 项是( ).

(A) 648      (B) 832      (C) 1 168      (D) 1 944

(E) 非上述答案

6. 满足方程式

$$2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0$$

$$2x + y + 3 = 0$$

的  $y$  值可由下列何方程式解得( ).

(A)  $y^2 + 14y - 7 = 0$       (B)  $y^2 + 8y + 1 = 0$

(C)  $y^2 + 10y - 7 = 0$       (D)  $y^2 + y - 12 = 0$

(E) 非上述答案

7. 若数字 1 被安置于两位数之后, 此两位数的十位数字是  $t$ , 个位数字是  $u$ , 则新数是( ).

(A)  $10t + u + 1$       (B)  $100t + 10u + 1$

(C)  $1\ 000t + 10u + 1$       (D)  $t + u + 1$

(E) 非上述答案

8. 若一圆的半径增加 100%, 则面积增加( ).

(A) 100%      (B) 200%      (C) 300%      (D) 400%

(E) 非上述答案

9. 内接于半径为  $r$  的半圆中的最大三角形的面积是( ).

(A)  $r^2$       (B)  $r^3$       (C)  $2r^2$       (D)  $2r^3$

(E)  $\frac{1}{2}r^2$

10. 有理化分式  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  的分子, 则其分母的最简型



是( ).

(A)  $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$       (B)  $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(C)  $3 - \sqrt{3} \times \sqrt{2}$       (D)  $3 + \sqrt{6}$

(E) 非上述答案

11. 在公式  $C = \frac{en}{R + nr}$  中, 当  $e, R,$  与  $r$  不变时, 若  $n$  增

大, 则  $C$  ( ).

(A) 减小    (B) 增大    (C) 保持不变

(D) 增大然后减小    (E) 减小然后增大

12. 若凸多边形的边数由 3 增加至  $n$ , 则其外角度量的和( ).

(A) 增加    (B) 减少    (C) 保持不变

(D) 不能预算    (E) 变成  $n - 3$  个平角

13.  $(x^2 - 3x + 2)x(x - 4) = 0$  的根为( ).

(A) 4      (B) 0 与 4    (C) 1 与 2

(D) 0, 1, 2 与 4      (E) 1, 2 与 4

14. 联立方程式  $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 6y - 4x = 9 \end{cases}$  的解为( ).

(A)  $x = 4, y = 0$       (B)  $x = 0, y = \frac{3}{2}$

(C)  $x = 0, y = 0$       (D) 无解存在

(E) 无限解存在

15.  $x^2 + 4$  的实因式是( ).

(A)  $(x^2 + 2)(x^2 + 2)$     (B)  $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$

(C)  $x^2(x^2 + 4)$

(D)  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

(E) 不存在



## 2 第二部分

16. 展开  $[(a+3b)^2(a-3b)^2]^2$ , 其化简后的项数是  
( ).

- (A)4      (B)5      (C)6      (D)7  
(E)8

17. 如下表中所示, 则  $x, y$  之间的关系式为( ).

$x$	0	1	2	3	4
$y$	100	90	70	40	0

- (A)  $y = 100 - 10x$       (B)  $y = 100 - 5x^2$   
(C)  $y = 100 - 5x - 5x^2$       (D)  $y = 20 - x - x^2$   
(E) 非上述答案

18. 在下列式子中( ).

- ①  $a(x-y) = ax - ay$ ;      ②  $a^{x-y} = a^x - a^y$ ;  
③  $\lg(x-y) = \lg x - \lg y$ ;  
④  $\frac{\lg x}{\lg y} = \lg x - \lg y$ ;  
⑤  $a(xy) = ax \cdot ay$

- (A) 只有①与④正确  
(B) 只有①与⑤正确  
(C) 只有①与③正确  
(D) 只有①与②正确  
(E) 只有①正确

19. 若  $m$  人于  $d$  天可完成一项工作, 则  $m+r$  人于  
( ) 天可完成此工作.

- (A)  $d+r$       (B)  $d-r$



$$(C) \frac{md}{m+r} \qquad (D) \frac{d}{m+r}$$

(E) 非上述答案

20. 当  $x^{13} + 1$  以  $x - 1$  除时, 其剩余是( ).  
 (A) 1      (B) -1      (C) 0      (D) 2  
 (E) 非上述答案
21. 长方体的侧面、前面、底面的面积各为 12, 8, 6, 则其体积是( ).  
 (A) 576      (B) 24  
 (C) 9      (D) 104  
 (E) 非上述答案
22. 连减 10% 与 20% 的折扣相当于减去( ) 的折扣.  
 (A) 30%      (B) 15%      (C) 72%      (D) 28%  
 (E) 非上述答案
23. 某人购屋花费 \$10 000 并出租, 此人取每月租费的  $12\frac{1}{2}\%$  作修缮费, 并付年税 \$325 后, 且能以购屋款的  $5\frac{1}{2}\%$  再进行投资, 则月租费是( ).  
 (A) \$64.82      (B) \$83.33  
 (C) \$72.08      (D) \$45.83  
 (E) \$177.08
24. 方程式  $x + \sqrt{x-2} = 4$  有( ).  
 (A) 2 个实根      (B) 1 个实根与 1 个虚根  
 (C) 2 个虚根      (D) 无根  
 (E) 1 个实根
25.  $\log_5 \frac{125 \times 625}{25}$  的值等于( ).

- (A) 725    (B) 6    (C) 3 125    (D) 5  
(E) 非上述答案
26. 若  $\lg m = b - \lg n$ , 则  $m$  等于( ).  
(A)  $\frac{b}{n}$     (B)  $bn$     (C)  $10^b n$     (D)  $b - 10^n$   
(E)  $\frac{10^b}{n}$
27. 一汽车行驶于 120 km 的路程上(从 A 至 B), 速率为 30 km/h, 但同一距离回来时速率为 40 km/h, 来回路程的平均速率最接近( ).  
(A) 33 km/h    (B) 34 km/h  
(C) 35 km/h    (D) 36 km/h  
(E) 37 km/h
28. A, B 两人各骑自行车同时出发, 从甲城至乙城, 相距 60 km. A 每小时比 B 慢 4 km. B 至乙城即刻折返, 遇 A 于距乙城 12 km 处, 则 A 的速率是( ).  
(A) 4 km/h    (B) 8 km/h  
(C) 12 km/h    (D) 16 km/h  
(E) 20 km/h
29. 某设计者建造一台机器能在 8 min 内打出 500 封信的地址, 他希望建造另一台机器以至于两者同时操作时能在 2 min 内打出 500 封信的地址, 那么表示仅第二台机器在  $x$  min 内能打出 500 封信的地址的等式为( ).  
(A)  $8 - x = 2$     (B)  $\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$   
(C)  $\frac{500}{8} + \frac{500}{x} = 500$     (D)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{8} = 1$



(E)非上述答案

30. 在一群男女中,女生走了 15 名时,则余下来的男女比例为 2:1. 在此之后,男生走了 45 名,则余下来的男女的比例为 1:5,问最初的女生人数为( ).

(A)40 (B)43 (C)29 (D)50

(E)非上述答案

31. 某人定制四双黑袜子及额外一些蓝袜子,黑袜子每双的价格是蓝袜子的两倍. 当定制单填好后,才发现两颜色的双数互换了. 为此,支出增加 50%. 问在原先的定制单上黑袜子的双数与蓝袜子的双数之比为( ).

(A)4:1 (B)2:1 (C)1:4 (D)1:2

(E)1:8

32. 长为 25 m 的梯子放置在一建筑物的垂直墙上,梯足距建筑物底端 7 m,若梯子的顶端滑下 4 m,则梯足将滑( ).

(A)9 m (B)15 m (C)5 m (D)8 m

(E)4 m

33. 内直径为 1 cm 的圆管子需( )根管子才能装与内直径为 6 cm 的圆管子同量的水(假设管长相等).

(A) $6\pi$  (B)6 (C)12 (D)36

(E) $36\pi$

34. 当一气球周长由 20 cm 增至 25 cm 时,则半径应增加( ).

(A)5 cm (B) $2\frac{1}{2}$  cm (C) $\frac{5}{\pi}$  cm (D) $\frac{5}{2\pi}$  cm

(E) $\frac{\pi}{5}$  cm

35. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 24$  cm, $BC = 10$  cm, $AB = 26$  cm, 则它的内切圆的半径为( ).  
(A) 26 cm (B) 4 cm (C) 13 cm (D) 8 cm  
(E) 非上述答案

### 3 第三部分

36. 一商人购货,按原标价扣去 25%,他希望对货物定一新标价,以便在标价上能扣去 20%之后,且在售价上仍获有 25%的纯利,问此商人必须标的货价与原标价间的百分比是( ).  
(A) 125% (B) 100% (C) 120% (D) 80%  
(E) 75%
37. 若 $y = \log_a x$ 且 $a > 1$ ,下列叙述不正确的是( ).  
(A) 若 $x = 1, y = 0$  (B) 若 $x = a, y = 1$   
(C) 若 $x = -1, y$ 是虚数(复数)  
(D) 若 $0 < x < 1, y$ 常小于 0,且当 $x$ 趋近于 0 时,无限制减小  
(E) 上述诸叙述中只有某些是正确的
38. 若 $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$ 表示 $ab - cd$ 的值(对于所有的 $a, b, c$ 与 $d$ 的值而言),则方程式 $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 3$  ( ).  
(A)  $x$ 为 1 可满足  
(B)  $x$ 为 $\frac{3}{2}$ 或 $-1$ 可满足  
(C) 无 $x$ 的值可满足

(D)有无穷的  $x$  值可满足

(E)非上述答案

39. 已知级数  $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ , 并有下列叙述:

①此和无限制增大;

②此和无限制减小;

③序列中的任何项与 0 之间的差可以使之小于无论怎样小的任何正量;

④此和与 4 之间的差, 可以使之小于无论怎样小的任何正量;

⑤此和趋于一极限.

在这些叙述中, 正确的为( ).

(A)只有③与④ (B)只有⑤

(C)只有②与④ (D)只有②, ③与④

(E)只有④与⑤

40. 当  $x$  趋近于 1 且为极限时,  $\frac{x^2-1}{x-1}$  的极限为( ).

(A)0 (B)不定 (C) $x-1$  (D)2

(E)1

41. 函数  $ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 的最小值是( ).

(A)  $-\frac{b}{a}$  (B)  $-\frac{b}{2a}$  (C)  $b^2 - 4ac$  (D)  $\frac{4ac - b^2}{4a}$

(E)非上述答案

42. 满足等式  $x^{x^{\dots}} = 2$  的  $x$  为( ).

(A)无穷大 (B)2 (C) $4\sqrt{2}$  (D) $\sqrt{2}$

(E)非上述答案

43.  $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \dots$  的值为( ).

(A)  $\frac{1}{5}$       (B)  $\frac{1}{24}$       (C)  $\frac{5}{48}$       (D)  $\frac{1}{16}$

(E) 非上述答案

44.  $y = \lg x$  的图像( ).

(A) 与  $y$  轴相交

(B) 与所有跟  $x$  轴正交的直线相交

(C) 与  $x$  轴相交

(D) 不与坐标轴相交

(E) 与以原点为中心的所有圆相交

45. 100 边形可作的对角线数是( ).

(A) 4 850    (B) 4 950    (C) 9 900    (D) 98

(E) 8 800

46. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 12, AC = 7, BC = 10$ . 当边  $AB, AC$  的长均增加一倍, 而  $BC$  的长不变时, 则三角形的( ).

(A) 面积变两倍      (B) 高变两倍

(C) 面积变四倍      (D) 中线不变

(E) 面积变为 0

47. 一个矩形内接于一个三角形中, 其一底与三角形的底边  $b$  重合. 若三角形的高为  $h$ , 而矩形的高  $x$  为其底的一半时, 则( ).

(A)  $x = \frac{1}{2}h$       (B)  $x = \frac{bh}{h+b}$

(C)  $x = \frac{bh}{2h+b}$       (D)  $x = \sqrt{\frac{hb}{2}}$

(E)  $x = \frac{1}{2}b$

48. 在等边三角形内任取一点, 由该点至三边作垂直线段, 这些垂直线段长之和( ).



- (A) 当此点为此三角形的重心时, 最小  
 (B) 大于此三角形的高  
 (C) 等于此三角形的高  
 (D) 等于此三角形三边之和的一半  
 (E) 当此点为此三角形的重心时, 最大
49. 一个三角形有长为2的固定底 $AB$ , 自 $A$ 作 $BC$ 的中线, 其长为 $1\frac{1}{2}$ , 但位置可变, 则此三角形的顶点 $C$ 的轨迹是( ).
- (A) 直线 $AB$ , 自 $A$ 的长为 $1\frac{1}{2}$   
 (B) 一圆, 以 $A$ 为中心, 半径为2  
 (C) 一圆, 以 $A$ 为中心, 半径为3  
 (D) 一圆, 半径为3, 且中心在 $AB$ 上, 距 $B$ 为4  
 (E) 一椭圆, 以 $A$ 为焦点
50. 一条私掠船在顺风方向10 km处发现一商船, 其时间正为11:45, 私掠船每小时可航行11 km, 至于商船却只能以8 km/h的速度使劲逃跑. 经过两小时的追逐, 私掠船的顶帆失去效用. 当此之时, 商船能行驶15 km, 私掠船却只能行驶17 km而已. 如此, 私掠船追及商船的时间应在( ).
- (A) 下午3:45            (B) 下午3:30  
 (C) 下午5:00            (D) 下午2:45  
 (E) 下午5:30

#### 4 答 案

1. (C) 2. (D) 3. (E) 4. (A) 5. (A) 6. (C)



7. (B) 8. (C) 9. (A) 10. (D) 11. (B)  
12. (C) 13. (D) 14. (D) 15. (E) 16. (B)  
17. (C) 18. (E) 19. (C) 20. (D) 21. (B)  
22. (D) 23. (B) 24. (E) 25. (D) 26. (E)  
27. (B) 28. (B) 29. (B) 30. (A) 31. (C)  
32. (D) 33. (D) 34. (D) 35. (B) 36. (A)  
37. (E) 38. (B) 39. (E) 40. (D) 41. (D)  
42. (D) 43. (E) 44. (C) 45. (A) 46. (E)  
47. (C) 48. (C) 49. (D) 50. (E)

## 5 1950年试题解答

1. 数64分成2,4与6之比,即

$$2x + 4x + 6x = 64$$

所以

$$x = 5 \frac{1}{2}, 2x = 10 \frac{2}{3}$$

答案:(C).

2. 当 $S=8$ 时, $R=16$ ,则可计算出 $g$ .

$$\text{所以 } 16 = 8 \cdot g - 4, \text{ 故 } g = \frac{5}{2}.$$

$$\text{当 } S=10 \text{ 时, } g = \frac{5}{2}, \text{ 所以 } R = 10 \times \frac{5}{2} - 4 = 21.$$

答案:(D).

3. 方程式按降幂可写成 $4x^2 - 8x + 5 = 0$ ,由根与系数的关系知道两根之和为一次项的系数与二次项的系数的比的相反数,即 $-\left(\frac{-8}{4}\right) = 2$ .

