GAODENG SHUXUE

高等数学

（下）

主　编／王　凯　罗永超　杨　娟

副主编／李光辉　叶绪国

西南交通大学出版社

高等数学

（下）

主　编　王　凯　罗永超　杨　娟
副主编　李光辉　叶绪国

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下 / 王凯，罗永超，杨娟主编. —成都：西南交通大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-5643-3528-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②罗… ③杨… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 252346 号

高等数学（下）

王 凯 罗永超 杨 娟 主编

责任编辑 孟秀芝
封面设计 墨创文化

出版 发行 西南交通大学出版社
网址 http://www.xnjdcbs.com
地址 四川省成都市金牛区交大路146号
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533

印张 14　字数 348千
成品尺寸 185 mm × 260 mm
版本 2015年1月第1版
印次 2015年1月第1次
印刷 四川嘉乐印务有限公司

书号：ISBN 978-7-5643-3528-1
定价：28.00元

课件咨询电话：028-87600533

凯里学院规划教材编委会

总　序

教材建设是高校教学内涵建设的一项重要工作，是体现教学内容和教学方法的知识载体，是提高人才培养质量的重要条件。凯里学院 2006 年升本以来，十分重视教材建设工作，在教材选用上明确要求“本科教材必须使用国家规划教材、教育部推荐教材和面向 21 世纪课程教材”，从而保证了教材质量，为提高教学质量、规范教学管理奠定了良好基础。但在使用的过程中逐渐发现，这类适用于研究型本科院校使用的系列教材，多数内容较深、难度较大，不一定适合我校的学生使用，与应用型人才培养目标也不完全切合，从而制约了应用型人才的培养质量。因此，探索和建设适合应用型人才培养体系的校本教材、特色教材成为我校教材建设的迫切任务。自 2008 年起，学校开始了校本特色教材开发的探索与尝试，首批资助出版了 11 本原生态民族文化特色课程丛书，主要有《黔东南州情》、《苗侗文化概论》、《苗族法制史》、《苗族民间诗歌》、《黔东南民族民间体育》、《黔东南民族民间音乐概论》、《黔东南方言学导论》、《苗侗民间工艺美术》、《苗侗服饰及蜡染艺术》等。该校本特色教材丛书的出版，弥补了我校在校本教材建设上的空白，为深入开展校本教材建设积累了经验，并对探索保护、传承、弘扬与开发利用原生态民族文化，推进民族民间文化进课堂做出了积极贡献，对我校教学、科研和人才培养起到了积极的推动作用，并荣获贵州省高等教育教学成果一等奖。

当前，随着高等教育大众化、国际化的迅猛发展和地方本科院校转型发展的深入推进，越来越多的地方本科高校在明确应用型人才培养目标、办学特色、教学内容和课程体系的框架下，积极探索和建设适用于应用型人才培养的系列教材。在此背景下，根据我校人才培养方案和“十二五”教材建设规划，结合服务地方社会经济发展、民族文化传承需要，我们又启动了第二批校本教材的立项研究工作，通过申报、论证、评审、立项等环节确定了教材建设的选题范围，第二套校本教材建设项目分为基础课类、应用技术类、

素质课类、教材教法等四类，在凯里学院教材建设专家委员会的组织、指导和教材编著者们的辛勤编撰下，目前，15本教材的编撰工作已基本完成，即将正式出版。这套教材丛书既是近年来我校教学内容和课程体系改革的最新成果，反映了学校教学改革的基本方向，也是学校由“重视规模发展”转向“内涵式发展”的一项重大举措。

凯里学院校本规划教材丛书的编辑出版，集中体现了学校探索应用型人才培养的教学建设努力，倾注了编著教师团队成员的大量心血，将有助于推动地方院校提高应用型人才培养质量。然而，由于编写时间紧，加之编著者理论和实践能力水平有限，书中难免存在一些不足和错漏。我们期待在教材使用过程中获得批评意见、改进建议和专家指导，以使之日臻完善。

凯里学院规划教材编委会

2014年12月

前　言

高等数学是理工科专业的必修课、基础理论课. 对理工科专业的学生来说，学好高等数学不仅仅意味着掌握了一种现代科学语言，学到了一种理性的思维模式以及分析、归纳、演绎的方法，更重要的是只有学好高等数学，才能完成后续的专业课，并为后续课程打下坚实的理论与实际操作基础. 通过本课程的学习，学生获得了有关微积分、矢量代数、空间解析几何、无穷级数和常微分方程的基本知识，增加了数学在经济学、物理学、计算机科学中的应用实例，弱化了一些纯数学的理论证明，力求学生掌握必要的理论和常用的运算方法，并能应用这些知识解决一些实际问题.

通过本课程的学习，能够提高学生的数学理解能力，数学运算能力，逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力，一方面为后续课程奠定必要的数学基础，另一方面也使学生能够正确地运用数学知识去解决物理学、化学、生物学、计算机科学、经济学中的实际问题. 将高等数学的知识和方法更好地应用到相关专业的学习中.

目前国内高校高等数学教材众多，且各具特色. 通过多年的教学实践发现，对于地方高校而言，不论使用什么教材，在学生学习效果方面并不理想. 很多学生感到“听起来难，学起来更难，用起来则难上加难”，这也许就是多年来很多学子心中的不解之愁，也是数学教育和数学课程改革不可回避的问题.

为解决这个问题，也是为了更好地满足我国地方高校培养应用型人才的需求，真正体现“数学为本”的特点，我们通过多年的经验总结，几经波折、反复修改后，编写完成了这部《高等数学》教材.

本教材具有以下特点：

（1）考虑到地方高校学习对象的状况及特点，贴近学生，教材每一章的开头部分都引用了著名数学家与本章内容相关的哲理名言，因为高等数学的主要内容微积分就是从辩证唯物主义的观点去看待事物的，所以很多数学家也是哲学家.

（2）教材每一章的结尾部分编写了相关的数学史内容，学习相关数学史的内容不仅让学生系统掌握了数学的基本思想方法与相关数学问题的来源，而且让学生领会到数学家们为解决问题坚持不懈和刻苦钻研的精神，并将这种精神贯穿于高等数学的学习中及事业的追求中.

（3）教材每章后面的习题都分为两部分，A 部分为客观题，B 部分为主观题，编写的顺序是根据题目的难易程度编排的. 学习数学就是为了培养理性思维能力和科学的思想方法，因此学好高等数学必须做足够多的习题，而本教材习题的选择，不论是难易程度上还是题目的数量上，都符合地方高校理工科学生的培养计划. 高等数学解题能力的提高不仅为学生学习好相关的专业知识打好基础，同时也为他们将来成功考取硕士研究生、国家公务员等夯实基础.

本教材全书分为上、下册，共分为 12 章. 上册包含函数、极限与连续、导数与微分、中

值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用等内容；下册包含多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数等内容. 为了方便教师拓展教学和方便学生扩大知识面，本书的部分例题和习题选自历年考研真题，以满足学生个性化发展的需要.

在高等数学的学习过程中，应注意以下几点：

（1）各类知识都是在一定的历史过程中形成的. 因此，要在历史发展的长河中考查它的产生、发展、意义及未来. 这就是历史地学习. 建议学习者了解一点数学科学史和一些科学家在计算机和数学领域所做的贡献，以激励我们学习数学的精神.

（2）要从各个不同侧面来理解所学的知识. 用不同的观点，如哲学的、物理的、直觉的甚至常识的观点来解释同一个问题. 学会从正面、反面和各个不同侧面来观察同一个问题. 要通过联想、类比、归纳等方法，将所学的知识编织成一个知识网络，融会贯通，使之发挥它的巨大威力.

（3）学习中注意抓住三个问题：基本概念、基本原理、典型范例. 着重理解概念是如何通过对实际问题的分析和抽象得出的，基本原理反映了概念之间有怎样的关系，典型的例题则体现了如何应用原理. 若能坚持在“复习—学习新知识—练习—总结”各个环节中贯彻上述原则，就不难学好这门课.

本教材主要是面向本科院校层次的理工科专业的学生，编者根据多年的教学实践经验和研究成果，结合“高等数学课程教学基本要求”及理工科专业的人才培养目标要求编写而成. 本书可作为高等院校、独立学院以及具有较高要求的成教学院等本科院校非数学专业的数学基础课教材.

教材的编写积累了多位教师多年来的教学经验与学术成果，但由于编者水平有限，不当之处在所难免，恳请广大教师和学生提出宝贵的意见，我们将进一步改进.

作　者

2014 年 8 月

目 录

几何看来有时候要领先于分析，但事实上，几何的先行于分析，只不过像一个仆人走在主人的前面一样，是为主人开路的.

——西尔维斯特

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数

一、多元函数

前面几章我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数叫作一元函数. 但在研讨实际问题时，经常涉及一个量与多个量之间的依赖关系，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形，这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 为此，除了研究一元函数以外，我们还有必要研究多元函数.

定义 1　设 D 是平面上的一个点集，f 是一个对应法则，如果对于 D 中每个点 $P(x,y)$，都可按法则 f 对应唯一一个实数 z，则称 f 为定义在 D 上的二元函数，通常称 z 是点 P 的函数，或称 z 是 x 、y 的二元函数，并称对应法则 f 为函数关系或者函数. 记为

$$z=f(P),\quad P\in D$$

或

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

称 D 为函数 f 的定义域，x 、y 称为自变量，z 称为因变量，集合 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 为值域.

由全体 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 构成的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维空间. 称 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为空间中的点. 设 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，称 $|PQ|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$ 为点 P 与 Q 之间的距离. 称 $U(P,r)=\{Q\in\mathbf{R}^n\mid |PQ|<r\}$ 为点 P 的以 r 为半径的邻域，$\mathring{U}(P,r)=\{Q\in\mathbf{R}^n\,|\,0<|PQ|<r\}=U(P,r)/\{P\}$ 为点 P 的去心邻域. 设 D 为 n 维空间的一个点集，仿上可定义 D 上的 n 元函数：

$$z=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

二元及二元以上的函数统称为多元函数.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间上就确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 上的一切点时，得到一个空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$，这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形，通常也说二元函数的图形是一张曲面.

例如，函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面，而函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面.

例 1 $z=2x+y$ 是一个二元函数，其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x,y\in(-\infty,+\infty)\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，该函数的图像是一张平面.

例 2 设长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，则其体积 $V=xyz$ 为三元函数，定义域为 $\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$.

例 3 求 $z=\ln(1-x-y)+\ln(y-2x^2)$ 的定义域 D，并在平面中画出 D.

解 因为对数函数的真数必须大于 0，所以

$$\begin{cases}1-x-y>0\\ y-2x^2>0\end{cases}$$

因此 $$D=\{(x,y)\mid x+y<1,\ y>2x^2\}$$

D 在直线 $y=1-x$ 的下方、抛物线 $y=2x^2$ 的上方（见图 8-1），是一个有界区域.

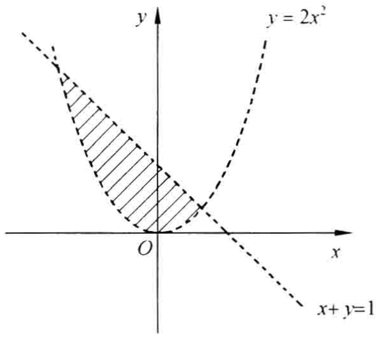

图 8-1

注意 在本例中，若将两不等式相加得 $1-x-2x^2>0$，进而得 $-1<x<1/2$，据此认为定义域为 $-1<x<1/2$ 就错了.

例 4 已知 $f(x+y,x-y)=4xy$，求 $f(x,y)$.

解 对任意的实数 u、v，令 $\begin{cases}x+y=u\\ x-y=v\end{cases}$，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(u+v)\\ y=\dfrac{1}{2}(u-v)\end{cases}$$

从而 $$f(u,v)=4\cdot\frac{1}{2}(u+v)\cdot\frac{1}{2}(u-v)=u^2-v^2$$

所以 $$f(x,y)=x^2-y^2$$

二、多元函数的极限

若当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时，二元函数 $f(x,y)$ 的值可任意接近一个常数 A，就说 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时有极限 A. 其数学定义为：

定义 2 $f(P)=f(x,y)$ 定义在区域 D 上，A 为一个常数，$P_0(x_0,y_0)$ 为一定点，若对任意的正数 ε（不论它多么小），总存在 $\delta>0$，使得对任意的 $P(x,y)\in\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时（即 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时），都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或者 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，或者 $f(x,y)\to A$（当 $P\to P_0$ 时）.

例 5　证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x+2y)=4$.

证
$$\left|(x+2y)-4\right|=\left|(x-2)+2(y-1)\right|\leqslant|x-2|+2|y-1|$$

因为

$$|x-2|\leqslant\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\,,\ |y-1|\leqslant\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

所以

$$\begin{aligned}|(x+2y)-4|&\leqslant\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\ +2\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\\&=3\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\end{aligned}$$

这样，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，则当 $0<\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}<\delta$ 时有

$$|(x+2y)-4|\leqslant 3\delta=\varepsilon$$

因此
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}(x+2y)=4$$

注意　$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 是指不论点 $P\in D$ 以什么方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$（即不论 P 是沿直线还是沿曲线，还是沿任意方向趋于 P_0），$f(x,y)$ 的值总是接近常数 A，因此，若有两条趋于 P_0 的曲线，当 P 沿这两条曲线趋于 P_0 时，$f(P)$ 不能接近同一个数 A，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在.

例 6　设 $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$，证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

证（1）当 (x,y) 沿直线 $x=0$，即 y 轴趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y}=0$$

（2）当 (x,y) 沿直线 $y=0$，即 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x}{x+0}=1$$

所以 f 沿上述两条路径的极限不一样，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

注意　一般我们可以检查沿过 P_0 的直线路径 L，是否有 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in L}} f(P)$ 相同，若不相同，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在. 如在上例中，当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+kx}=\frac{1}{1+k}$$

与 k 有关，说明极限与路径有关，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

特别要注意，若相同，并不能保证 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ 存在，当然也不能保证 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ 不存在.

计算一元函数极限的方法，大多可以平移过来使用，如极限的四则运算法则、复合函数极限定理(变量替换)、夹逼准则、有界量与无穷小之积仍为无穷小等，但洛必达法则不能. 例如 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{x}{x^2+y^2}=0$，这是因为 x^2+y^2 是无穷小，而 $\sin\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 有界.

n 元函数的极限的定义与二元函数的完全类似，请读者自己给出.

三、多元函数的连续性

定义 3 设函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 的某一领域内有定义，若 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)=f(P_0)$，称函数 f 在 P_0 连续，否则称 f 在 P_0 间断. 若 f 在 D 中的每一点都连续，称 f 在 D 上连续.

与一元函数一样，可以证明多元连续函数的四则运算（分母不为 0）以及复合后的函数还是连续函数. 又由于在一元微积分中已经证明基本初等函数在其定义区间上连续，所以一切初等函数在其定义区域内都连续.

例 7 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x}{x+2y}$.

解 因为 $\dfrac{x}{x+2y}$ 为初等函数，且点 $(0,1)$ 在其定义域内，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x}{x+2y}=\frac{0}{0+2\times1}=0$$

例 8 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin(xy)}$.

分析 $u=xy$ 是初等函数，所以 $u\to0$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(xy)}=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{\sin u}$$

已经转化为一个一元函数的极限. 可以用任何有关一元函数求极限的方法来进一步求之，包括洛必达法则.

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(xy)}=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{\sin u}=\lim_{u\to0}\frac{u}{u}=1$$

注意 上例用到以下结果：当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$.

想一想，为什么例 8 不能直接进行代值求极限?

在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质：

若 $f(P)$ 是有界闭区域上的连续函数，则 f 存在最大值、最小值，进而 f 有界；f 可以取到任何两个函数值之间的任何值，特别地，若存在 P_1，P_2 使得 $f(P_1)<0$，$f(P_2)>0$，则一定存在 P_0 使得 $f(P_0)=0$.

第二节　偏导数

一、偏导数的概念

为了研究多元函数 $z=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的性质，我们采用两个思路：一是让每个自变量都变化，如函数的极限、函数的连续性就是此思路；二是只让一个变量变化，而让其他变量暂时不变，去讨论函数关于这个变量的变化特性，以下将讨论的偏导数就是这个思路. 例如，在经济学中，某商品的销售量与该商品的定价 P 和另一同类商品的定价 Q 有关，我们可以研究在同类商品定价 Q 一定的条件下，本商品的定价 P 对销售量的影响，也可以研究在本商品定价 P 一定的条件下，同类商品的定价 Q 对销售量的影响. 按此思路，我们给出偏导数的概念.

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，如果固定 y 为常数 y_0 后，关于 x 的一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处可导，即极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在，则称此极限为 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于变量 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ z'_x(x_0,y_0),\ z_x(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ f'_x(x_0,y_0),\ f_x(x_0,y_0)$$

相仿可定义 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于变量 y 的偏导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$$

其中字母 ∂ 是 Δ 、δ 的古体，读作“德尔塔”.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在某区域内的每一点 (x,y) 处都存在 $f'_x(x,y)$，则这些偏导数是 (x,y) 的函数，称之为偏导函数，简称为偏导数.

从定义看出，计算偏导数 $f'_x(x,y)$ 时，只需要将除 x 以外的自变量（此处为 y）看成常量对 x 求导即可.

例 1　$z=x^y\ (x>0)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　将 y 看成常量时，$z=x^y$ 为变量 x 的幂函数，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$；

将 x 看成常量时，$z=x^y$ 为变量 y 的指数函数，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

对于多元函数，可以仿上，将除某变量（如 x）以外的自变量全部看成常量，而后对此变量 x 求得的导数，称为多元函数对此变量的偏导数.

例 2　$f(x,y,z)=x+xy+xyz$，求 $f'_x(0,1,2)$，$f'_y(0,1,2)$，$f'_z(0,1,2)$.

解

$$f'_x(x,y,z)=1+y+yz\Rightarrow f'_x(0,1,2)=1+1+1\times 2=4$$

$$f'_y(x,y,z)=x+xz \Rightarrow f'_y(0,1,2)=0+0=0$$

$$f'_z(x,y,z)=xy \Rightarrow f'_z(0,1,2)=0$$

求函数在某定点的偏导数，通常有两个办法，一是如例 2 先求出偏导函数，再代入此点的值；二是先将求导变量以外的自变量代值再关于求导变量求导，而后把所求自变量的值代入．对例 2 也可如下求解．

因为 $$f(x,1,2)=x+x+2x=4x$$

所以 $$f'_x(x,1,2)=4,\quad f'_x(0,1,2)=4$$

而 $$f(0,y,2)=0$$

所以 $$f'_y(0,1,2)=0,\quad f'_z(0,1,2)=0$$

此外，还可以直接用定义求偏导，尤其是分段函数在分段点处求偏导．

对于一元函数，可导必定连续．但对于二元（多元）函数 $f(x,y)$，即使在点 (x_0,y_0) 处关于各个变量的偏导都存在，也不能保证 f 在 (x_0,y_0) 连续．它只能保证所谓的“偏连续性”，即 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 连续，$f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$ 处连续．当然，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续也不能保证在此点可偏导．

二、高阶偏导数

前面提到 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 都仍为 x，y 的函数，所以对它们还可以关于各个变量求偏导，若它们的偏导数还存在，称其为 f 的二阶偏导．

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 关于 x 的偏导 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ 记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，称其为 f 关于 x 的二阶偏导数．$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 关于 y 的偏导 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ 记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，称其为 f 的混合二阶偏导．同理有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$．我们看到按照求导的次序不同，二元函数 $f(x,y)$ 共有 4 个二阶偏导数，也可以把它们分别记为 f''_{xx}，f''_{xy}，f''_{yx}，f''_{yy} 或者 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} 等．

可以证明，若两个混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 都连续，则它们必然相等，即 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$．

例 3 求 $z=x^2+4xy+\cos y$ 的全部二阶偏导数．

解 $$z_x=2x+4y,\quad z_y=4x-\sin y$$

$$z_{xx}=2,\quad z_{xy}=4,\quad z_{yx}=4,\quad z_{yy}=-\cos y$$

例 4 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$．

证 因为 $$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
因此
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

第三节　全微分

我们常常要研究当自变量改变时相应函数值的变化情况. 如对于二元函数 $z=f(x,y)$，当 y 不变，x 改变 Δx 后，z 将随之改变：
$$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$
当 x 不变，y 改变 Δy 后，z 将随之改变：
$$\Delta z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$
当 x 改变 Δx，y 改变 Δy 后，z 将随之改变：
$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

前两式分别称为二元函数关于 x，y 的偏增量，第三式称之为全增量.

和一元函数一样，我们关心能否用 Δx，Δy 的线性函数来近似全增量
$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$
从而引入如下定义：

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，如果存在与 Δx，Δy 无关而仅与 x、y 有关的常数 A，B，使得
$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$
则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记作 $\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f$，即 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$. 当 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内处处可微分时，称函数在 D 内可微分，有时简称可微.

从定义可得，若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，有
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0$$
即
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$$
也即 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续.

定理 1（可微的必要条件）　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则在该点处 f 的各个偏