《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

法雷级数

——从华罗庚对一道陕西省数学竞赛试题的点评谈起

佩捷 编

- 利用法雷数列证明孙子定理
- 法雷序列的符号动力学
- 连分数和法雷表示
- 提升为非单调的圆映射
- 周期性的输入与周期性的输出的关系

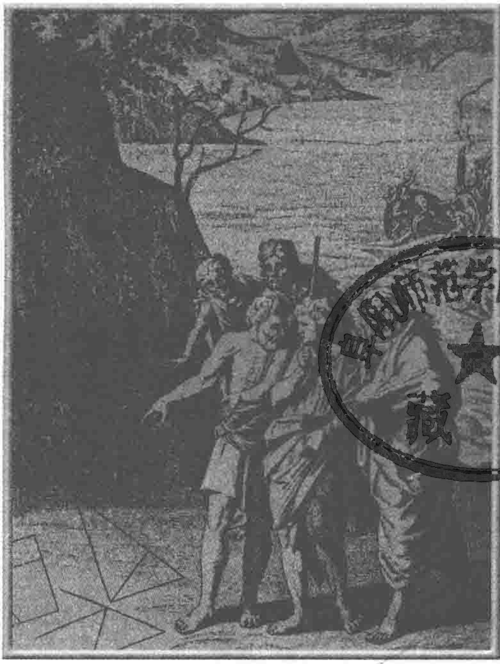
HITP
哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE O

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

法雷级数

——从华罗庚对一道陕西省数学竞赛试题的点评谈起

佩捷 编



◎ 利用法雷数列证明孙子定理

◎ 法雷序列的符号动力学

◎ 连分数和法雷表示

◎ 提升为非单调的圆映射

◎ 周期性的输入与周期性的输出的关系

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从 1978 年陕西省中学生数学竞赛中的一道试题引出法雷数列. 全文主要介绍了利用法雷数列证明孙子定理、法雷序列的符号动力学、连分数和法雷表示、提升为非单调的圆映射、利用法雷数列证明一个积分不等式等问题. 全书共七章,读者可全面地了解法雷级数在数学中以及在生产生活中的应用.

本书适合数学专业的本科生和研究生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

法雷级数:从华罗庚对一道陕西省数学竞赛试题的点评谈起/佩捷编. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.8

ISBN 978 - 7 - 5603 - 4863 - 6

Ⅰ. ①法… Ⅱ. ①佩… Ⅲ. ①级数 - 研究 Ⅳ. ①O173

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182619 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 关虹玲
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451 - 86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm × 960mm 1/16 印张 9 字数 89 千字
版　　次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 4863 - 6
定　　价 18.00 元

◎目录

引　言

第 0 章

在 1978 年陕西省中学生数学竞赛中有如下试题：

$\frac{p_1}{q_1}$和$\frac{p_2}{q_2}$为两个正分数，$\frac{q_1}{p_1}<\frac{q_2}{p_2}$，试证：$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}<\frac{p_2}{q_2}$.

由于那次竞赛是经国务院批准，教育部和全国科协联合举办的，全国共有八个省、市参加，而且是"文化大革命"后第一届中学生数学竞赛，所以数学界特别重视. 在赛后出版的《试题解答》一书中，华罗庚先生亲自撰写了前言，使广大中学师生了解了试题的背景，本题即是其中一例. 看似平凡的分数问题其后的背景实则为法雷(Farey)贯即法雷数列. 华罗庚指出：陕西试题告诉我们，如果$\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_2}{q_2}$为两个正分数，则$\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$总是介于这两个分数之

间. 在所谓法雷贯的问题中就用到了这一原则. 现要把分子、分母互素,且分母小于等于 n 的所有分数按从小到大的次序排出来. 方法是这样的:在 $0\left(=\frac{0}{1}\right)$ 和 $1\left(=\frac{1}{1}\right)$ 之间插入中项 $\frac{1}{2}$,再在 $0\left(=\frac{0}{1}\right)$ 与 $\frac{1}{2}$ 之间插入中项 $\frac{1}{3}$,$\frac{1}{2}$ 与 1 之间插入中项 $\frac{2}{3}$,这样不断地在相邻两数之间插入中项,直到所有相邻分母之和都大于 n 时为止,这样就得到了 n 阶法雷贯.

关于一道“希望杯”竞赛试题的新解法.

第九届“希望杯”竞赛初二试卷中的第 21 题,我们利用法雷数列也可给出不同于标准答案的新解法.

例 1 已知 n,k 均为自然数,且满足不等式 $\frac{7}{13}<\frac{n}{n+k}<\frac{6}{11}$. 若对于某一给定的自然数 n,只有唯一的自然数 k 使不等式成立,求所有符合要求的自然数 n 中的最大数和最小数.

解 由

$$\frac{7}{13}<\frac{n}{n+k}<\frac{6}{11}\Rightarrow\frac{13}{7}>\frac{n+k}{n}>\frac{11}{6}\Rightarrow\frac{6}{7}>\frac{k}{n}>\frac{5}{6}\quad(1)$$

我们考察一般情形

$$\frac{a}{a+1}>\frac{k}{n}>\frac{a-1}{a},a\in\mathbf{N}$$

$$\frac{a}{a+1}=\frac{a(2a+1)}{(a+1)(2a+1)}=\frac{2a^2+a}{(a+1)(2a+1)}$$

$$>\frac{2a^2+a-1}{(a+1)(2a+1)}=\frac{2a-1}{2a+1}$$

$$\frac{a-1}{a}=\frac{(a-1)(2a+1)}{a(2a+1)}=\frac{2a^2-a-1}{a(2a+1)}$$

$$< \frac{2a^2-a}{a(2a+1)}=\frac{2a-1}{2a+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+1} > \frac{2a-1}{2a+1} > \frac{a-1}{a} \Rightarrow \frac{k}{n}=\frac{2a-1}{2a+1}$$

将 $a=6$ 代入得 $n=13,k=11$.

因为 $$(2a+1,2a+1)=1$$

所以 $$k=\frac{(2a-1)n}{2a+1}\in \mathbf{N}$$

ⅰ)当且仅当 $(2a+1)\mid n$,即 $n=13m(m\in \mathbf{N})$ 时,$k\in \mathbf{N}$,故 $\min n=13$.

ⅱ)由式(1)$\Rightarrow 35n<42k<36n$.

故由已知,在 $(35n,36n)$ 中仅存在一个 $k\in \mathbf{N}$,$(35n,36n)$ 中仅有 $n-1$ 个整数.

故 $n-1<2\times 42\Rightarrow n<85\Rightarrow n\leqslant 84\Rightarrow k=7$,所以 $\max n=84$.

综合ⅰ)和ⅱ)可知 $\min n=13,\max n=84$.

注 此题的背景为法雷数列,n 级法雷数列是指0与1之间的诸多既约分数,它满足分母小于等于 n,其次序依其大小排列. 换句话说,即依大小排列的形如 $\frac{a}{b}$,$(a,b)=1,0\leqslant a\leqslant b\leqslant n$ 的诸多分数,我们用 F_n 记法雷数列. F_7 中含有 $\frac{5}{6},\frac{6}{7}$ 且为相邻的两项,对于法雷数列有如下定理:

设 $\frac{a}{b}<\frac{a''}{b''}<\frac{a'}{b'}$ 为法雷数列中相邻的三项,则有 $\frac{a''}{b''}=\frac{a+a'}{b+b'}$,这正是ⅰ)的证法来源.

在第29届IMO上,苏联所提供的备选题中的第4题是:

例 2 将所有使得分子和分母的乘积小于 1 988 的既约正有理数按递增顺序排成一行. 证明:任意两个相邻分数$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$都满足等式

$$bc-ad=1$$

非常有趣的是,在第 35 届 MMO(1972)第二试十年级的试题中,也曾经有过一道非常类似的题目:

例 3 我们来考察 0 和 1 之间的所有分母不超过 n 的分数,将它们按递增顺序列出,并且都写成既约形式. 设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$是其中任意两个相邻的数字,证明

$$|bc-ad|=1$$

对例 3 可用数学归纳法解答. 对例 2 亦应将 1 988 "活化"为 n,并用数学归纳法证明更为一般的结论,即对"所有分子和分母的乘积小于 n 的既约正有理数",例 2 的结论都成立. 两例的解答极为相似,下面仅以例 3 为例.

我们知道,如果$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$是两个既约分数,则有$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$,且$\frac{a+c}{b+d}$是夹在它们之间的分母最小的分数. 这一事实将在以下的证明中用到.

当 $n=1$ 时,有$\frac{0}{1}<\frac{1}{1}$,知命题成立.

假设当 $n=k$ 时,对于任意两个相邻的既约分数$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,都有 $bc-ad=1$. 我们来证明:当 $n=k+1$ 时,相应的结论仍然成立. 分两种情形考虑:

(1)设$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$在 $n=k$ 时相邻,在 $n=k+1$ 时仍相

邻，则显然结论成立；

(2) 设$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$在 $n=k$ 时相邻，而在 $n=k+1$ 时不再相邻，即有$\frac{a}{b}<\frac{p}{q}<\frac{c}{d}$，我们要来证明

$$A=bp-aq=1, B=cq-pd=1$$

首先易知 A 和 B 都是正整数，即有 $A\geqslant 1, B\geqslant 1$，如果 $\max(A,B)>1$，则有

$$\begin{aligned} b+d<Bb+Ad &= bcq-bdp+bdp-adq \\ &= q \end{aligned}$$

而因$\frac{p}{q}$已是既约分数，因此

$$\frac{a+c}{b+d}\neq\frac{p}{q}$$

由此即知，$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$在 $n=k$ 时并不相邻，导致矛盾. 故知应有 $A=1$ 且 $B=1$.

对例 2 的证明可以完全类似地进行.

引理 1　设$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2}$为 F_n 中相邻两项，则必有 $b_1+b_2\geqslant n+1$. 若$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$，则 $b_1a_2-a_1b_2=1$.

证明　因为 $(a_1,b_1)=1$，故存在 $x,y\in\mathbf{Z}$，使

$$b_1x-a_1y=1, n-b_1<y\leqslant n \tag{2}$$

由此可知，$y>0$，$(x,y)=1$，$\frac{x}{y}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{1}{b_1y}>\frac{a_1}{b_1}$.

往下只需证

$$\frac{x}{y}=\frac{a_2}{b_2} \tag{*}$$

因为若能证明此式，则 $x=a_2, y=b_2, b_1a_2-a_1b_2=1$，且 $b_1+b_2>n$.

假设式（*）不成立，即$\frac{x}{y}\neq\frac{a_2}{b_2}$，则

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{x}{y}$$

由此可知

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}-\frac{a_1}{b_1}&=\frac{x}{y}-\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\\&\geqslant\frac{1}{b_2y}+\frac{1}{b_1b_2}=\frac{b_1+y}{yb_1b_2}>\frac{n}{yb_1b_2}\geqslant\frac{1}{by}\end{aligned}$$

但由式(2)知，$\frac{x}{y}-\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{by}$矛盾，故引理 1 正确.

推广 设$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_3}{b_3}$为法雷数列三邻项，则$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+a_3}{b_1+b_3}$

由引理 1 知

$$a_2b_1-b_2a_1=1$$
$$a_3b_2-b_3a_2=1$$

将上两式相减，可得

$$a_2(b_1+b_3)-b_2(a_1+a_3)=0$$

故
$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+a_3}{b_1+b_3}$$

第1章 利用法雷数列证明孙子定理

孙子定理反映了我国古代在解同余式方面所取得的光辉的研究成果，因而驰名中外，在欧洲的数学史书中被称为“中国剩余定理”.

为了证明孙子定理的需要，我们先证明下面的引理.

引理1 设 a 和 b 是两个互素的正整数，则必存在整数 x 和 y，使得

$$ax+by=1$$

先叙述法雷数列和它的表.

所有的既约分数可用表1中的一系列的行来写出，各行均从 $\frac{0}{1}$ 开始，而以 $\frac{1}{1}$ 终止，其间的分数自左至右按递增的顺序排列. 第 n 行的真分数是由所有分母小于或等于 n 的真分数组成，称之为 n 阶法雷数列.

表 1

F_1	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{1}$
F_7	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{1}{1}$
	⋮

由于 a 和 b 是互素的正整数，故 $a\neq b$. 不妨设 $a<b$，于是 $\frac{a}{b}$ 是一个既约的真分数，从而必出现在表 1 中的至少一行里. 假定 $\frac{c}{d}$ 是 F_n 中紧随 $\frac{a}{b}$ 之后的分数，则取 $x=-d,y=c$，即有

$$ax+by=bc-ad$$

因此，要证明引理 1，只需证明

$$bc-ad=1 \tag{1}$$

为证明式(1)，在平面上取定一个直角坐标系，并将所有的格点(坐标都是整数的点)分为两类：一类是那些能在原点处看见的点，如图 1 中的点(2，1)，称为可见点；另一类是那些前面有障碍而在原点处看

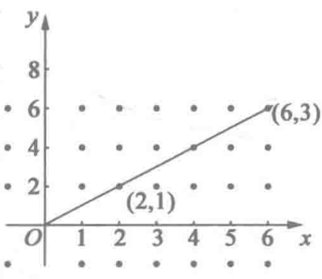


图 1

不见的点，如图 1 中的点(6,3)，称为非可见点.

容易看出，坐标有公因子 $m>1$ 的点 (ma,mb) 被点 (a,b) 挡着，因而可见点的坐标是互素的. 下面我们来证明它的逆命题：若 a 与 b 是互素的数，则点 (a,b) 是可见点.

因为在坐标轴上的可见点与非可见点是容易找出来的，所以我们只考虑非零整数 a 与 b. 现在假定 a 与 b 是互素的，但点 $P(a,b)$ 被点 $Q(c,d)$ 所挡(图 2).

由相似三角形定理可得

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

因为点 Q 比点 P 更接近原点，且点 P 不在 y 轴上，故 c 的绝对值小于 a 的绝对值. 同样，d 的绝对值小于 b 的绝对值. 但 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，故 $\frac{a}{b}$ 可以约简，这与 a,b 互素的假定矛盾. 这一矛盾引出了我们所要证的结果.

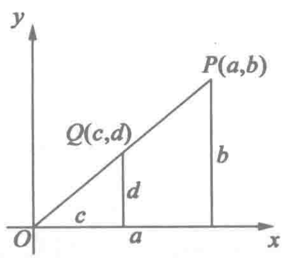


图 2

现将分数 $\frac{a}{b}$ 对应于格点 (a,b)，因为 a,b 互素，故 (a,b) 是可见点. 因为 $\frac{a}{b}$ 属于某个法雷数列，为确定起见，不妨设 $\frac{a}{b}$ 属于 F_4，而 F_4 中的分数为

$$\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}$$

将对应的格点画在图 3 之中. 这些分数中，除 $\frac{1}{1}$ 外，都

是真分数,且 $a \leqslant 3, b \leqslant 4$,所以点$(a,b)$必在以

$O(0,0), A(3,3)$,

$B(3,4), C(0,4)$

为顶点的四边形 R 的内部或边界上.

其次,我们证明在区域 R 中的每个可见点都对应于 F_4 中的某个数.设 $T(u,v)$是 R 中的一个可见点.若 T 在 y 轴上,则 T 必是点$(0,1)$,因而对应于$\frac{0}{1}$,即 F_4 中的第一个数;若 T 在 $y=x$ 上,则 T 必是点$(1,1)$,它对应于 F_4 中的最后一个数;若 T 在 R 的其他地方,则 T 在直线 $y=x$ 上方以及 $y=4$ 的上方或下方,故 $u<v\leqslant 4$;又由于 T 是可见点,故 u 与 v 互素.由此推知,$\frac{u}{v}$是既约真分数,且分母小于或等于 4,所以其必是 F_4 中的分数.

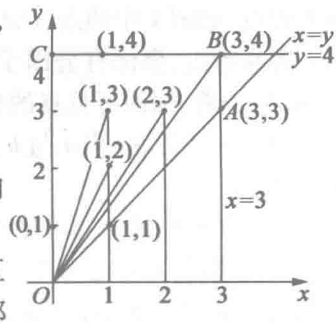


图 3

以上所做的讨论,显然可以从 F_4 推广到 F_n. 这时 F_n 中的数所对应的点都是四边形区域 R 内或边界上的可见点,且 R 内或边界上的可见点所对应的数都是 F_n 中的数,只不过四边形 R 的顶点的坐标分别变为$(0,0),(n-1,n-1),(n-1,n),(0,n)$.

由于$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$是 F_n 中紧邻的两个数,且

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$

因此点 $L(a,b)$ 与 $M(c,d)$ 是 R 中的可见点. 如图 4 所

示,联结 OL,OM,则直线 OL 与 OM 的斜率恰为分数 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的倒数 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{d}{c}$,故有

$$\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$$

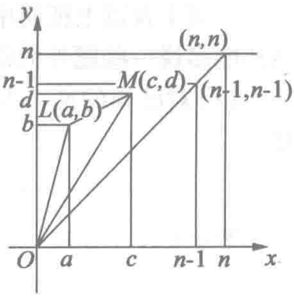


图 4

现在联结原点与 R 中的所有可见点. 由于 F_n 中的数是按递增顺序排列的,因而这些相应直线的斜率是递减的,所以在所有这些连线中,OL 与 OM 仍是紧邻的. 这说明在 $\triangle OLM$ 内部及线段 LM 边上没有 F_n 中的可见点. 显然也不可能有可见点出现在线段 OL 与 OM 上,因为 L 与 M 本身就是可见点. 这样一来,在 $\triangle OLM$ 内部或边上(顶点除外)都没有可见点,从而也没有格点,因为任何非可见点将被一个在 O 与它之间的可见点所遮住. 由此推知,$\triangle OLM$ 是一个本原三角形. 另一方面,因为 OL 的斜率大于 OM 的斜率,故 O,M,L,O 在三角形上出现的顺序与逆时针方向一致. 根据解析几何中公式,得

$$S_{\triangle OLM} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c & d & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(bc - ad)$$

所以
$$\frac{1}{2}(bc - ad) = \frac{1}{2}①$$

即 $bc - ad = 1$. 至此,我们完全证明了式(1).

① 根据"毕克定理"知,此三角形的面积为 $\frac{1}{2}$.

从表 1 及以上证明中，我们对已证明的引理 1，显然还能多说一些题外的话：

(1) 对已知的两个互素的正整数 a 与 b 来说，满足

$$ax+by=1 \tag{2}$$

的整数 x 和 y 不是唯一的. 一方面，因为分数$\frac{a}{b}$一般不只出现在表 1 的某一行中，例如，分数$\frac{2}{5}$至少出现在 F_5，F_6，F_7 各行中. 因此$\frac{a}{b}$所在的任何一行中，与$\frac{a}{b}$紧邻的后一个分数$\frac{c}{d}$的分子 c 与分母的相反数 $-d$ 就可以分别取为 y 与 x.

另一方面，若$\frac{e}{f}$是与$\frac{a}{b}$紧邻的前一个分数，那么$\frac{a}{b}$就是与$\frac{e}{f}$紧邻的后一个分数，根据已经证明的结果，应有

$$af-be=1$$

故又可取 $x=f, y=-e$.

由于表 1 中各行的第一个数都是 0，最后一个数都是 1，而$\frac{a}{b}$是既约真分数，故对每个$\frac{a}{b}$来说，既有与它紧邻的后一个分数，又有与它紧邻的前一个分数，所以至少有两组 x, y 的值满足式(2).

(2) 对于已知的 a 与 b，如何求满足式(2)的 x 与 y？如果手边有法雷数列表 1 时，只要在表中查出分数$\frac{a}{b}$，然后取它的前一个分数或后一个分数，按照上面所