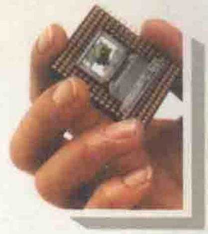
21 世纪高等院校计算机基础教育系列教材



Textbooks for Basic Computer Education of University

线性代数

张万琴 陈荣江 陈付贵 等编著

文化基础系列

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪高等院校计算机基础教育系列教材

线性代数

张万琴　陈荣江　陈付贵　等编著

机械工业出版社

本书是根据高等学校理工科工程数学课程基本要求和高校线性代数课程的教学实践，在原有的《线性代数讲义》和《**Matlab** 实验》教材基础上编写而成的。

全书分 7 章，内容为行列式、矩阵及其运算、向量的线性相关、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换、数学实验等。书末附有习题答案。

本书可作为高等理工院校高等数学和工程数学的教材或参考书，也可供其他相关专业人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/张万琴等编著. —北京：机械工业出版社，2003.7

（21 世纪高等院校计算机基础教育系列教材）

ISBN 7-111-12504-5

Ⅰ.线… Ⅱ.张… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 052025 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

策　　划：胡毓坚

责任编辑：周艳娟

责任印制：路　琳

北京外文印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·13.75 印张·337 千字

0001-5000 册

定价：19.00 元

前　　言

线性代数是高等学校理工科各专业的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，已成为自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具。在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出，高等院校计算机、信息工程、自动控制等专业对线性代数的教学内容从广度和深度上的要求不断提高。本书参照教育部颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求，在总结多年的教学实践经验的基础上编写而成的。

本教材在内容上作了精心的按排。第1章从二阶与三阶行列式讲起，以加强与初等代数教学内容的衔接；第2章选择了少量关于矩阵及其运算的实际内容，使学生容易接受这些概念并能加深对矩阵运算的理解，较早引进矩阵的秩和矩阵的初等变换，为后面章节的讨论带来方便；第3章在讨论了向量组线性相关的基础上引进向量组的秩，为第4章线性方程组的求解奠定了基础；第5章中矩阵相似与二次型是前面内容的应用，其中简要介绍了化矩阵为Jordan标准形的方法；第6章提供了部分可供选学的线性空间的内容；第7章选择了几个源于不同领域的数学模型，从模型的求解过程和数值计算的角度讲，对学生分析实际问题和建立数学模型有重要帮助。

本书的编写着重突出以下特点：① 难点问题从具体模型引入，便于学生接受，增强学生建立数学模型的意识；② 淡化抽象的概念与定理，便于学生自学；③ 把数学实验作为一章，实验模型的建立与求解既突出线性代数的理论和方法，又提高了学生应用软件解决实际问题的能力，实现理论和应用的有机结合；④ 除每节后附有练习外，每章后配有相当数量的综合习题，便于学生复习巩固，提高学习质量，书末附有答案，以便检查练习效果。

全书参考学时为65学时，而对只开设55学时的有关专业，可略去教材中注有“*”的部分章节。注有“*”的习题可选做或根据专业的需要自行删减。针对实验部分，教师可根据需要和课时自行安排，有选择地讲解或穿插到相应章节讲解。

本书第1章由张万琴编写，第2章由白春阳、严洁生编写，第3章及习题答案由陈荣江编写，第4章由陈付贵编写，第5章由李奎龙、郑国杰、马宝林编写，第6章由李文奎、张清业编写，第7章由贾积身编写。全书由张万琴、陈荣江、陈付贵负责统稿，由李文林教授审稿。在本书的编写过程中河南职业技术师范学院数学组的教师给予了很多帮助和支持，在此深表感谢！

由于水平所限，书中难免有不妥之处，欢迎广大师生及同行专家批评指正。

编　者

目 录

第1章　行　列　式

在生产实践和科学研究中，一些变量之间的关系可以直接或近似地表示为线性函数，因此研究线性函数非常重要．线性代数主要研究线性函数，而线性代数中解线性方程组是最基本的内容，行列式是解线性方程组的重要工具，它在数学本身或其他科学分支上（譬如物理学、力学等）都有广泛的应用．在这章主要讨论下面三个问题：

(1) 行列式的概念；

(2) 行列式的基本性质及计算方法；

(3) 利用行列式求解线性方程组．

1.1　逆序与对换

1.1.1　排列与逆序

由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为一个 **n 阶排列．**

例如，1234 及 3241 都是 4 阶排列，436251 是一个 6 阶排列．

定义　在一个 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 前面（$p_i>p_j$），则称 p_i 与 p_j 构成一个**逆序**．一个 n 阶排列中逆序的总数，称为它的**逆序数**，记为

$$N(p_1p_2\cdots p_n)$$

如果排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 $N(p_1p_2\cdots p_n)$ 是奇数（偶数），则称这个排列为**奇排列（偶排列）**．

规定：由 1 至 n 这 n 个自然数按照由小到大的顺序排成一列，这样的排列称为**标准排列**．显然，标准排列的逆序数为零，即为偶排列．

【例 1-1】　求排列 436251 的逆序数，并判断它是奇排列还是偶排列．

解　在排列 436251 中，

4 排在首位，逆序数为 0；

3 的前面比 3 大的数有一个（4），故逆序数为 1；

6 是最大数，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有三个（4、3、6），故逆序数为 3；

5 的前面比 5 大的数有一个（6），故逆序数为 1；

1 的前面比 1 大的数有五个（4、3、6、2、5），故逆序数为 5；

于是排列的逆序数为：$N(436251)=0+1+0+3+1+5=10$，所以 436251 为偶排列．

又如，1、2、3 三个数字可以组成的 3 阶排列共有$3!=3\times2\times1=6$种．其排列情况如下：123，132，213，231，312，321．它们的逆序数分别是 0,1,1,2,2,3．

1.1.2　对换

在排列中，仅将其中任意两个元素对调（其余的元素不动），得到另一个新的排列，这样的变换叫做一个**对换**．将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**．

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,对换 a 与 b,变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然,$a_1$, $\cdots$, a_l; b_1, $\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,而 a, b 两元素的逆序数变化为:当 $a<b$ 时,经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$,把它作 m 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$,再作 $m+1$ 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之,经 $2m+1$ 次相邻对换,排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而标准排列是偶排列(逆序数为 0),因此知推论成立.

定理 2　n 个元素($n>1$)共有 $n!$ 个 n 阶排列,其中奇、偶排列各占一半.

证　n 阶排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$. 设其奇排列为 p 个,偶排列为 q 个,设想将每一个奇排列都施以同一的对换,则由定理 1 可知 p 个奇排列全部变为偶排列,于是有 $p\leqslant q$;同理将全部偶排列也都施以同一对换,则 q 个偶排列全部变为奇排列,于是又有 $q\leqslant p$,从而得 $p=q$,即奇、偶排列数相等,各为 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

习题 1-1

1. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数.

   (1) 1234　　(2) 4132　　(3) 3421　　(4) 2413

   (5) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$

2. 求下列排列的逆序数,并讨论它的奇偶性.

   (1) 315462　　(2) $(n-1)\cdots321$

   (3) $(2n)1(2n-1)2(2n-2)3\cdots(n+1)n$　　(4) $135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$

3. 设排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k,求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

4. 在 $1,2,3,\cdots,n$ 的 n 元排列中,数 1 位于第 k 个位置,求由数 1 构成的逆序数.

5. 选择 i 与 k,使 9 元排列 $217i645k9$ 为偶排列.

1.2　行列式的概念

在初等代数中,我们已学过解二元、三元线性方程组,但是含 n 个未知量的线性方程组该怎样求解呢? n 阶行列式就是根据这个需要产生的. 本节的目的就是要建立 n 阶行列式的概念,解答本章开始提出的第 1 个问题.

人类的认识过程,通常都是由认识个别的事物,逐步扩大到认识一般的事物. 下面我们先从初等代数中已经学过的求解线性方程组开始讲解.

我们先来解含两个未知量 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

这里,b_1,b_2 是**常数项**,a_{ij}叫做 x_j 的**系数**,它有两个下标,第 1 个下标 i 表示它在第 i 个方程中,第 2 个下标 j 表示它是第 j 个未知量的系数.比如,a_{12}就是第一个方程中 x_2 的系数.用消元法,消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同样,消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

因此,当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,我们有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

这就是满足方程组(1-1)的 x_1,x_2,由于消元过程中仅使用了乘法和加法,所以假如方程组(1-1)有解,那末该解就一定是式(1-2);把式(1-2)代入式(1-1)直接验证,知式(1-2)的确是方程组(1-1)的解.这时式(1-2)就是方程组(1-1)的惟一解.

为了便于记忆,我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

并把它叫做**二阶行列式**.它含有两行和两列.横写的叫做**行**,竖写的叫做**列**.行列式中的数又叫做行列式的元素,a_{12}就是在第 1 行、第 2 列上的元素.从上式我们得知,二阶行列式是这样两个项的代数和:一个是从左上角到右下角(又叫做行列式的**主对角线**)两个元素的乘积,取正号,另一个是从右上角到左下角(又叫做行列式的**次对角线**)两个元素的乘积,取负号.例如

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5-(-2)\times 3=11$$

根据定义容易得知,式(1-2)中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是方程组(1-1)的惟一解式(1-2)就可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

像这样用行列式来表示的解,形状简便,容易记忆.

【例 1-2】 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-3y=-2 \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-7$，$D_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-19$

$D_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-11$

因此,所给方程的惟一解是

$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{19}{-7}=\frac{19}{7}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}$$

解三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-3}$$

同上面一样,先从前两式消去 x_3,后两式消去 x_3,得到只含 x_1,x_2 的两个线性方程,再从这两个线性方程中消去 x_2,就得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\&\quad=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

当 x_1 的系数 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时,可以求得

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

类似可得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})\tag{1-4}$$

所以,当 $D\neq 0$ 时,如果式(1-3)有解,就一定是上述惟一形式.

同前面一样,为了便于记忆,我们引进**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\tag{1-5}$$

它含有三行,三列,等于6项的代数和,每项是位于三阶行列式中不同行、不同列的三个元素的乘积,从左上角到右下角的主对角线上三个元素的连乘积取正号,从右上角到左下角的副对角线上三个元素的连乘积取负号.这就是所谓的**对角线法则**.

如三阶行列式

$$A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1$$

$$= 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 6 = 10$$

于是,在上面 x_1, x_2, x_3 的表达式(1-4)中,分母行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而分子行列式 D_1, D_2, D_3,依次是把行列式 D 中第 1,2,3 列分别换成方程组(1-3)的右边常数列得到的,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

因此式(1-4)可以写成简单的表达式

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

它的结构与前面两个未知量的情形类似.

【例 1-3】 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28,\ D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

所以 $x = \frac{13}{28}, y = \frac{47}{28}, z = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$.

代入验证得知这就是所求的解.

有了二阶、三阶行列式,我们就可以把 $D \neq 0$ 时方程组(1-1)及方程组(1-3)的解很简单地表示出来.所以在解 n 个未知量的线性方程组时,自然会想到它的解是否也能用 n 阶行列式来表达?在前面,我们从两个未知量中消去一个非常容易,但从三个未知量中消去两个就较麻烦.因此,我们不能用上面类似的方法来定义 n 阶行列式.那么怎样来解决这个问题?先详细研究二阶,三阶行列式的结构,找出它们的共同规律,根据这些规律来定义 n 阶行列式,然后用它来解 n 个未知量的线性方程组,看是否能达到我们预想的目的.

为了得出 n 阶行列式的定义,我们从三阶列式开始,研究三阶行列式的结构.从三阶行列式(1-5)容易看出:

(1) 式(1-5)右边的每一项都是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行,不同的列.因此,式(1-5)右端的任意项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,这里第一个下标(**称行标**)排成标准排列 123,而第二个下标(**称列标**)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 三个数的某个排列,这样的排列共有 6 种,对应式(1-5)右端共含 6 项。

(2) 各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123，231，312；带负号的三项列标排列是：132，213，321. 经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列，因此各项带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

(3) 因 1，2，3 共有 3! =6 个不同排列，所以式(1-5)右端是 6 个项的代数和.

因此，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，上式表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此，我们可以把行列式的概念推广到 n 阶.

定义 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1-6}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而式(1-6)共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n **阶行列式**，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} **称为行列式** $\det(a_{ij})$ **的元素**.

对于二阶、三阶行列式，此定义与用对角线法则定义是一致的，当 $n=1$ 时，$|a|=a$（注意不要与绝对值记号相混淆）.

【例 1-4】 用行列式定义计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

其中，$a_{12}=a_{14}=a_{21}=a_{23}=a_{32}=a_{43}=a_{44}=1$，其余元素均为零．考察行列式 D 的非零项，第三行和第一列均只有一个非零元素，因此非零项必含有 a_{21}、a_{32}两元素．根据行列式的定义，每一项的元素都是来自不同行和不同列，所以含有 a_{21}、a_{32}的项共有 2！项，它们是$(-1)^{N(3124)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$和$(-1)^{N(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，而 $a_{13}=0$，$N(4123)=3$，因此

$$D=(-1)^{N(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=-1$$

【例 1-5】 证明**对角行列式**(其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是 0)．

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证 第一式是显然的，下面只证第二式．

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中，t 为排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数，故

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

证毕．

对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做**上(下)三角行列式**，它的值与对角行列式一样．

【例 1-6】 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 由于当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $i\leqslant p_i$，即 $n\leqslant p_n$，$n-1\leqslant p_{n-1}$，…，$1\leqslant p_1$．

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项$(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．此项的符号$(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

利用第 1 章定理 1，我们来讨论行列式定义的另一种表示法．

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

此时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$$(-1)^{t_1} = -(-1)^t$$

故

$$(-1)^t = (-1)^{r+t_1}$$

于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (-1)^{r+t_1} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性．经一次对换如此，经多次对换这种性质仍成立．于是，经过若干次对换，使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为 0）；行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

又若 $p_i = j$，则 $q_j = i$（即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$）．可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所惟一确定．

由此可得

定理 3　n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中，t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数．

证　按行列式定义有

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

记

$$D_1 = \sum (-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

按上面讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而

$$D = D_1$$

仿此定义方法，请同学们自己推证 n 阶行列式还可定义为

$$D = \sum (-1)^{t+s} a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$$

其中，t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，s 为列标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数．

习题 1-2

1．试用行列式解方程组．

(1) $\begin{cases} x\tan\alpha + y = \sin(\alpha+\beta) \\ x - y\tan\alpha = \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+wy+w^2z=w \\ x+w^2y+wz=w^2 \end{cases}$

2. 写出四阶行列式中所有带负号并包含因子 $a_{11}a_{23}$的项.

3. 用行列式定义,计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4. 在一个 n 阶行列式中等于零的元素如果比 n^2-n 多,那末此行列式等于零,为什么?

5. 在六阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$应带什么符号?

6. 五阶行列式的展开式中的项为(　　).

(A) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{12}a_{25}$　　(B) $a_{12}a_{41}a_{35}a_{53}a_{24}$

(C) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$　　(D) $a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$

7. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 等于(　　).

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

8. 利用行列式定义计算 n 阶行列式:$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

9. 由行列式的定义,计算:$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 与 x^4 的系数.

10. 设 $\det A$ 是五阶行列式,其中 $a_{12}=0$,则 $\det A$ 按定义的展开式中为零的项数至少是________项.

11. 证明:n 阶行列式还可定义为 $D = \sum (-1)^{t+s} a_{p_1q_1} \cdots a_{p_nq_n}$. 这里,$t$ 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,s 为排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

1.3　行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为行列式 D 的**转置行列式**. 记为 D'(或

D^{T}).即,如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad 则\ D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,按定义

$$D'=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

而由定理 3,有

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

故

$$D'=D$$

例如三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28$$

它的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix}=28$$

因此

$$D'=D$$

由此性质可知,行列式中的行与列具有同等的的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式变号.

证　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换 i,j 两行得到的,即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;当 $k=i,j$ 时,$b_{ip}=a_{jp},b_{jp}=a_{ip}$.于是

$$D_1=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$