

新中學教科書

代數學

全一冊

編者
嘉定 崇汾

參訂者
江寧 張鵬飛

校者
無錫 華襄治

中華書局印行

新中學教科書

代數學

第一編

代數學之基礎

第一章 代數學之記號及効用

1. 數之記號 (Signs of Numbers).

算術僅用亞拉伯數字爲數之記號,代數學兼用字母.

如圓盤徑長二寸,求其周長若干(周爲徑之 3.1416 倍),則
依算術作 周長 = $2 \text{ 寸} \times 3.1416$;
代數學作 $x = 2 \times 3.1416$.

算術僅有已知數之記號;代數學無論已知數未知數,皆可以字母代之.

如上式可作 $x = d \times \pi$.

但字母僅代不名數,不代名數.

如 d 代 2 寸之 2, 不代 2 寸.

【注意】 普通皆用英文字母;在前者代已知數;在後者代未知數.

2. 字之記號 (Signs of Words) 一.

代數學以 $(+)$, $(-)$, $(\times)$, $(\div)$, $(\sqrt{\quad})$, 等代加, 減, 乘,

除,開方,等演算之字者,曰演算記號,其用法與算術相同.

如 $a+b$, 表於 a 加 b , 讀曰 a 加 b .

$a-b$, 表自 a 減 b , 讀曰 a 減 b .

$a \times b$, 表以 b 乘 a , 讀曰 a 乘以 b 或 b 乘 a .

$a \div b$, 表以 b 除 a , 讀曰 a 除以 b 或 b 除 a .

$a+(b-c)$, 表 a 加 b, c 之差.

$a \times (b-c)$, 表 b, c 之差乘 a .

$\sqrt{a}$ 表求 a 之平方根或二次根.

$\sqrt[3]{a}$ 表求 a 之立方根或三次根.

同數相乘,亦以指數(Exponent)表之.

如 a^2 , 表求 a 之平方或二次方.

a^3 , 表求 a 之立方或三次方.

但代數學之($\times$),可代以($\cdot$),亦可省去.

如 $a \cdot b$ 或 $a b$ 即 $a \times b$.

$a \cdot (b-c)$ 或 $a(b-c)$ 即 $a \times (b-c)$.

$(a+b+c)(a-b-c)$ 即 $(a+b+c) \times (a-b-c)$.

代數學之($\div$),常代以分數記號.

如 $a \div b$ 作 $\frac{a}{b}$.

代數學之括號,有時亦可省去.

如 $a+b c$ 即 $a+(b c)$, 非 $(a+b) \times c$.

【注意一】 合數字二種記號,可表一切之數.

如 $a+b$ 表 a, b 之和.

$a b$ 表 a, b 之積.

【注意二】 二數字間之($\times$),不必代以($\cdot$),亦不可省.

第一習題 A.

1. 以 x 代某數,則下各數以何式表之.

(a) 比某數大 3 者.

(b) 比某數小 3 者.

(c) 與某數之和為 3 者.

(d) 與某數之積為 3 者.

(e) 比某數 3 倍大 1 者.

(f) 為某數 3 分之 1 者.

2. 設有連續三整數,以 n 代其

(a) 最大者,

(b) 最小者,

(c) 居中者,

則餘二者表以何式?

3. 偶數可以何式表之? 奇數可以何式表之?

4. 3 之倍數,如何表之? m 之倍數,如何表之?

5. 設以二基數 t, u 組成二位數,則此數以何式表之?

6. 設以三基數 h, t, u 組成三位數,則此數以何式表之?

7. 試以式表

(a) 每個 5 分 n 個物之值.

(b) 每個 c 分 n 個物之值.

(c) 每個 $3c$ 分 n 個物之值.

(d) 每個 60 分 n 個物之值.

(e) 每 a 個 c 分 n 個物之值.

(f) 每 a 個 c 分 n 打物之值.

8. 1 里有若干丈? 2 里有若干丈? m 里有若干丈?
 n 里有若干丈?

9. 1 圓爲若干分? 1 分爲若干圓? d 圓爲若干分?
 c 分爲若干圓?

10. 1 時爲若干分? 1 分爲若干時? h 時爲若干分?
 m 分爲若干時?

3. 字之記號二.

代等於,大於,小於,等表二數關係之記號者,
 曰關係記號,形義亦與算術之 $(=)$, $(>)$, $(<)$ 無別.

如 $a=b$, 表 a 與 b 等,讀曰 a 等於 b .

$a>b$, 表 a 較 b 大,讀曰 a 大於 b .

$a<b$, 表 a 較 b 小,讀曰 a 小於 b .

4. 代數學之効用.

代數學以記號代字,以字母代數,其効用甚多;今先就淺顯易見者言之.

第一. 以簡明之式代繁複之語言.

【語】

圓盤周長寸數,等於其徑
 長寸數 2 之 3.1416 倍.

【式】

$$x=2 \times 3.1416.$$

第二. 以同一之式括同類之語言.

【語】

圓盤周長之某單位數(如
 寸數),等於其徑長某單位
 數(如寸數)之 3.1416 倍.

【式】

$$x=d\pi.$$

繁複之題,表以簡式,則未知數即易推得;同類之題,括以
 公式,則此類題皆可得解. 代數之用在式,學者須善用之.

第一習題 B.

1. 試以公式表

- (a) 矩形之面積等於其長與闊之積。
- (b) 平行四邊形之面積等於其底與高之積。
- (c) 三角形之面積等於其底與高之積之半。
- (d) 梯形面積等於其二底和與高之積之半。
- (e) 圓周皆等於其半徑之 2×3.1416 倍。
- (f) 圓面積等於半徑平方之 3.1416 倍。
- (g) 球面積等於半徑平方之 4×3.1416 倍。
- (h) 球體積等於半徑立方之 $\frac{4}{3} \times 3.1416$ 倍。

2. 下列各語,以何式表之?

- (a) 二數和之平方,等於其各平方之和加其積之二倍。
- (b) 二數差之平方,等於其各平方之和減其積之二倍。
- (c) 二數之和與差之積等於其各平方之差。
- (d) 二數和之立方,等於其各立方之和加其積與和相乘之積之三倍。
- (e) 二數差之立方,等於其各立方之差減其積與差相乘之積之三倍。

第二章 代數式

5. 代數式 (Algebraic Expression).

凡含數,字二種記號而不含關係記號之式,曰代數式;以下略稱曰式。

如 lw , $\frac{1}{2}bh$, $2 \times 3.1416r$, $3.1416r^2$, $a+b$ 等。

代數式不含演算記號之 $(+)$, $(-)$ 者, 曰單項式或一項式(Monomial); 如上所舉之前四式是。

集合若干單項式而成之式, 曰多項式(Polynomial)。各單項式曰多項式之項(Term)。

如 $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 + 2ab$, $a^2 + b^2 - 2ab$, 等皆多項式, 而 a^2 , b^2 , $2ab$, 等皆項也。

【注意】 凡言某字或某式所表之數, 本書常略曰某字或某式。

6. 因式(Factor).

因式與算術之因數相當。

如 $\frac{1}{2}bh$ 之因式爲 $\frac{1}{2}$, b , h 或 $\frac{1}{2}b$, h 或 $\frac{1}{2}$, bh 。

$3.1416(r_1^2 - r_2^2)$ 之因式爲 3.1416 , $r_1^2 - r_2^2$ 。

其僅含字母者, 曰文字因式; 僅含數字者, 曰數字因式。

7. 係式(Coefficient).

析單項式爲二因式, 則互稱曰係式。

如 $2\pi r$ 中 r 之係式爲 2π 。

其僅含字母者, 曰文字係式; 僅含數字者, 曰數字係式。

8. 代數式之值。

以式中各字母所代之數, 按其演算記號而計算之, 則所得之結果即爲全式所代之數, 稱曰其式之值。

【注意】 代數式計算順序與算術同。

第二習題

1. 設 $t=10$, 求下各式之值:

$$(a) 2t+5.$$

$$(d) 9t^2+4t+2.$$

$$(b) 2t^2+3t.$$

$$(e) 7t^2+8t+6.$$

$$(c) 7t^2+t+2.$$

$$(f) 14t^3+51t^2+52t+30.$$

2. 設 $a=10, b=2$, 求下各式之值:

$$(a) a^2+2ab+b^2.$$

$$(d) (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

$$(b) a^2-2ab+b^2.$$

$$(e) a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$(c) (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

$$(f) a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

3. 試求下表四式之值:

	$2 \times 3.1416r$	$3.1416r^2$	$4 \times 3.1416r^2$	$\frac{4}{3} \times 3.1416r^3$
$r=1$				
$r=2$				
$r=3$				
$r=4$				
$r=5$				

4. 若 $a=9, b=12, c=15, s=\frac{a+b+c}{2}$, 則下各式之值若何?

$$(a) \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

$$(d) \frac{1}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}.$$

$$(b) \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}.$$

$$(e) \frac{1}{c+a} \sqrt{cas(s-b)}.$$

$$(c) \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

$$(f) \frac{1}{a+b} \sqrt{abs(s-c)}.$$

$$(g) \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

第三章 代數學之數

9. 代數學之數 (Algebraic Numbers).

算術僅能自大數減小數,不能自小數減大數;如 5 減 3, 則得 2, 不能自 3 減 5. 代數學則任二數皆能相減;如 5 減 3, 則得正 2; 3 減 5, 則得負 2.

凡同種類而性質相反之二組數,代數學皆以其一組爲正數 (Positive Numbers), 餘一組爲負數 (Negative Numbers).

零在正負數之間.

正數,負數及零,曰代數學之數.

【注意】 習慣上之正負數,當遵從之.

如攝氏寒暑表冰點上之度數不可爲負,冰點下之度數不可爲正.

10. 字之記號三.

代正字以(+), 曰正號;代負字以(-), 曰負號;二者皆表數之性質,稱曰性質記號.

若以字母代正負數,則不置正負號.

如 a 可代 $+2$ 或 -2 .

【注意】 正號常可略去.

第三習題 A.

1. 設以前進之里數爲正,則

(a) 進 -5 里之意義若何?

(b) 進 0 里之意義若何?

2. 設以賺進之圓數爲正,則

(a) 賺零圓之意義若何?

(b) 賺負十圓之意義若何?

3. 設以民國紀元後之年數爲正,則

(a) 民國 +10 年之意義若何?

(b) 民國 -10 年之意義若何?

4. 緯度在赤道以北爲正,而赤道爲零,則赤道南之緯度若何?

5. 經度在格林威區以東爲正,而格林威區爲零,則格林威區以西之經度若何?

6. 試求下各式之結果:

$$3-8, 7-7, \frac{2}{3}-\frac{4}{5}, \frac{2}{3}-4, 2-\frac{4}{5}.$$

11. 絕對值(Absolute Value),

凡代數學之數,若舍其正負,但就大小言之,則稱曰絕對值.

如 +2, -2 之絕對值皆爲 2.

零之絕對值爲零.

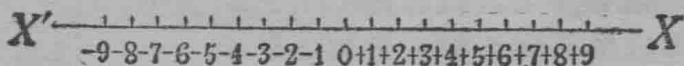
12. 數系(Number System of Algebra).

凡自正數減小,皆先至零而後達於負數.

如 $(+5) - (+4) = +1$, $(+5) - (+5) = 0$, $(+5) - (+6) = -1$.

故負數皆小於正數,而正數之絕對值愈大者,其數愈大,負數之絕對值愈大者,其數愈小.

今就代數學之整數以圖示其順序如下:



【注】此爲橫綫圖。若以縱綫表之則以一點表零，而零以上表正數，零以下表負數。

第三習題 B.

1. 下列各數，試依大小之順序列之：

+9, -9, +5, -5, +4, -4, +1, -1.

2. 正數之絕對值小於負數之絕對值，則此正數小於此負數否？

3. 負數之絕對值大於正數之絕對值，則此負數大於此正數否？

4. 一負數之絕對值大於他負數之絕對值，則此負數大於他負數否？

13. 函數 (Function).

圓周因徑而變：如徑長 2 寸，則周長 6.2832 寸；徑長 3 寸，則周長 9.4248 寸。徑對於周亦然。

正方形之面積因邊而變：如邊長 2 寸，則面積爲 4 方寸；邊長 3 寸則面積爲 9 方寸。邊對於面積亦然。

凡相因而變之二數，互稱曰函數。

函數以 $f()$ 或 $F()$ 或...記之。

如 $C = 3.1416d = f(d)$, $A = s^2 = F(s)$.

設 $d = 4$, 則 $f(d) = 12.5664$; 又 $s = 4$, 則 $F(s) = 16$.

第三習題 C.

1. 設 $f(s) = s^2$, 則 $f(11)$, $f(12)$ 至 $f(19)$ 之值各若何？

2. 設 $f(e) = e^3$, 則 $F(2)$, $F(3)$ 至 $F(9)$ 之值各若何？

3. 設 $A(x, y) = 3x + 6y$, 則 $A(1, 2) = ?$

4. 設 $A(x, y) = 6x + 3y$, 則 $A(1, 2) = ?$

5. 設 $B(x, y) = 3x + 6y - 15$, 則 $B(1, 2) = ?$
6. 設 $B(x, y) = 6x + 3y - 12$, 則 $B(1, 2) = ?$
7. 設 $C(x, y) = x^2 - 4y$ 或 $4x^2 + 9y^2 - 288$ 或 $xy - 60$, 試求 $C(6, 4), C(6, 9), C(10, 6)$.
8. 設 $C(x, y) = x^2 + y^2 - 25$, 試求 $C(0, 5), C(1, 4), C(2, 4), C(3, 4), C(4, 3), C(4, 1), C(2, 9)$.
9. 設 $Q(p) = p^2 + p$, 求 $Q(0), Q(3) - 12, Q(3) - 14$.
10. 設 $S(r) = (r+2)(r-3)$, 求 $S(3), S(4), S(5)$.

第四章 代數學數之演算規則

14. 加算規則.

設以東行之里數爲正, 則東行 5 里, 再行 4 里, 合之即東行 9 里; 其式及圖當如

$$(+5) + (+4) = +9. \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{+9} \\ \text{X}' \text{-----} \text{X} \\ \text{O} \xrightarrow{+5} \xrightarrow{+4} \end{array}$$

又西行 5 里, 再行 4 里, 合之即西行 9 里; 其式及圖當如

$$(-5) + (-4) = -9. \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{-9} \\ \text{X}' \text{-----} \text{X} \\ \text{O} \xleftarrow{-4} \xleftarrow{-5} \end{array}$$

故同性質二數相加, 即求此二數絕對值之和, 而其性質同此二數.

設仍以東行之里數爲正, 則東行 5 里, 西行 4 里, 合之即東行 1 里; 其式及圖當如

$$(+5) + (-4) = +1. \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{+1} \\ \text{X}' \text{-----} \text{X} \\ \text{O} \xrightarrow{+5} \xleftarrow{-4} \end{array}$$

又東行 4 里,西行 5 里,合之即西行 1 里;其式及圖當如

$$(+4) + (-5) = -1.$$

又西行 5 里,東行 4 里,合之即西行 1 里;其式及圖當如

$$(-5) + (+4) = -1.$$

又西行 4 里,東行 5 里,合之即東行 1 里;其式及圖當如

$$(-4) + (+5) = +1.$$

故異性質二數相加,即求此二數絕對值之差,而其性質同於大數.

絕對值相等之正負二數相加,其和爲零.

正數或負數加零,其和即爲被加數;零加正數或負數,其和即爲加數;又零加零,其和爲零.

【註】 上列六橫綫圖,表第一數,皆自 0 起;表第二數,皆自第一數之終點起.

第四習題 A.

1. 若氣溫由華氏某度昇至零上 10 度,則

(a) 由此降 5 度或 10 度或 15 度,其結果各若何?

(b) 由此昇 5 度或 10 度或 15 度,其結果各若何?

2. 若氣溫由華氏某度降至零下10度,則前題(a), (b)之答若何?

3. 上列二題試作縱綫圖以解之.

4. 試求下列諸數之和:

$$(a) \frac{2}{3}, \frac{1}{2}.$$

$$(d) -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}.$$

$$(b) \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}.$$

$$(e) 10, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}.$$

$$(c) -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}.$$

$$(f) -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}.$$

15. 減算規則.

減爲加之逆.

如 $(+5) + (+4) = +9$, 則 $(+9) - (+4) = +5 = (+9) + (-4)$.

$(-5) + (+4) = -1$, 則 $(-1) - (+4) = -5 = (-1) + (-4)$.

$(+5) + (-4) = +1$, 則 $(+1) - (-4) = +5 = (+1) + (+4)$.

$(-5) + (-4) = -9$, 則 $(-9) - (-4) = -5 = (-9) + (+4)$.

故自一數減去他數,即變他數之性質而加之. 絕對值相等之二正數或二負數相減,其差爲零.

正數或負數減零,其差即爲被減數;零減正數或負數,其差之絕對值等於減數而性質相反;又零減零,其差爲零.

第四習題 B.

1. 若氣溫由華氏某度昇至10度或降至10度,則

(a) 少昇5度或10度或15度,其度數若何?

(b) 少降5度或15度或15度,其度數若何?

2. 若氣溫由華氏某度降至零下10度或昇至零下10度,則前題(a),(b)之答若何?

3. 上列二題,試作縱綫圖以解之.

4. 試求下列二式之差:

$$(a) \frac{7}{6}, \frac{2}{3}.$$

$$(d) 10\frac{2}{3}, \frac{2}{3}.$$

$$(b) -\frac{3}{10}, -\frac{1}{2}.$$

$$(e) 10\frac{1}{6}, \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right).$$

$$(c) 10\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}.$$

$$(f) -\frac{1}{6}, \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right).$$

【注意】 本書凡言某二式之差,皆以第一式爲被減式.

16. 乘算規則.

設以東行之里數及此後之時數爲正,則每時東行5里,6時後即東行30里;其式當如

$$(+5) \times (+6) = +30.$$

又每時西行5里,6時前即少西行30里,與再東行30里無異;其式當如

$$(-5) \times (-6) = +30.$$

故同性質二數相乘,即求此二數絕對值之積而性質爲正.

設仍以東行之里數及此後之時數爲正,則每時西行5里,6時後即西行30里;其式當如

$$(-5) \times (+6) = -30.$$

又每時東行5里,6時前即少東行30里,與再西行30里無異;其式當如

$$(+5) \times (-6) = -30.$$

故異性質二數相乘,即求此二數絕對值之積而性質爲負.

正數或負數乘零,其積爲零;零乘正數或負數,其積亦爲零;又零乘零,積亦爲零.

第四習題 C.

1. 求下各式之值:

$$(a) (+30) \times (+\frac{1}{5}).$$

$$(e) (-30) \times (+\frac{1}{5}).$$

$$(b) (+30) \times (+\frac{1}{6}).$$

$$(f) (-30) \times (+\frac{1}{6}).$$

$$(c) (+30) \times (-\frac{1}{5}).$$

$$(g) (-30) \times (-\frac{1}{5}).$$

$$(d) (+30) \times (-\frac{1}{6}).$$

$$(h) (-30) \times (-\frac{1}{6}).$$

2. 若氣溫逐日上昇,每日昇高 $\frac{1}{4}$ 度,則

(a) 8日後之氣溫較今日高低若何?

(b) 8日前之氣溫較今日高低若何?

3. 若氣溫逐日下降,每日降下 $\frac{1}{4}$ 度,則

(a) 8日後之氣溫較今日高低若何?

(b) 8日前之氣溫較今日高低若何?

4. 設 $x = +5$ 或 -5 ,試求 x^2, x^3, x^4, x^5 之值.

17. 除算規則.

除爲乘之逆.

如 $(+5) \times (+6) = +30$, 則 $(+30) \div (+6) = +5$.

$(+5) \times (-6) = -30$, 則 $(-30) \div (-6) = +5$.

$$(-5) \times (+6) = -30, \text{ 則 } (-30) \div (+6) = -5.$$

$$(-5) \times (-6) = +30, \text{ 則 } (+30) \div (-6) = -5.$$

故同性質二數相除，即求此二數絕對值之商而性質爲正；異性質二數相除，即求此二數絕對值之商而性質爲負。

正數或負數除零，其商爲零。

【注意】 零除任何數，本書皆視爲無意義。

第四習題 D.

1. 求下各式之值：

$$(a) (+5) \div (+\frac{1}{6}).$$

$$(e) (-30) \div (+6).$$

$$(b) (-5) \div (+\frac{1}{6}).$$

$$(f) (-5) \div (-5).$$

$$(c) (+5) \div (-\frac{1}{6}).$$

$$(g) (-30) \div [(+6)(-5)].$$

$$(d) (-5) \div (-\frac{1}{6}).$$

$$(h) (+30) \div [(-5)(+6)].$$

2. 若氣溫逐日上昇，8 日昇高 2 度，則

(a) 明日之氣溫較今日高低若何？

(b) 昨日之氣溫較今日高低若何？

3. 若氣溫逐日下降，8 日降下 2 度，則

(a) 明日之氣溫較今日高低若何？

(b) 昨日之氣溫較今日高低若何？

4. 乘數及被乘數，同變性質，其積不變；除數及被除數，同變性質，其商亦不變。試舉例證明之。

5. 乘數及被乘數，其一之性質變，則積之性質變；除數