MOHU SHUXUE JIQI YINGYONG

模糊数学及其应用

张昆龙　谭立云　刘海生　魏丽侠　编

中国矿业大学出版社

CHINA UNIVERSITY OF MINING AND TECHNOLOGY PRESS

模糊数学及其应用

张昆龙　谭立云　刘海生　魏丽侠　编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书深入浅出地介绍了模糊数学的基本理论、基本方法及其应用.其主要内容包括:模糊集合的预备知识和基本理论;模糊关系与聚类分析;模式识别;模糊决策;模糊自动控制和模糊推理以及模糊数学应用举例等.

本书是大学本、专科学生的教材或参考书,也可供有关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学及其应用/张昆龙,谭立云,刘海生,魏丽侠编.—徐州:中国矿业大学出版社,2006.9

ISBN 7-81107-405-2

Ⅰ.模... Ⅱ.①张...②谭...③刘...④魏...
Ⅲ.模糊数学—高等学校—教材 Ⅳ.0159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 095470 号

书　　名	模糊数学及其应用
编　　者	张昆龙　谭立云　刘海生　魏丽侠
责任编辑	瓮立平　宋会娜
出版发行	中国矿业大学出版社 (江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编:221008)
网　　址	http://www.cumtp.com　E-mail:cumtpvip@cump.com
印　　刷	北京兆成印刷有限责任公司
经　　销	新华书店
开　　本	787×960　1/16
印　　张	8
字　　数	138 千字
版次印次	2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	1~800 册
定　　价	26.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

序 言

集合论是近代数学的基础,数学的每个分支都可以看做对某类集合的研究.例如,几何学的研究对象是点集;代数学的研究对象是数集及其运算;分析学则主要研究函数集合等等.经典数学所研究的集合是普通集合.这种集合对它所包含的对象有着明确的规定,一个对象要么属于这个集合,要么不属于这个集合,二者必居其一.这在逻辑上对应的是二值逻辑,一个命题或真或假,不容许有中间状态.

用这种集合论的观点来描述客观世界会遇到不可克服的困难,尽管客观事物本身是清晰的、分明的.但是,人们要认识客观世界就必须对客观事物进行粗略的分类,例如,把人类分成"男人"、"女人"、"老人"、"中年人"、"年轻人"等等.只有在有了这些粗略的分类之后人们才能对客观世界进行研究、思考、分析、推理.在人类的思考过程中所依赖的概念多数是模糊的、不分明的.例如,"老人"这一概念,没有一个人可以说清楚究竟多少岁以上的人是老人,这是一个模糊概念.符合这一概念的对象集合(此概念的外延)也自然没有明确的范围.这种与模糊概念相对应的集合,称为模糊(Fuzzy)集合.模糊集合没有明确的边界,人脑中所存在的概念多数为模糊概念.人就是依赖于这些模糊概念及其对应的模糊集合来认识世界的.

在数学上如果硬把模糊概念严格化、绝对化,这是人们所不能接受的.例如,"秃子"这一概念,如果硬性规定:"头发少于 n 根者为秃子",在这种规定下有($n-1$)根头发的人就是"秃子";但是,另一个有 n 根头发的人很幸运,尽管他仅比前者多 1 根头发,却不是"秃子".这是人们的常识所不能接受的,而且这样硬性地严格分类也不利于人们认识事物.

正是由于这种模糊概念的大量存在,而这些概念又无法用经典集合论进行描述,于是便产生了模糊集合论.该理论是由著名控制论专家、美国加州大学教授 L. A. 扎德(Zadeh)首先引入的. 1965 年,L. A. 扎德教授在《Information and Control》杂志上首先提出模糊集(Fuzzy set)的概念,奠定了模糊集合论的基础.这一理论由于在处理复杂系统特别是有人干预的系统方面的简捷与有力,在某种程度上弥补了经典数学与统计数学的不足,迅速受到广泛重视. 40 多年来,这个领域从理论到应用,从软技术到硬技术都取得了丰硕成果,对相关领域和技术

尤其是一些高新技术的发展产生了日益显著的影响.

模糊数学是一门崭新的、有强大生命力和渗透力的新学科分支.这方面的新知识,对从事许多方面的科学研究和实际工作的人们都具有很大的吸引力.模糊数学的研究对象是客观世界里大量的模糊概念,从这些模糊概念里求得数量规律,然后用精确的数学方法来处理它.模糊数学的出现标志着科学已经发展到一个更加高级的阶段,能够用数学的方法来处理带有模糊性的复杂问题.这就使数学能够更加接近人类的思维,用来解决更多的日常生活问题.虽然模糊数学诞生于1965年,还很年轻.但是,在理论研究和实际应用的某些方面已经取得了一些显著成就,研究方向涉及到电子计算机、人工智能、模式识别、控制论、信息论、心理学、电子学、生物学、气象学、地质学等多种学科.它所能解决的实际问题、内容可以涉及到理、工、农、医以及社会科学的各个方面.在一些过去不能应用数学的禁区,由于模糊数学的兴起,也开始使用数学了,这无疑会给这些科学技术部门带来深远的影响.诚然,目前这方面还只是一个开端,所能完善解决的问题还不多.但是已经显示出模糊数学是一个很有发展前途的新兴学科.正如模糊数学创始人L.A.扎德所预言的那样:“在今后十几年里,这门学科必将得到大力发展.也必将在人类知识和科学方法的宝库里占有一席之地.”

本书共分8章,具体编写分工为:第1章、第2章、第3章、第6章、第7章由张昆龙和谭立云编写;第4章、第5章、第8章由刘海生和魏丽侠编写.全书由全体作者多次互相讨论、交换审阅,最后由张昆龙统稿并定稿.

由于编写时间仓促及水平有限,书中缺点与错误在所难免,恳请读者批评指正.

作　者

2006年7月

目 录

“$\exists !\ x\in A$”表示“存在惟一 $x\in A$”.

设 P,Q 是两个命题，则：

“$P\Rightarrow Q$”表示“若 P 成立，则 Q 成立”；

“$P\Leftrightarrow Q$”表示“P 成立当且仅当 Q 成立”.

1.1.2 普通集合的表示

集合的表示法有 3 种：

(1) 把一个集合的元素全部列出，并用花括号括起的方法，叫做列举法. 例如：

“四季”=｛春，夏，秋，冬｝；

“中国的直辖市”=｛北京，天津，上海，重庆｝.

(2) 如果一个集合中有很多元素，甚至有无限多个元素，用列举法就无法表示了，这时可用定义法来表示. 定义法就是用构成集合的定义来表示集合，也就是用集合中元素的共性来描述集合. 例如，对于集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$，可定义 A 为小于 10 的奇数. 于是，A 可表示为：

$$A=\{x\mid x\text{ 为奇数}, x<10\}$$

花括号中的 x 代表构成集合的各元素，竖线的右边表示构成这一集合的定义，即 x 所具备的特性. 竖线有时也可用冒号代替，例如：

$$A=\{x: x\text{ 为奇数}, x<10\}$$

(3) 除了列举法与定义法之外，一个集合还可以用特征函数 μ 来表示，这里 μ 为希腊字母. 特征函数 μ 可表示元素 x 是否属于集合 A. 若 $x\in A$，则 $\mu(x)=1$；若 $x\notin A$，则 $\mu(x)=0$.

通过各元素的特征函数与集合 $\{0,1\}$ 中的元素一一对应，就能清楚地勾划出一个集合. 例如，一个学习小组共有 6 人，记作：a,b,c,d,e,f，在这一论域中，“男生”与“女生”集合可分别表示为：

$$\text{男生}=\frac{0}{a}+\frac{1}{b}+\frac{0}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}$$

$$\text{女生}=\frac{1}{a}+\frac{0}{b}+\frac{1}{c}+\frac{0}{d}+\frac{0}{e}+\frac{0}{f}$$

或者，表示为：

$$\text{男生}=0/a+1/b+0/c+1/d+1/e+1/f$$

$$\text{女生}=1/a+0/b+1/c+0/d+0/e+0/f$$

值得注意的是，式中的加号并非表示相加，仅用来表示列举；每项分式也并不表示相除，分母表示元素的名称，分子为该元素对应的特征因数值.

一个集合的元素个数，叫做该集合的基数．集合 A 的基数，记作：$n(A)$．例如，四季集合的基数是4，即 $n(\text{四季})=4$．基数为有限数的集合叫做有限集；元素的数目无限时，就称为无限集．例如：

$$\{x|x\text{ 为偶数}\}$$

$$[0,1]=\{x\in R|0\leq x\leq 1\}$$

上述两个集合都是无限集．对于无限集，就不能用一个数字来写出它们的基数．但另有描述其基数的方法，这里不加讨论．

1.2　子集合

试考察集合：复数集合 C，实数集合 R，有理数集合 Q，整数集合 Z 和自然数集合 N．

显然，复数集合 C 包含了实数集合 R，也包含了有理数集合 Q 和整数集合 Z 等，因为后者的元素全部都能在复数集合 C 中找到．

一般地，如果集合 B 的元素全部都能在集合 A 中找到，集合 B 便称为集合 A 的子集合（简称子集），可用符号表示为：

$$B\subseteq A$$

集合 B 作为集合 A 的子集的充分必要条件是：如果在 B 中任取一元素 x，此元素必定同时属于集合 A．即上述条件可以表示为：

若 $\forall x\in B$ 都有 $x\in A$，则 $B\subseteq A$．

$B\subseteq A$ 也可写作 $A\supseteq B$，读作 A 包含 B，或 B 被 A 包含，或 B 包含于 A．

一个集合不是另一个集合的子集时，可用符号"$\nsubseteq$"表示．例如：

"整数集合"$\nsubseteq$"无理数集合"．

有两个特别的子集：空集与全集．

当 $n(A)=0$ 时，即集合 A 中不包含任何元素，这样的集合就叫做空集，用符号"$\varnothing$"表示．例如：

$$\{a|a\text{ 为方程 }e^x=-1\text{ 的解}\}$$

$$\{x|x\text{ 是整数},4<x<5\}$$

由集合的全体元素组成的集合叫做全集，由于它也符合子集的定义：

若 $\forall x\in A$，必有 $x\in A$，所以 $A\subseteq A$，即任一个集合均可作为本身的子集．

一个集合一共可以包含多少个子集呢？例如，一个含有3个元素的集合 $A=\{a,b,c\}$ 的子集个数为：

(1) 不含元素的子集，即空集 $\varnothing$，有1个．

(2) 含有 1 个元素的子集共有 3 个：

$$\{a\},\{b\},\{c\}$$

(3) 含有 2 个元素的子集共有 3 个：

$$\{a,b\},\{c,b\},\{a,c\}$$

(4) 含有 3 个元素的子集，有 1 个，即全集：

$$\{a,b,c\}$$

因此，集合 A 的全部子集数为 $1+3+3+1=8$(个).

同样，含有 4 个元素的集合 $B=\{a,b,c,d\}$，它的所有子集数为 16.

容易推得，一个含有 n 个元素的集合，必有 2^n 个不同的子集. 这里，把空集和全集(两个特殊的子集)都作为子集.

除去全集之外的子集叫做真子集.

把一个集合 A 的全部子集作为元素，这样构成的集合叫做幂集，记作：$P(A)$或 2^A. 例如，集合 $B=\{0,1\}$的幂集为：

$$2^B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$$

1.3 集合的运算

1.3.1 普通集合的运算

子集、空集和相等集合都是指两个集合之间的相互关系. 在实际运用中，还要进行集合的运算.

与数与数之间可以进行运算一样，集合之间也能进行运算. 由于集合是某些事物的总体，而不是通常的数，因此，它们之间的运算当然具有自己的特色.

集合的运算也是从现实生活中提炼出来的数学方法. 例如，有一位考生第一天复习了数学、物理、英语 3 门功课，第二天又复习了数学、化学、英语 3 门功课，试问两天一共复习了几门课？回答不可能是 3 加 3 等于 6 门课，而是 3 加 1 等于 4 门课，这是在 6 中减去了重复的元素而得. 这样的运算叫做集合的“并”. 它可以规定为：

设 A,B 是两个集合，如果把两个集合中的元素合在一起组成一个新的集合，则这个新集合就叫做 A 和 B 的并集(又称和集)，记为：

$$A\cup B$$

例如，设有两个集合 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{c,d,e,f\}$，则：

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$$

A 集和 B 集的并集不但包含一切属于 A 集的元素，还包括一切属于 B 集的元素；$A\cup B$ 的元是属于 A 或属于 B 的元. 因此，$A\cup B$ 集合为：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

显然，其特征函数满足：

$$\mu_{A\cup B}(u)=\mu_A(u)\vee\mu_B(u), \qquad \forall u\in U$$

如果问：前述例子中每天都复习到的功课有几门？那就是数学和英语两门. 换句话说，就是从 A，B 集中取出它们共有的元素构成一个集合，这个集合称为 A，B 两集的交集，记为：$A\cap B$. A，B 交集所含的元素必定同时属于 A 集与 B 集，所以交集 $A\cap B$ 可表示为：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

显然，其特征函数满足：

$$\mu_{A\cap B}(u)=\mu_A(u)\wedge\mu_B(u), \qquad \forall u\in U$$

若集合 A，B 满足：

$$A\cap B=\varnothing$$

则称 A，B 互斥或互不相交，又称 A，B 分离.

例如，设 A 为偶数集：

$$A=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$$

B 为奇数集：

$$B=\{1,3,5,\cdots,2n+1,\cdots\}$$

则 $A\cap B=\varnothing$，即集合 A，B 互斥.

设某班级共有语文、政治、数学、物理、化学、英语、体育 7 门课程，这就是论域 U. 如果已经复习了的功课——数学、物理、英语称为集合 A，那么，没有复习到的功课——语文、政治、化学、体育也是一个集合，称为 A 集的补集.

一般说来，取出一切不在 A 集中的元素构成一集合，称为 A 集的补集，记为：A^c. A 的补集 A^c 的定义式为：

$$A^c=\{x\mid x\notin A, x\in U\}$$

显然，其特征函数满足：

$$\mu_{A^c}(u)=1-\mu_A(u), \qquad \forall u\in U$$

若取出属于 A 集但不属于 B 集的元组成一集合，就叫做集 A 与集 B 的差集，记为：

$$A\setminus B$$

如果 $A\neq B$，则 A 和 B 的差集不同于 B 和 A 的差集；如果 $A=B$，则 $A\setminus B=B\setminus A=\varnothing$. 因此，差集的运算是不可交换的，正如两个数字在求差的运算中也不可交换一样.

1.3.2 普通集合的运算性质

众所周知,在普通数的加法与乘法运算中,存在着交换律、结合律、分配律等.与此类似,对于集合的交集、并集、补集运算也可总结出某些规则.从集合图中,不难总结出集合的并运算和交运算具有以下性质:

(1) 交换律:

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

(2) 结合律:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

(3) 分配律:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

值得注意的是:这里不仅有交对并的分配律,而且也有并对交的分配律.这显然与普通数的加法、乘法不同.因为在数的加法、乘法运算中 $a+(b\times c)\neq(a+b)\times(a+c)$.

(4) 传递律:

$$\text{若 } A\subseteq B, B\subseteq C, \text{则 } A\subseteq C$$

(5) 幂等律:

$$A\cup A=A, A\cap A=A$$

(6) 同一律:

$$A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$$
$$A\cup U=U, A\cap U=A$$

(7) 相补律:

$$(A^c)^c=A$$
$$U^c=\varnothing, \varnothing^c=U$$

(8) 排中律:

$$A\cup A^c=U, A\cap A^c=\varnothing$$

(9) De. 摩根律:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$
$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

(10) 吸收律:

$$(A\cup B)\cap A=A, (A\cap B)\cup A=A$$

以上这些性质都可以从定义直接推出，也可以用特征函数证明. 这里只证明吸收律，其余留作练习.

【方法 1】 设 $x\in(A\cup B)\cap A$，则 $x\in A$ 并且 $x\in A$ 或 $x\in B$，由此得出 $x\in A$. 从而 $(A\cup B)\cap A\subseteq A$；反之，设 $x\in A$，则 $x\in A\cup B$，从而 $x\in(A\cup B)\cap A$，即 $(A\cup B)\cap A\supseteq A$. 因此，$(A\cup B)\cap A=A$. 同理可证得：$(A\cap B)\cup A=A$.

【方法 2】 对于任意 $u\in U$，有：

$$\mu_{(A\cup B)\cap A}(u)=(\mu_A(u)\vee\mu_B(u))\wedge\mu_A(u)$$

当 $\mu_A(u)\geq\mu_B(u)$ 时，

$$(\mu_A(u)\vee\mu_B(u))\wedge\mu_A(u)=\mu_A(u)\wedge\mu_A(u)=\mu_A(u)$$

当 $\mu_A(u)\leq\mu_B(u)$ 时，

$$(\mu_A(u)\vee\mu_B(u))\wedge\mu_A(u)=\mu_B(u)\wedge\mu_A(u)=\mu_A(u)$$

因此，$(A\cup B)\cap A=A$.

集合的并集、交集和补集运算的定义也可以推广到任意多个集合的运算. 设 $A_i(i\in I)$ 是论域 U 的子集，集合族 $\{A_i\mid i\in I\}$ 的并集、交集运算定义为：

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid x\in U,\exists i\in I:x\in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid x\in U,\forall i\in I:x\in A_i\}$$

其特征函数满足：

$$\mu_{\bigcup\limits_{i\in I}A_i}(u)=\bigvee_{i\in I}\mu_{A_i}(u),\qquad \forall u\in U$$

$$\mu_{\bigcap\limits_{i\in I}A_i}(u)=\bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(u),\qquad \forall u\in U$$

易证这些运算满足以下运算律：

(11) 无限分配律：

$$A\cup(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$$

$$A\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$$

(12) De. 摩根律：

$$(\bigcup_{i\in I}A_i)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c$$

$$(\bigcap_{i\in I}A_i)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c$$

1.4 映射与关系

映射是近代数学的一个基本概念，它是函数概念的推广.

定义 1.4.1 设 A,B 是给定的两个集合，若有一个规则 f，通过它，对于每

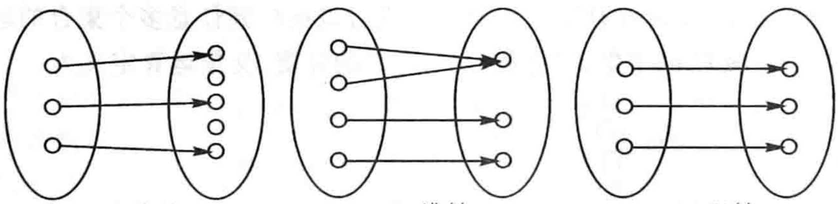
个 $x \in A$，惟一确定一个 $y \in B$，则称 f 是 A 到 B 的一个映射. 记为：

$$f: A \to B$$

A 叫做 f 的定义域，$f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做 f 的值域，y 叫做 x 的象，记为：$y=f(x)$，并且用符号“$f: x \mapsto y$”表示. $f^{-1}(y)=\{x \mid f(x)=y\}$ 称为 y 的逆象，f^{-1} 叫做 f 的逆映射.

注意：f 的逆映射 f^{-1} 一般不是一个映射，因为对于 $y \in f(A) \subseteq B$，$f^{-1}(y)$ 并非是惟一的一个数，可以是多于一个元素的集合.

定义 1.4.2　如图 1－1 所示，设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果对于任意的 $a,b \in A$，$a \neq b$，有 $f(a) \neq f(b)$，则称 f 是 A 到 B 的一个单射（又称一一映射）；如果对于任意 $b \in B$ 均存在 $a \in A$，使得 $f(a)=b$，则称 f 是 A 到 B 的一个满射（又称 f 是 A 到 B 上的映射）；若 f 既是单射又是满射，则称 f 是 A 到 B 的一个双射（又称一一在上映射）.



(a) 单射　　(b) 满射　　(c) 双射

图 1－1　单射、满射、双射

下面给出映射合成的概念.

定义 1.4.3　设有 3 个非空集合 A,B,C，$f: A \to B$，$g: B \to C$，由 f,g 确定的 A 到 C 的映射 $h: a \mapsto g(f(a))$，$\forall a \in A$ 叫做映射 f,g 的合成，记为：$h=g \circ f$，即 $\forall a \in A$，$h(a)=g(f(a))$. h 可以用图 1－2 表示.

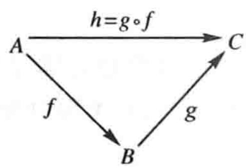


图 1－2　f、g 的合成

下面证明映射的合成适合结合律.

设有 4 个非空集合 A,B,C,D，$f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$，则有 $h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$.

证明：$\forall x \in A$，$(h \circ (g \circ f))(x)=h \circ ((g \circ f)(x))=h(g(f(x)))$

$$=(h \circ g) f(x)=((h \circ g) \circ f)(x)$$

即

$$h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$$

下面介绍作为映射概念的推广的关系概念. 为此，先引入笛卡尔积的概念.

定义 1.4.4　设 A,B 是两个集合，则序偶集：

$$A \times B=\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

称为 A,B 的笛卡尔积. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，则 n 元序偶集：

$$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡尔积，记为：$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，又记为：$\prod_{i=1}^{n}A_i$.

例如，$A=\{0,1\}$，$B=\{a,b\}$，则：

$$A\times B=\{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$$
$$A\times A=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$B\times B=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$
$$B\times A=\{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1)\}$$

注意：一般讲，$A\times B\neq B\times A$，当且仅当 $A=B$ 时，二者才相等.

定义 1.4.5　$A\times B$ 的子集 R 叫做 A,B 间的一个二元关系. 当 $(a,b)\in R$ 时，说 a 与 b 具有关系 R，记作：aRb；当 $(a,b)\notin R$ 时，说 a 与 b 不具有关系 R. A 与 A 间的二元关系称为 A 上的关系. 一般地，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的子集称为这 n 个集合之间的一个 n 元关系.

【例 1.4.1】　$A=R$(实数集)，$R_1=\{(a,b)\mid(a,b)\in R\times R,a=b\}$，$R_2=\{(a,b)\mid(a,b)\in R\times R,a\leq b\}$，$R_3=\{(a,b)\mid(a,b)\in R\times R,a^2+b^2=1\}$，则：

$$aR_1b\Leftrightarrow a=b$$
$$aR_2b\Leftrightarrow a\leq b$$
$$aR_3b\Leftrightarrow a^2+b^2=1$$

【例 1.4.2】　A 是一群人组成的集合，$R=\{(a,b)\mid a,b\in A;a,b$ 认识$\}$，则 R 是 A 上的一个关系，并且 $aR_1\ b\Leftrightarrow a$ 和 b 认识.

定义 1.4.6　设集合 A 中的一个二元关系“$\sim$”具有下列性质：

$(E1)$ $\forall a\in A$：$a\sim a$(自反性)；

$(E2)$ $\forall a,b\in A$：$a\sim b\Leftrightarrow b\sim a$(对称性)；

$(E3)$ $\forall a,b,c\in A$：$a\sim b,b\sim c\Rightarrow a\sim c$(传递性).

则称关系“$\sim$”为 A 中的等价关系.

利用等价关系可以对集合进行分类，这里不详细讨论这一问题.

下面介绍有关集合顺序的一些概念.

定义 1.4.7　设 P 是一个集合，P 上的二元关系“$\leq$”叫做一个偏序关系(或半序关系)，如果满足：

$(P1)$ 自反性：$a\leq a$，$(\forall a\in P)$；

$(P2)$ 反对称性：$a\leq b,b\leq a\Rightarrow a=b(\forall a,b\in P)$；

$(P3)$ 传递性：$a\leq b,b\leq c\Rightarrow a\leq c(\forall a,b,c\in P)$.

这时称 $(P,\leq)$(简称 P)为一个偏序集(或半序集).

对任意 $a,b\in P$，若 $a\leq b$，则读作：a 含于 b 或 a 小于或等于 b；若 $a\leq b$ 而 $a\neq$

b,则记作:$a<b$,读作:a 真含于 b 或 a 小于 b. 如果 $a\leq b$ 或者 $b\leq a$,则称 a 与 b 是可比的;否则就说,a 与 b 是不可比的,记作:$a \parallel b$. $a<b(a\leq b)$有时也记作:$b>a(b\geq a)$.

【例 1.4.3】 设 A 是任意一个集合,$P(A)$是 A 的幂集,"$\subseteq$"表示集合的包含关系,则$(P(A),\subseteq)$成为一个偏序集.

【例 1.4.4】 设 N 是自然数集,"$|$"表示数的整除关系,"$\leq$"表示通常数的小于或等于关系,则$(N,|)$与$(N,\subseteq)$都是偏序集.

【例 1.4.5】 设 A 是任意集合,E 是恒等关系,则(A,E)是偏序集.

定义 1.4.8 设$(P,\leq)$是一个偏序集,若 P 中任意两个不同的元素都是可比的,则称$(P,\leq)$(简称 P) 是一个线性序集(或链或全序集),偏序关系"$\leq$"称为线性序(或全序);反之,若 P 中任意两个不同的元素都不可比,则称$(P,\leq)$(简称 P)是一个非序集(或反链).

例 1.4.4 中的$(N,\leq)$是一个线性序集(即链),例 1.4.5 中的(A,E)是一个非序集(即反链).

定理 1.4.1 设$\leq$是集合 P 上一个偏序关系,Q 是 P 的一个子集,则:

(1) $\leq$的逆关系$\leq^{-1}$,也是 P 的一个偏序关系;

(2) $\leq$在 Q 上的诱导关系$\leq|_Q=\{(a,b)\in Q\times Q|(a,b)\in\leq$,即 $a\leq b\}$是 Q 上的一个偏序关系.

证明留作练习.

在定理 1.4.1 中,称偏序集$(P,\leq^{-1})$是偏序集$(P,\leq)$的对偶, 简记作:$\overline{P}$. 称偏序集$(Q,\leq|_Q)$是偏序集$(Q,\leq)$的子偏序集,简记作:$(Q,\leq)$或 Q. 显然,若$(P,\leq)$是一个链(或反链),则其对偶以及子偏序集也是链(或反链).

定义 1.4.9 设$(P,\leq)$是任意一个偏序集,Q 是 P 的一个子集,如果子偏序集$(Q,\leq)$本身是一个链(或反链),则称 Q 为 P 内的链(或反链).

定义 1.4.10 设$(P,\leq)$是一个偏序集,且 A 是 P 的一个非空子集,$a\in A$,若对任意的 $x\in A$,有 $x\leq a$,则称 a 是 A 的一个最大元;若不存在 $y\in A$,使得 $a<y$,则称 a 是 A 的一个极大元. 对偶地,可以给出最小元和极小元的概念.

显然,最大元(最小元)一定是极大元(极小元),但反之不真.

特别地,偏序集$(P,\leq)$的最大元(若存在时)叫做 P 的最大元,用$\vee P=1$表示;$(P,\leq)$的最小元(若存在时)叫做 P 的最小元,用$\wedge P=0$ 表示;1,0 统称为 P 的界.

定理 1.4.2 设$(P,\leq)$是一个偏序集,且 A 是 P 的一个非空子集.

(1) 若 A 有最大元(最小元),则只有一个;

(2) 若 A 是有限子集,则必有极大元(极小元);

(3) 若 A 是 P 内的链(即线性序子集),则 A 的极大元(极小元)(当存在时)一定是最大元(最小元).

证明:只证(2),其余留作练习.

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,归纳定义 P 中元素列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,使得 $b_1=a_1$,假定 b_{k-1}已经定义($1<k<n$),规定:

$$b_k=\begin{cases}a_k, & \text{若 } b_{k-1}<a_k\\ b_{k-1}, & \text{否则}\end{cases}$$

这样得到一列元素 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,显然 $b_n\in A$ 且是 A 的一个极大元.类似可证 A 有极小元.

定义 1.4.11　如果偏序集(或链)$(P,\leq)$是有限集,那么称$(P,\leq)$为一个有限偏序集(有限链);否则称$(P,\leq)$是一个无限偏序集(或无限链).通常 P 所含元素的个数(基数)可用 $n(P)$表示,叫做 P 的阶.

由定理 1.4.1 显然可得:

推论 1.4.1　任何有限链一定有最大元(最小元).

1.5　格

格是 20 世纪二三十年代引入的一个代数结构,它是模糊集合论的基础.这里仅介绍一些基本概念.

1.5.1　在偏序集意义下的格的定义

设 $(P,\leq)$ 是一个偏序集,$S\subseteq P$,$a\in P$,如果对所有的 $s\in S$ 有 $s\leq a$,则元素 a 称为 S 的一个上界,下界可对偶地定义.S 的所有上界的集合用"S^*"表示,读作:S 的上界;S 的所有下界的集合用"S_*"表示,读作:S 的下界.即:

$$S^*=\{a\in P\mid s\leq a,\forall s\in S\}$$

$$S_*=\{b\in P\mid s\geq b,\forall s\in S\}$$

由于偏序关系"$\leq$"具有传递性,S^* 总是一个上定向集;S_* 总是一个下定向集.如果 S^* 有最小元 d,则称 d 是 S 的最小上界.即 d 是 S 的最小上界当且仅当:

(1) d 是 S 的一个上界;

(2) 对 S 的任一上界 a,$a\leq d$.

最小上界也称上确界,表示为:

$$\sup S=\bigvee S=\bigvee_{a\in S}a$$

对偶地 S_* 的最大元(若存在)称为 S 的下确界,表示为: