数学难题解难

一元n次方程破解

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_n\neq 0)$$

石泉　郑良飞　著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

一元n次方程

$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 (a_n \neq 0)$

破解

石泉　郑良飞　著

国防工業出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

一元 n 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_n\neq 0)$ 破解/石泉,郑良飞著. —北京:国防工业出版社,2014.11
ISBN 978-7-118-09764-1

Ⅰ.①一… Ⅱ.①石…②郑… Ⅲ.①一元方程-高次方程-方程解 Ⅳ.①O122.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 237898 号

※

国防工业出版社 出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 7 **字数** 157 千字
2014 年 11 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—1500 册 **定价** 42.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前 言

本书主要介绍一元 n 次方程是如何破解的。首先发现一般的一元 n 次方程 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0(a_n \neq 0)$ 每项根(实根、复根)与系数关系的结构(新发现它的固有规律),然后,如果适合此结构,选用三个证法(消元法,例题用三个解法),以及包括附录 1 ~ 附录 5,进行论证一元 n 次方程有 n 个实根和 $n/2$ 对复根成立(含例题用三个解法,求一元 2 ~ 10 次方程有 2 ~ 10 个实根和 1 ~ 5 对共轭复根也都成立)。

数学史业已查明:1824 年,1829 年,阿贝尔(挪威),伽罗瓦(法国),都证明了 5 次以上的代数方程没有根式解的文章公布于世,已有 100 多年的历史了,这是国内、外数学界所共识的。

作者却不以为然,经过多年的研究,终于给出了一元 n 次方程破解的核心内容——方程每项根(实根、复根)与系数关系的结构,三个证法,三个解法,进行方程论证、求解得实根、复根,以及附录 1 ~ 附录 5。

本书第 1 章阐述一元 n 次方程每项根(实根、复根)与系数关系的结构;第 2 章阐述一元 n 次方程,用三个证法,三个解法;第 3 章论证一元 n 次方程有 n 个实根和 $n/2$ 对共轭复根;第 4 章为例题,求一元 2 ~ 10 次方程有 2 ~ 10 个实根和求一元 2、4、6、8、10 次方程有 1 ~ 5 对共轭复根;附录 1 ~ 附录 5 为分解常数项表示素因数之积,常数项开方,素数表,根的范围,函数图像,新公式。

本书论证方程的实根、复根成立与否(含例题求实根、复根),最后,还是都要经过检验,定其正确与否。这就等同对此审核对、错成为定局,不存在偏、差、错、漏问题,也不存在权威问题(对就是对,错就是错)。这是论证求解的演算过程和结论,更加具体说明了,用一般的一元 n 次方程核心内容(结构、证法、解法、附录),没有论证不了的问题,没有解不开的问题(注:伽罗瓦五次方程 $x^5 - x + 1 = 0$ 被破解了,其中,就有解得一个无理数根:$x_1 = -1.167303978261418\cdots$,并附有该方程的函数图像,这里存在什么权威吗?没有;刊在《一元五次方程 $x^5 + a_5x^4 + b_5x^3 + c_5x^2 + d_5x + e_5 = 0(e_5 \neq 0)$》(石泉　郑良飞 著)一书中,p115. 国防工业出版社出版),这就是很好的说明问题。

为了使本书内容审核认可,作者倾听中、外数学界人士(院士、研究员、专家、大学教授、博士等)对本内容有什么意见,于是,自 2007 年 4 月 ~2013 年 4 月,作者先后六次参加由中国全国数学会主办的“数学史与数学教育(国内二次国际四次)学术研讨会”,并在每次会议小组会上对本内容作了介绍,承蒙与会代表提出宝贵意见,也引起数学界人士高度关注,他们有的认为:如果其理论成立,将对数学界是个不小的冲击,并且已启发他们

都在积极努力研究算术、代数、几何等结构，这充分说明：作者对方程结构研究，把世界数学难题之一：一元 n 次方程，一百多年没有破解而被破解成功的研究方向是对的；他们正在研究数学结构，将会有惊人的效果出现。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎广大读者批评、指正，谢谢。

中国数学会会员　石泉　郑良飞

2014 年 4 月

目　录

第 1 章

方程每项根与系数关系的结构

1.1 一元 2 ~ 10、n 次方程每项根与系数关系的结构(实根)

一、一元 2 次方程

$x^2+(x_1+x_2)x+x_1x_2=0(x^2+a_2x+e_2=0,e_2=x_1x_2\neq 0)$

根的范围: $x_{1,2}\leqslant\sqrt{e_2},x_{1,2}\leqslant(a_2\div 2)$

二、一元 3 次方程

$x^3+(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x+x_1x_2x_3=0(x^3+a_3x^2+b_3x+e_3=0,e_3=x_1\cdot x_2x_3\neq 0)$

根的范围: $x_i\leqslant\sqrt[3]{e_3},x_i\leqslant\sqrt{e_3},x_i\leqslant(a_3\div 2),x_i\leqslant(a_3\div 3),(i=1,2,3)$

三、一元 4 次方程

$x^4+(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2+(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x+x_1x_2x_3x_4=0$

$(x^4+a_4x^3+b_4x^2+c_4x+e_4=0,e_4=x_1x_2x_3x_4\neq 0)$

根的范围: $x_i\leqslant\sqrt[3]{e_4},x_i\leqslant\sqrt[4]{e_4},x_i\leqslant\sqrt[5]{e_4},x_i\leqslant(a_4\div 3),x_i\leqslant(a_4\div 4),x_i\leqslant(a_4\div 5),(i=1,2,3,4)$

四、一元 5 次方程

$x^5+[(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5(=a_5)]x^4+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5)x^3+(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_1x_4x_5+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+x_2x_4x_5+x_3x_4x_5)x^2+(x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5)x+x_1x_2x_3x_4x_5=0$ $(x_1x_2x_3x_4x_5=e_5\neq 0)$

$$(x^5+a_5x^4+b_5x^3+c_5x^2+d_5x^1+e_5=0,e_5\neq 0)$$

根的范围: $x_i\leqslant\sqrt[5]{e_5},x_i\leqslant\sqrt[6]{e_5},x_i\ \sqrt[4]{e_5},x_i\leqslant\sqrt[3]{e_5},x_i\leqslant(a_5\div 3$ 或 $\div 4$ 或 $\div 5$ 或 $\div 6),(i=1,2,3,4,5)$

五、一元 6 次方程

$x^6+(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)x^5+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_1x_6+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_2x_6+x_3x_4+x_3x_5+x_3x_6+x_4x_5+x_4x_6+x_5x_6)x^4+(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_1x_2x_6+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_1x_3x_6+x_1x_4x_5+x_1x_4x_6+x_1x_5x_6+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+x_2x_3x_6+x_2x_4x_5+x_2x_4x_6+x_2x_5x_6+x_3x_4x_5+x_3x_4x_6+x_3x_5x_6+x_4x_5x_6)x^3+(x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_3x_6+x_1x_2x_4x_5+x_1x_2x_4x_6+$

$x_1x_2x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_6 + x_2x_3x_5x_6 + x_2x_4x_5x_6 +$
$x_3x_4x_5x_6)x^2 + (x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_6 + x_1x_2x_3x_5x_6 + x_1x_2x_4x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6)x +$
$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 0$

$$(x^6 + a_6x^5 + b_6x^4 + c_6x^3 + d_6x^2 + e_6x + f_6 = 0, f_6 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \neq 0)$$

根的范围：$x_i \leqslant \sqrt[4]{f_6}, x_i \leqslant \sqrt[5]{f_6}, x_i \leqslant \sqrt[6]{f_6}, x_i \leqslant \sqrt[7]{f_6}, x_i \leqslant (a_6 \div 4), x_i \leqslant (a_6 \div 5), x_i \leqslant (a_6 \div 6), x_i \leqslant (a_6 \div 7)$

六、一元7次方程

$$x^7 - a_7x^6 + b_7x^5 - c_7x^4 + d_7x^3 - e_7x^2 + f_7x^1 - g_7 = 0(g_7 \neq 0) \qquad (1)$$

$x^7 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)x^6 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_1x_7 + x_2x_3 +$
$x_2x_4 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6 + x_5x_7 + x_6x_7)x^5 -$
$(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_2x_6 + x_1x_2x_7 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_3x_6 + x_1x_3x_7 + x_1x_4x_5 + x_1x_4x_6 +$
$x_1x_4x_7 + x_1x_5x_6 + x_1x_5x_7 + x_1x_6x_7 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + x_2x_3x_6 + x_2x_3x_7 + x_2x_4x_5 + x_2x_4x_6 + x_2x_4x_7 +$
$x_2x_5x_6 + x_2x_5x_7 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_5 + x_3x_4x_6 + x_3x_4x_7 + x_3x_5x_6 + x_3x_5x_7 + x_3x_6x_7 + x_4x_5x_6 + x_4x_5x_7 +$
$x_4x_6x_7 + x_5x_6x_7)x^4 + (x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_6 + x_1x_2x_3x_7 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_4x_6 + x_1x_2x_4x_7 +$
$x_1x_2x_5x_6 + x_1x_2x_5x_7 + x_1x_2x_6x_7 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_3x_4x_7 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_3x_5x_7 + x_1x_3x_6x_7 +$
$x_1x_4x_5x_6 + x_1x_4x_5x_7 + x_1x_4x_6x_7 + x_1x_5x_6x_7 + x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_6 + x_2x_3x_4x_7 + x_2x_3x_5x_6 + x_2x_3x_5x_7 +$
$x_2x_3x_6x_7 + x_2x_4x_5x_6 + x_2x_4x_5x_7 + x_2x_4x_6x_7 + x_2x_5x_6x_7 + x_3x_4x_5x_6 + x_3x_4x_5x_7 + x_3x_4x_6x_7 + x_3x_5x_6x_7 +$
$x_4x_5x_6x_7)x^3 - (x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_6 + x_1x_2x_3x_4x_7 + x_1x_2x_3x_5x_6 + x_1x_2x_3x_5x_7 + x_1x_2x_3x_6x_7 +$
$x_1x_2x_4x_5x_6 + x_1x_2x_4x_5x_7 + x_1x_2x_4x_6x_7 + x_1x_2x_5x_6x_7 + x_1x_3x_4x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5x_7 + x_1x_3x_4x_6x_7 +$
$x_1x_3x_5x_6x_7 + x_1x_4x_5x_6x_7 + x_2x_3x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5x_7 + x_2x_3x_4x_6x_7 + x_2x_3x_5x_6x_7 + x_2x_4x_5x_6x_7 +$
$x_3x_4x_5x_6x_7)x^2 + (x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4x_5x_7 + x_1x_2x_3x_4x_6x_7 + x_1x_2x_3x_5x_6x_7 + x_1x_2x_4x_5x_6x_7 +$
$x_1x_3x_4x_5x_6x_7 + x_2x_3x_4x_5x_6x_7)x^1 - x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 = 0 \quad (x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 \neq 0)$ (2)

七、一元8次方程

$x^8 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)x^7 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_1x_7 +$
$x_1x_8 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 + x_2x_8 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_3x_8 + x_4x_5 + x_4x_6 +$
$x_4x_7 + x_4x_8 + x_5x_6 + x_5x_7 + x_5x_8 + x_6x_7 + x_6x_8 + x_7x_8)x^6 - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_2x_6 +$
$x_1x_2x_7 + x_1x_2x_8 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_3x_6 + x_1x_3x_7 + x_1x_3x_8 + x_1x_4x_5 + x_1x_4x_6 + x_1x_4x_7 + x_1x_4x_8 +$
$x_1x_5x_6 + x_1x_5x_7 + x_1x_5x_8 + x_1x_6x_7 + x_1x_6x_8 + x_1x_7x_8 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + x_2x_3x_6 + x_2x_3x_7 + x_2x_3x_8 +$
$x_2x_4x_5 + x_2x_4x_6 + x_2x_4x_7 + x_2x_4x_8 + x_2x_5x_6 + x_2x_5x_7 + x_2x_5x_8 + x_2x_6x_7 + x_2x_6x_8 + x_2x_7x_8 + x_3x_4x_5 +$
$x_3x_4x_6 + x_3x_4x_7 + x_3x_4x_8 + x_3x_5x_6 + x_3x_5x_7 + x_3x_5x_8 + x_3x_6x_7 + x_3x_6x_8 + x_3x_7x_8 + x_4x_5x_6 + x_4x_5x_7 +$
$x_4x_5x_8 + x_4x_6x_7 + x_4x_6x_8 + x_4x_7x_8 + x_5x_6x_7 + x_5x_6x_8 + x_5x_7x_8 + x_6x_7x_8)x^5 + (x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 +$
$x_1x_2x_3x_6 + x_1x_2x_3x_7 + x_1x_2x_3x_8 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_4x_6 + x_1x_2x_4x_7 + x_1x_2x_4x_8 + x_1x_2x_5x_6 + x_1x_2x_5x_7 +$
$x_1x_2x_5x_8 + x_1x_2x_6x_7 + x_1x_2x_6x_8 + x_1x_2x_7x_8 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_3x_4x_7 + x_1x_3x_4x_8 + x_1x_3x_5x_6 +$
$x_1x_3x_5x_7 + x_1x_3x_5x_8 + x_1x_3x_6x_7 + x_1x_3x_6x_8 + x_1x_3x_7x_8 + x_1x_4x_5x_6 + x_1x_4x_5x_7 + x_1x_4x_5x_8 + x_1x_4x_6x_7 +$
$x_1x_4x_6x_8 + x_1x_4x_7x_8 + x_1x_5x_6x_7 + x_1x_5x_6x_8 + x_1x_5x_7x_8 + x_1x_6x_7x_8 + x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_6 + x_2x_3x_4x_7 +$
$x_2x_3x_4x_8 + x_2x_3x_5x_6 + x_2x_3x_5x_7 + x_2x_3x_5x_8 + x_2x_3x_6x_7 + x_2x_3x_6x_8 + x_2x_3x_7x_8 + x_2x_4x_5x_6 + x_2x_4x_5x_7 +$
$x_2x_4x_5x_8 + x_2x_4x_6x_7 + x_2x_4x_6x_8 + x_2x_4x_7x_8 + x_2x_5x_6x_7 + x_2x_5x_6x_8 + x_2x_5x_7x_8 + x_2x_6x_7x_8 + x_3x_4x_5x_6 +$
$x_3x_4x_5x_7 + x_3x_4x_5x_8 + x_3x_4x_6x_7 + x_3x_4x_6x_8 + x_3x_4x_7x_8 + x_3x_5x_6x_7 + x_3x_5x_6x_8 + x_3x_5x_7x_8 + x_3x_6x_7x_8 +$

$x_4x_5x_6x_7 + x_4x_5x_6x_8 + x_4x_5x_7x_8 + x_4x_6x_7x_8 + x_5x_6x_7x_8)x^4 - (x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_6 + x_1x_2x_3x_4x_7 +$
$x_1x_2x_3x_4x_8 + x_1x_2x_3x_5x_6 + x_1x_2x_3x_5x_7 + x_1x_2x_3x_5x_8 + x_1x_2x_3x_6x_7 + x_1x_2x_3x_6x_8 + x_1x_2x_3x_7x_8 +$
$x_1x_2x_4x_5x_6 + x_1x_2x_4x_5x_7 + x_1x_2x_4x_5x_8 + x_1x_2x_4x_6x_7 + x_1x_2x_4x_6x_8 + x_1x_2x_4x_7x_8 + x_1x_2x_5x_6x_7 +$
$x_1x_2x_5x_6x_8 + x_1x_2x_5x_7x_8 + x_1x_2x_6x_7x_8 + x_1x_3x_4x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5x_7 + x_1x_3x_4x_5x_8 + x_1x_3x_4x_6x_7 + x_1x_3x_4x_6x_8 +$
$x_1x_3x_4x_7x_8 + x_1x_3x_5x_6x_7 + x_1x_3x_5x_6x_8 + x_1x_3x_5x_7x_8 + x_1x_3x_6x_7x_8 + x_1x_4x_5x_6x_7 + x_1x_4x_5x_6x_8 + x_1x_4x_5x_7x_8 +$
$x_1x_4x_6x_7x_8 + x_1x_5x_6x_7x_8 + x_2x_3x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5x_7 + x_2x_3x_4x_5x_8 + x_2x_3x_4x_6x_7 + x_2x_3x_4x_6x_8 + x_2x_3x_4x_7x_8 +$
$x_2x_3x_5x_6x_7 + x_2x_3x_5x_6x_8 + x_2x_3x_5x_7x_8 + x_2x_3x_6x_7x_8 + x_2x_4x_5x_6x_7 + x_2x_4x_5x_6x_8 + x_2x_4x_5x_7x_8 + x_2x_4x_6x_7x_8 +$
$x_2x_5x_6x_7x_8 + x_3x_4x_5x_6x_7 + x_3x_4x_5x_6x_8 + x_3x_4x_5x_7x_8 + x_3x_4x_6x_7x_8 + x_3x_5x_6x_7x_8 + x_4x_5x_6x_7x_8)x^3 +$
$(x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4x_5x_7 + x_1x_2x_3x_4x_5x_8 + x_1x_2x_3x_4x_6x_7 + x_1x_2x_3x_4x_6x_8 + x_1x_2x_3x_4x_7x_8 + x_1x_2x_3x_5x_6x_7 +$
$x_1x_2x_3x_5x_6x_8 + x_1x_2x_3x_5x_7x_8 + x_1x_2x_3x_6x_7x_8 + x_1x_2x_4x_5x_6x_7 + x_1x_2x_4x_5x_6x_8 + x_1x_2x_4x_5x_7x_8 + x_1x_2x_4x_6x_7x_8 +$
$x_1x_2x_5x_6x_7x_8 + x_1x_3x_4x_5x_6x_7 + x_1x_3x_4x_5x_6x_8 + x_1x_3x_4x_5x_7x_8 + x_1x_3x_4x_6x_7x_8 + x_1x_3x_5x_6x_7x_8 + x_1x_4x_5x_6x_7x_8 +$
$x_2x_3x_4x_5x_6x_7 + x_2x_3x_4x_5x_6x_8 + x_2x_3x_4x_5x_7x_8 + x_2x_3x_4x_6x_7x_8 + x_2x_3x_5x_6x_7x_8 + x_2x_4x_5x_6x_7x_8 + x_3x_4x_5x_6x_7x_8)x^2 -$
$(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_8 + x_1x_2x_3x_4x_5x_7x_8 + x_1x_2x_3x_4x_6x_7x_8 + x_1x_2x_3x_5x_6x_7x_8 + x_1x_2x_4 \cdot$
$x_5x_6x_7x_8 + x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_8 + x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8)x^1 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 = 0$
$(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 \neq 0)$ (1)

八、一元 9 次方程

$x^9 - a_9x^8 + b_9x^7 - c_9x^6 + d_9x^5 - e_9x^4 + f_9x^3 - g_9x^2 + h_9x^1 - i_9 = 0(i_9 \neq 0)$ (1)

x^9 - (1 2 3 4 5 6 7 8 9) x^8 + (12 13 14 15 16 17 18 19 23
24 25 26 27 28 29 34 35 36 37 38 39 45 46 47 48 49 56 57
58 59 67 68 69 78 79 89) x^7
- (123 124 125 126 127 128 129 134 135 136 137 138 139 145 146
147 148 149 156 157 158 159 167 168 169 178 179 189 234 235
236 237 238 239 245 246 247 248 249 256 257 258 259 267 268
269 278 279 289 345 346 347 348 349 356 357 358 359 367
368 369 378 379 389 456 457 458 459 467 468 469 478 479 489
567 568 569 578 579 589 678 679 689 789) x^6 + (1234 1235 1236 1237
1238 1239 1245 1246 1247 1248 1249 1256 1257 1258 1259 1267
1268 1269 1278 1279 1289 1345 1346 1347 1348 1349 1356 1357 1358
1359 1367 1368 1369 1378 1379 1389 1456 1457 1458 1459 1467
1468 1469 1478 1479 1489 1567 1568 1569 1578 1579 1589 1678 1679
1689 1789 2345 2346 2347 2348 2349 2356 2357 2358 2359 2367
2368 2369 2378 2379 2389 2456 2457 2458 2459 2467 2468 2469 2478
2479 2489 2567 2568 2569 2578 2579 2589 2678 2679 2689 2789
3456 3457 3458 3459 3467 3468 3469 3478 3479 3489 3567 3568 3569
3578 3579 3589 3678 3679 3689 3789 4567 4568 4569 4578 4579
4589 4678 4679 4689 4789 5678 5679 5689 5789 6789) x^5 - (12345 12346
12347 12348 12349 12356 12357 12358 12359 12367 12368 12369 12378
12379 12389 12456 12457 12458 12459 12467 12468 12469 12478 12479

12489 12567 12568 12569 12578 12579 12589 12678 12679 12689 12789
13456 13457 13458 13459 13467 13468 13469 13478 13479 13489 13567
13568 13569 13578 13579 13589 13678 13679 13689 13789 14567 14568
14569 14578 14579 14589 14678 14679 14689 14789 15678 15679 15689
15789 16789 23456 23457 23458 23459 23467 23468 23469 23478 23479
23489 23567 23568 23569 23578 23579 23589 23678 23679 23689 23789
24567 24568 24569 24578 24579 24589 24678 24679 24689 24789 25678
25679 25689 25789 26789 34567 34568 34569 34578 34579 34589 34678
34679 34689 34789 35678 35679 35689 35789 36789 45678 45679 45689
45789 46789 56789) x^4 + (123456 123457 123458 123459 123467 123468
123469 123478 123479 123489 123567 123568 123569 123578 123579
123589 123678 123679 123689 123789 124567 124568 124569 124578
124579 124589 124678 124679 124689 124789 125678 125679 125689
125789 126789 134567 134568 134569 134578 134579 134589 134678
134679 134689 134789 135678 135679 135689 135789 136789 145678
145679 145689 145789 146789 156789 234567 234568 234569 234578
234579 234589 234678 234679 234689 234789 235678 235679 235689
235789 236789 245678 245679 245689 245789 246789 256789 345678
345679 345689 345789 346789 356789 456789) x^3 − (1234567 1234568 1234569
1234578 1234579 1234589 1234678 1234679 1234689 1234789 1235678
1235679 1235689 1235789 1236789 1245678 1245679 1245689 1245789
1246789 1256789 1345678 1345679 1345689 1345789 1346789 1356789
1456789 2345678 2345679 2345689 2345789 2346789 2356789 2456789
3456789) x^2 + (12345678 12345679 12345689 12345789 12346789 12356789
12456789 13456789 23456789) x^1 − 123456789 = 0 (2)

九、一元 10 次方程

$$x^{10}-a_{10}x^{9}+b_{10}x^{8}-c_{10}x^{7}+d_{10}x^{6}-e_{10}x^{5}+f_{10}x^{4}-g_{10}x^{3}+h_{10}x^{2}-i_{10}x^{1}+j_{10}=0 \quad (j_{10}\neq 0) \tag{1}$$

x^{10} − (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10) x^9 + [12 13 14 15 16 17 18 19
23 24 25 26 27 28 29 34 35 36 37 38 39 45 46 47 48 49 56
57 58 59 67 68 69 78 79 89 + (1 2 3 4 5 6 7 8 9) 10] x^8 − [123
124 125 126 127 128 129 134 135 136 137 138 139 145 146 147
148 149 156 157 158 159 167 168 169 178 179 189 234 235 236
237 238 239 245 246 247 248 249 256 257 258 259 267 268 269
278 279 289 345 346 347 348 349 356 357 358 359 367 368 369
378 379 389 456 457 458 459 467 468 469 478 479 489 567 568
569 578 579 589 678 679 689 789) + (12 13 14 15 16 17 18 19 23
24 25 26 27 28 29 34 35 36 37 38 39 45 46 47 48 49 56 57
58 59 67 68 69 78 79 89) 10] x^7 + [1234 1235 1236 1237 1238 1239

1245 1246 1247 1248 1249 1256 1257 1258 1259 1267 1268 1269
1278 1279 1289 1345 1346 1347 1348 1349 1356 1357 1358 1359 1367
1368 1369 1378 1379 1389 1456 1457 1458 1459 1467 1468 1469
1478 1479 1489 1567 1568 1569 1578 1579 1589 1678 1679 1689 1789
2345 2346 2347 2348 2349 2356 2357 2358 2359 2367 2368 2369
2378 2379 2389 2456 2457 2458 2459 2467 2468 2469 2478 2479 2489
2567 2568 2569 2578 2579 2589 2678 2679 2689 2789 3456 3457
3458 3459 3467 3468 3469 3478 3479 3489 3567 3568 3569 3578 3579
3589 3678 3679 3689 3789 4567 4568 4569 4578 4579 4589 4678
4679 4689 4789 5678 5679 5689 5789 6789 + (123 124 125 126 127
128 129 134 135 136 137 138 139 145 146 147 148 149 156 157
158 159 167 168 169 178 179 189 234 235 236 237 238 239 245
246 247 248 249 256 257 258 259 267 268 269 278 279 289 345
346 347 348 349 356 357 358 359 367 368 369 378 379 389 456
457 458 459 467 468 469 478 479 489 567 568 569 578 579 589
678 679 689 789) 10] x^6 − [12345 12346 12347 12348 12349 12356 12357
12358 12359 12367 12368 12369 12378 12379 12389 12456 12457 12458
12459 12467 12468 12469 12478 12479 12489 12567 12568 12569 12578
12579 12589 12678 12679 12689 12789 13456 13457 13458 13459 13467
13468 13469 13478 13479 13489 13567 13568 13569 13578 13579 13589
13678 13679 13689 13789 14567 14568 14569 14578 14579 14589 14678
14679 14689 14789 15678 15679 15689 15789 16789 23456 23457 23458
23459 23467 23468 23469 23478 23479 23489 23567 23568 23569 23578
23579 23589 23678 23679 23689 23789 24567 24568 24569 24578 24579
24589 24678 24679 24689 24789 25678 25679 25689 25789 26789 34567
34568 34569 34578 34579 34589 34678 34679 34689 34789 35678 35679
35689 35789 36789 45678 45679 45689 45789 46789 56789 + (1234 1235
1236 1237 1238 1239 1245 1246 1247 1248 1249 1256 1257 1258 1259
1267 1268 1269 1278 1279 1289 1345 1346 1347 1348 1349 1356
1357 1358 1359 1367 1368 1369 1378 1379 1389 1456 1457 1458 1459
1467 1468 1469 1478 1479 1489 1567 1568 1569 1578 1579 1589
1678 1679 1689 1789 2345 2346 2347 2348 2349 2356 2357 2358 2359
2367 2368 2369 2378 2379 2389 2456 2457 2458 2459 2467 2468
2469 2478 2479 2489 2567 2568 2569 2578 2579 2589 2678 2679 2689
2789 3456 3457 3458 3459 3467 3468 3469 3478 3479 3489 3567
3568 3569 3578 3579 3589 3678 3679 3689 3789 4567 4568 4569 4578
4579 4589 4678 4679 4689 4789 5678 5679 5689 5789 6789) 10] x^5 +
[123456 123457 123458 123459 123467 123468 123469 123478 123479
123489 123567 123568 123569 123578 123579 123589 123678 123679

123689 123789 124567 124568 124569 124578 124579 124589 124678 124679 124689 124789 125678 125679 125689 125789 126789 134567 134568 134569 134578 134579 134589 134678 134679 134689 134789 135678 135679 135689 135789 136789 145678 145679 145689 145789 146789 156789 234567 234568 234569 234578 234579 234589 234678 234679 234689 234789 235678 235679 235689 235789 236789 245678 245679 245689 245789 246789 256789 345678 345679 345689 345789 346789 356789 456789 + (12345 12346 12347 12348 12349 12356 12357 12358 12359 12367 12368 12369 12378 12379 12389 12456 12457 12458 12459 12467 12468 12469 12478 12479 12489 12567 12568 12569 12578 12579 12589 12678 12679 12689 12789 13456 13457 13458 13459 13467 13468 13469 13478 13479 13489 13567 13568 13569 13578 13579 13589 13678 13679 13689 13789 14567 14568 14569 14578 14579 14589 14678 14679 14689 14789 15678 15679 15689 15789 16789 23456 23457 23458 23459 23467 23468 23469 23478 23479 23489 23567 23568 23569 23578 23579 23589 23678 23679 23689 23789 24567 24568 24569 24578 24579 24589 24678 24679 24689 24789 25678 25679 25689 25789 26789 34567 34568 34569 34578 34579 34589 34678 34679 34689 34789 35678 35679 35689 35789 36789 45678 45679 45689 45789 46789 56789) 10] x^4 – [1234567 1234568 1234569 1234578 1234579 1234589 1234678 1234679 1234689 1234789 1235678 1235679 1235689 1235789 1236789 1245678 1245679 1245689 1245789 1246789 1256789 1345678 1345679 1345689 1345789 1346789 1356789 1456789 2345678 2345679 2345689 2345789 2346789 2356789 2456789 3456789 + (123456 123457 123458 123459 123467 123468 123469 123478 123479 123489 123567 123568 123569 123578 123579 123589 123678 123679 123689 123789 124567 124568 124569 124578 124579 124589 124678 124679 124689 124789 125678 125679 125689 125789 126789 134567 134568 134569 134578 134579 134589 134678 134679 134689 134789 135678 135679 135689 135789 136789 145678 145679 145689 145789 146789 156789 234567 234568 234569 234578 234579 234589 234678 234679 234689 234789 235678 235679 235689 235789 236789 245678 245679 245689 245789 246789 256789 345678 345679 345689 345789 346789 356789 456789) 10] x^3 + [12345678 12345679 12345689 12345789 12346789 12356789 12456789 13456789 23456789 + (1234567 1234568 1234569 1234578 1234579 1234589 1234678 1234679 1234689 1234789 1235678 1235679 1235689 1235789 1236789 1245678 1245679 1245689 1245789 1246789 1256789 1345678 1345679 1345689 1345789 1346789 1356789 1456789 2345678 2345679 2345689 2345789 2346789 2356789 2456789 3456789) 10] x^2 – [123456789 + (12345678

12345679　12345689　12345789　12346789　12356789　12456789　13456789　23456789)10]x^1 +1　2　3　4　5　6　7　8　9　10 =0　　(2)

…　　　…

十、一元 n 次方程

$$x^n-(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_i+\cdots+x_{n-1}+x_n)x^{n-1}+\{[(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_{n-1})+x_1x_n]+[(x_2x_3+x_2x_4+\cdots+x_2x_{n-1})+x_2x_n]+\cdots+(x_{n-2}x_{n-1})+x_{n-1}x_n)\}x^{n-2}+\cdots+[x_1x_2x_3\cdots(x_{n-3})(x_{n-2})+\cdots]x^2-[x_1x_2x_3\cdots(x_{n-2})(x_{n-1})+\cdots]x^1+x_1x_2x_3\cdots x_i\cdots x_{n-1}x_n=0(x_1x_2x_3\cdots x_i\cdots x_n\neq 0)(n\geqslant 1)$$ （实根）

1.2 一元2、4、6、8、10、n 次方程每项根与系数关系的结构(复根)

一、一元 2 次方程

$$x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2=0$$

二、一元 4 次方程

$$x^4-2(a_1+a_2)x^3+(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)x^2-2[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)]x+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=0$$

三、一元 6 次方程

$$x^6-2(a_1+a_2+a_3)x^5+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]x^4-2[a_1\cdot(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)+a_3(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)+(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)]x^3+\{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)+4a_3[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)]+(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)(a_3^2+b_3^2)\}x^2-\{a_3(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)+[a_1(a_2^2+b_2^2)\cdot(a_3^2+b_3^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)](a_3^2+b_3^2)\}x+(a_1^2+b_1^2)\cdot(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)=0$$

四、一元 8 次方程

$$x^8-2(a_1+a_2+a_3+a_4)x^7+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)]x^6-2\{a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)+a_3[a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]+(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)+(a_1+a_2+a_3)(a_4^2+b_4^2)\}x^5+\{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)+4a_4(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)+4[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)](a_3+a_4)+(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)(a_3^2+b_3^2+4a_3a_4)+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)](a_4^2+b_4^2)\}x^4-2\{[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)](a_3^2+a_4^2+b_3^2+b_4^2+4a_3a_4)+(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)\cdot[a_3(a_4^2+b_4^2)+a_4(a_3^2+b_3^2)]+(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_3+a_4)(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\}x^3+\{(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)][a_3(a_4^2+b_4^2)+a_4(a_3^2+b_3^2)]+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_4^2+b_4^2+4a_3a_4)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\cdot(a_3^2+b_3^2)\}x^2-2\{a_1(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)a_2(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)\cdot(a_2^2+b_2^2)a_3(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)a_4\}x^1+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\cdot(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)=0$$

五、一元 10 次方程

$$x^{10}-2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)x^9+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+$$

$$4(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_1a_5+a_2a_3+a_2a_4+a_2a_5+a_3a_4+a_3a_5+a_4a_5)]x^8-2\{a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)+a_3(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)+a_4[(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]+a_5[a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)]+(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)+(a_1+a_2+a_3)(a_4^2+b_4^2+a_5^2+b_5^2)\}x^7+\{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)+[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)][4(a_3+a_4+a_5)]+(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)[a_3^2+b_3^2+4a_3(a_4^2+a_5^2)][(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)](a_4^2+b_4^2+4a_4a_5)+4(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)(a_4+a_5)+(a_1+a_2+a_3)(a_4^2+b_4^2)+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)](a_5^2+b_5^2)\}x^6-2\{(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+a_5^2+b_4^2+b_5^2+4a_4a_5)+(a_1+a_2+a_3)(a_4^2+b_4^2)(a_5^2+b_5^2)+[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)][a_3^2+b_3^2+a_4^2+b_4^2+b_5^2+a_5^2+4(a_3a_4+a_3a_5+a_4a_5)]+(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)[a_3(a_4^2+b_4^2+a_5^2+b_5^2)+a_4(a_3^2+b_3^2)+a_5(a_3^2+b_3^2+4a_3a_4)]+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)][a_5(a_4^2+b_4^2)+a_4(a_5^2+b_5^2)+(a_3+a_4+a_5)(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\})x^5+\{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)+4[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)][a_3(a_4^2+b_4^2)+a_4(a_5^2+b_5^2)+a_5(a_3^2+b_3^2+a_4^2+b_4^2+4a_3a_4)+(a_3+a_4)(a_5^2+b_5^2)](a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)[(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+4a_3a_5(a_4^2+b_4^2)+4a_4a_5(a_3^2+b_3^2)+(a_3^2+b_3^2+4a_3a_4)(a_5^2+b_5^2)]+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)](a_4^2+b_4^2)(a_5^2+b_5^2)+4(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)[a_5(a_4^2+b_4^2)+a_4(a_5^2+b_5^2)]+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)[a_4^2+b_4^2+4a_3a_4+a_5^2+b_5^2+a_3+a_4\}x^4-2\{a_1(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)a_2(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)a_3(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)a_4+(a_1+a_2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)(a_5^2+b_5^2)+(a_3+a_4)(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_5^2+b_5^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)+[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)][4a_5a_3(a_4^2+b_4^2)+4a_5a_4(a_3^2+b_3^2)+(a_3^2+b_3^2+a_4^2+b_4^2+4a_3a_4)\cdot(a_5^2+b_5^2)]+(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)[a_5(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+a_3(a_4^2+b_4^2)+a_4(a_3^2+b_3^2)]\cdot(a_5^2+b_5^2)+a_5(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_4^2+b_4^2+4a_3a_4)\}x^3+\{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+4a_5[a_1(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)a_2(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)a_3(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)a_4]+(a_5^2+b_5^2)(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+4a_1a_2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)]+4(a_5^2+b_5^2)[a_1(a_2^2+b_2^2)+a_2(a_1^2+b_1^2)][a_3(a_4^2+b_4^2)+a_4(a_3^2+b_3^2)]+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_4^2+b_4^2+4a_3a_4)(a_5^2+b_5^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_5^2+b_5^2)\}x^2-2(a_5^2+b_5^2)[a_1(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)a_2(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\cdot a_3(a_4^2+b_4^2)+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)a_4]+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)\cdot(a_5^2+b_5^2)=0$$

……

六、一元 *n* 次方程

$$x^n-2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)x^{n-1}+[a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2+4(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n]x^{n-2}+\cdots+[(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2)+\cdots]x^2-2[(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2)a_n+\cdots]x+(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)\cdot\cdots\cdot(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2)(a_n^2+b_n^2)=0$$

第 2 章

方 程 证 法

证明一元方程 $x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x - a_n = 0(a_n \neq 0)$ 有 n 个根(实根、复根)成立，其证明方法(消元法)有以下 3 种。

2.1 证法 1(消元法)：秦九韶法 1、余数定理与综合除法、多项式除以单项式法(实根)

一、秦九韶法 1

例题 求 $x^5 + x^4 + x + 1 = 0$ 的解。

解

$$\begin{array}{r|l} 1+1+0+0+1+1 & \\ +\quad -1+0+0+0-1 & -1 \\ \hline 1+0+0+0+1\quad 0 & \end{array} \tag{1}$$

所以 $x = -1$ 是方程(1)的一个根。

检验 $f(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

所以 $x = -1$ 是方程(1)的一个根成立。

本证法可以写成一元 2 次方程 $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$。

证明 设 x_1 为方程(1)的一个根

$$a_0 = b_0 \qquad \begin{array}{ccc|l} a_0 & a_1 & a_2 & x_1 \\ & b_0x_1 & b_1x_1 & \\ \hline b_0 & b_1 & b_1 & \end{array}$$

($= r =$ 余数 $= 0$)，则 x_1 为方程(1)的一个根。

本证法可适用于一元 n 次方程 $x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x - a_n = 0(a_n \neq 0)$ 有 n 个根(实根)成立。

二、余数定理与综合除法

若 c 为一常数，则多项式 $f(x)$ 除以 $(x-c)$ 所得余数等于 $f(c)$。

设 $f(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x - a_n$，求 $f(x)$ 除以 $x-c$ 的商式与余数，其计算格式如下：

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \quad /c \\ & b_0c & b_1c & \cdots & b_{n-2}c & b_{n-1}c \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

式中，$b_0 = a_0, b_i = a_i + b_{i-1}c(i = 1, 2, \cdots n)$，于是得到

商式 $g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$

余数 $r=b_n=f(c)$，若余数 $=r=b_n=f(c)=0$，则 c 是方程(1)的一个根；若余数 $=r=b_n=f(c)\neq0$，则剩下方程应用余数定理与综合除法继续演算下去，则得小数根或无理根。

三、多项式除以单项式法

据此，可以求证方程(1)有 n 个根成立。

证明证法 1：秦九韶法 1、余数定理与综合除法、多项式除以单项式法

$$
\begin{array}{llllllllll}
a_0=b_0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & /x_1 \\
 & & b_0x_1 & b_1x_1 & b_2x_1 & \cdots & b_{n-4}x_1 & b_{n-3}x_1 & b_{n-2}x_1 & b_{n-1}x & \\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n(=r=0) & /x_2 \\
 & & b_0x_2 & c_1x_2 & c_2x_2 & \cdots & c_{n-3}x_2 & c_{n-2}x_2 & c_{n-1}x_2 & & \\
\hline
 & b_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n(=r_2=0) & & /x_3 \\
 & & b_0x_3 & d_1x_3 & d_2x_3 & \cdots & d_{n-2}x_3 & d_{n-1}x_3 & & & \\
\hline
 & b_0 & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n-1} & d_n(=r_3=0) & & & \\
 & & & & & \cdots\cdots & & & & & \\
 & b_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n(=r_i=0) & & /x_i & & \\
 & & & & & \cdots\cdots & & & & & \\
 & b_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3(=r_{n-2}=0) & & & /x_{n-2} & & & \\
 & b_0 & \gamma_1 & \gamma_2(=r_{n-1}=0) & & & & /x_{n-1} & & & \\
 & b_0 & \delta_1 & (=r_n=0) & & & /x_n & & & &
\end{array}
$$

所以 x_1、x_2、x_3、$\cdots$、x_i、$\cdots$、x_n 是方程(1)的 n 个根成立。

附注 1：方程(1) $\div x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，试除。

1. 若余数：

$r_{1-1}>0$，$r_{1-2}>0$，$r_{1-3}=0$，则 x_1 是方程(1)的一个根；

$r_{2-1}<0$，$r_{2-2}=0$，则 x_2 是方程(1)的第二个根；

……

$r_i=0$，　则 x_i 是方程(1)的第 i 个根；

……

$r_n=0$，则 x_n 是方程(1)的第 n 个根。

2. 根的范围

设所求根为 x_i 则

$x_i\leqslant\sqrt[n]{a_n}$　(常数项 n 个素因数积的中间值(或称为平均值))

$\cdots\sqrt[n+2]{a_n}\leqslant\sqrt[n+1]{a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_n}\leqslant\sqrt[n-1]{a_n}\leqslant\sqrt[n-2]{a_n}\cdots$

3. 检验(1) n 个根之和相反数 $=-(x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n)=-a_1=(n-1)$ 项系数；

(2) n 个根之积相反数 $=-x_1x_2\cdots x_i\cdots x_n=-a_n=$ 常数项。

所以 x_1、x_2、$\cdots$、x_i、$\cdots$、x_n 是方程(1)的 n 个根成立。

附注 2：求方程(1)有小数根 $(0\sim a)$（纯小数根或无理数根），其演算格式如下：

$a_0=b_0$

$$\begin{array}{llllllll}
a_0 & a_1 & a_2 & +\cdots+ & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & /-0 \\
 & a_1\times10 & a_2\times10^2 & +\cdots+ & a_{n-2}\times10^{n-2} & a_{n-1}\times10^{n-1} & a_n\times10^n & /-0.x_{1-1}x_{1-2}\cdots \\
 & b_0x_{1-1} & b_1x_{1-1} & +\cdots+ & b_{n-3}x_{1-1} & b_{n-2}x_{1-1} & b_{n-1}x_{1-1} & \\
\hline
b_0 & b_1 & b_2 & +\cdots+ & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n[=r_1(\text{余数})>0] & \\
 & b_0x_{1-1} & c_1x_{1-1} & +\cdots+ & c_{n-2}x_{1-1} & c_{n-1}x_{1-1} & & \\
\hline
b_0 & c_1 & c_2 & +\cdots+ & c_{n-1} & c_n[=r_2(\text{余数})>0] & & \\
 & & & \cdots\cdots & & & & \\
b_0 & h(r_{n-1}>0) & & & & & & \\
 & b_0x_{1-1} & & & & & & \\
\hline
b_0 & r_n\times10^1 & r_{n-1}\times10^2 & +\cdots+ & r_3\times10^{n-2} & r_2\times10^{n-1} & r_1\times10^n & /-x_{1-2} \\
 & b_0x_{1-2} & j_1x_{1-2} & +\cdots+ & j_{n-3}x_{1-2} & j_{n-2}x_{1-2} & j_{n-1}x_{1-2} & \\
\hline
b_0 & j_1 & j_2 & +\cdots+ & j_{n-2} & j_{n-1} & j_n[=r_1(\text{余数})>0] & \\
 & b_0x_{1-2} & k_1x_{1-2} & +\cdots+ & k_{n-2}x_{1-2} & k_{n-1}x_{1-2} & & \\
\hline
b_0 & k_1 & k_2 & +\cdots+ & k_{n-1} & k_n[=r_2(\text{余数})>0] & & \\
 & & & \cdots\cdots & & & & \\
b_0 & s[=R_{n-1}(\text{余数})>0] & & & & & & \\
 & b_0x_{1-2} & & & & & & \\
\hline
b_0 & R_n\times10^1 & R_{n-1}\times10^2 & R_{n-2}\times10^3+\cdots+R_3\times10^{n-2} & & R_2\times10^{n-1} & R_1\times10^n & /-x_{1-3}
\end{array}$$

说明：(1) 如上所述，若有限演算下去，则得方程(1)的一个有限不循环纯小数根

$$-x_1=-0.x_{1-1}x_{1-2}\cdots x_{1-i}$$

(2) 若如此无限演算下去，则得方程(1)的一个无限不循环纯小数根(无理数根)

$$-x_1=-0.x_{1-1}x_{1-2}\cdots x_{1-i}\cdots x_{1-n}\quad(n\to\infty)$$

求方程(1)有混小数根 $x_1.x_{1-1}x_{1-2}\cdots$，其演算格式如下：

$a_0=b_0$

$$\begin{array}{lllllll}
a_0 & a_1 & a_2 & +\cdots+a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & /x_1.x_{1-1}x_{1-2}\cdots \\
 & b_0x_1 & b_1x_1 & +\cdots+b_{n-3}x_1 & b_{n-2}x_1 & b_{n-1}x_1 & \\
\hline
b_0 & b_1 & b_2 & +\cdots+b_{n-2} & b_{n-1} & b_n[=r_1(\text{余数})>0] & \\
 & b_0x_1 & c_1x_1 & +\cdots+c_{n-2}x_1 & c_{n-1}x_1 & & \\
\hline
b_0 & c_1 & c_2 & +\cdots+c_{n-1} & c_n[=r_2(\text{余数})>0] & & \\
 & & & \cdots\cdots & & & \\
b_0 & h(=r_{n-1}>0) & & & & & \\
 & b_0x_1 & & & & & \\
\hline
b_0 & r_n\times10^1 & r_{n-1}\times10^2 & +\cdots+r_3\times10^{n-2} & r_2\times10^{n-1} & r_1\times10^n & /x_{1-1} \\
 & b_0x_{1-1} & j_1x_{1-1} & +\cdots+j_{n-3}x_{1-1} & j_{n-2}x_{1-1} & j_{n-1}x_{1-1} & \\
\hline
b_0 & j_1 & j_2 & +\cdots+j_{n-2} & j_{n-1} & j_n[=R_1(\text{余数})>0] & \\
b_0 & x_{1-1} & k_1x_{1-1} & +\cdots+k_{n-2}x_{1-1} & k_{n-1}x_{1-1} & & \\
\hline
b_0 & k_1 & k_2 & +\cdots+k_{n-1} & k_n[=R_2(\text{余数})>0] & & \\
 & & & \cdots\cdots & & & \\
 & b_0x_{1-1}[=R_n(\text{余数})>0] & & & & & \\
\hline
 & b_0 & R_n\times10^1 & R_{n-1}\times10^2+\cdots+R_3\times10^{n-2} & R_2\times10^{n-1} & R_1\times10^n & /x_{1-1} \\
 & & & \cdots\cdots & & &
\end{array}$$

说明：若如此有限演算下去，则得混小数根：$x_1.x_{1-1}x_{1-2}\cdots x_i$。