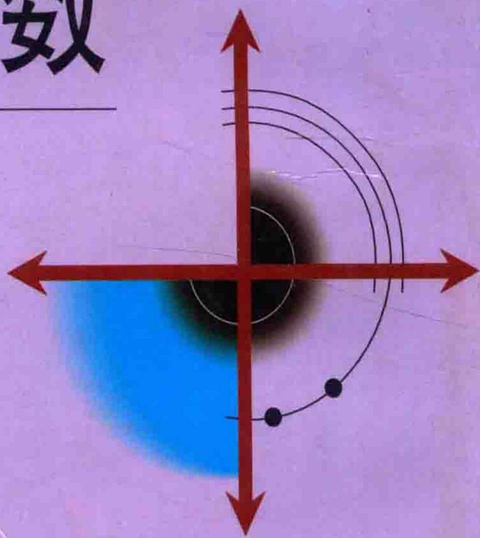
经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

（二）

线性代数

杨桂元◎主编



a_1 a_2 a_3

电子科技大学出版社

经济数学基础

（三）

线性代数

α_1 α_2 α_3

经济数学基础（二）

线性代数

杨桂元　主编

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨桂元主编.一成都:电子科技大学出版社,2004.8
ISBN 7-81065-925-1

I.线... II.杨... III.线性代数-高等学校-教材 IV.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062190 号

经济数学基础(二)

线 性 代 数

杨桂元 主编

出　　版:电子科技大学出版社(成都市建设北路二段四号,邮编 610054)
责任编辑:张　俊
发　　行:电子科技大学出版社
印　　刷:安徽省天歌印刷厂
开　　本:850×1168 1/32 印张 11.125 字数 251 千
版　　次:2004 年 8 月第 2 版
印　　次:2005 年 7 月第 2 次印刷
书　　号:ISBN 7-81065-925-1/O·39
定　　价:16.20 元

前　言

《经济数学基础》(包括《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》)是财经管理类专业的核心课程之一,是一门重要的基础课。学好这门课程不但能为学生将来从事经济计量分析提供有力的工具,而且对于学生逻辑思维能力的培养和创新思维的开发都有着不可替代的作用。

近年来,随着时代的发展和教学改革的不断深入,如何在数学教学中推行素质教育,努力培养学生的创新意识与创新精神,是我们必须面对的一个新课题。过去,我们往往只注重数学知识的传授,但怎样用数学方法解决实际问题却讲得不多,因而学生只会算题,不知道怎么用,而一旦到用的时候,很多数学知识又忘掉了。这是一个很深刻的教训!之所以会形成这种局面,除了课时的限制之外,现行教材中缺乏数学在实际中应用的实例也是一个重要的原因。我们编写这套教材就是为了改变这个现状所作的一种努力和尝试。

这套教材是安徽财经大学《经济数学基础》精品课程建设成果之一,以"高等学校财经管理类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲"和硕士研究生数学考试大纲为依据,遵循"以应用为目的,以必需够用为度"的原则,吸收了国内外同类教材的优点,并揉进了我们教学改革的经验。在编写的过程中,对这门课程的一些经典内容,我们在叙述的时候力求做到深入浅出、简明扼要,同时还增加

了数学方法的介绍及其在经济应用方面的比重。为了巩固学习效果，每节之后都附有一定数量的课后练习，每章之后还配有习题，书后附有练习及习题的答案与提示。可作为教与学的参考。

这套教材的另一个主要特色是每一章后面都附有与教材内容相关的数学应用实例。这些实例都具有一定的针对性，力求理论与实际应用相结合，既可以在课堂上讲授，也可以作为学生的课外阅读材料。希望通过这些实例的阅读或讲授，能缩短教学和实际应用的距离，使学生确实感到数学有用，并知道怎样去用，以培养"用数学"的意识。我们衷心希望通过本课程的学习，能使学生在为后继课程奠定良好基础的同时，数学素养和应用数学知识解决实际问题的能力都能得到提高。

《线性代数》是《经济数学基础》的第二部分。本书由杨桂元任主编，各章的编写人员为：徐永恒编写第一章和第四章，唐晓静编写第二章和第三章，杨桂元编写第五章和第六章及大部分应用实例。全书由主编总纂、修改定稿。

本书在编写过程中，得到了安徽财经大学教务处、信息与计算科学系的领导和各位同仁的大力支持，在此一并致以诚挚的谢意。这次修订是在第一版的基础上，听取了部分院校任课教师的意见，对矩阵、向量、线性方程组的内容进行了重新调整，并调整了部分习题。

由于我们水平有限，书中谬误及不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2004 年 6 月

目　录

第一章 行 列 式

行列式的概念来源于线性方程组的求解.在中学代数里,已经介绍过二阶、三阶行列式的定义、性质和计算.行列式是研究线性代数的一个重要工具,在数学的各个分支以及其他学科中,都有着广泛的应用.在这一章中,我们将介绍 n 阶行列式的定义,讨论它的性质以及计算方法,最后给出解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1 n 阶行列式

一、二阶、三阶行列式

设有二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

由加减消元法,可以得出与其同解的方程组:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组(1.1)有惟一解:

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2&=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

为了记忆的方便,引进符号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并称它为二阶行列式. 二阶行列式的计算可用图 1—1 表示.

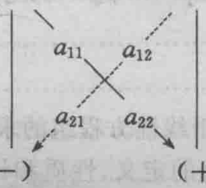


图 1—1

利用二阶行列式概念,(1.2)中的分子可以分别记为:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此,当行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1.1)的解可以表示为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 8 \\ 2x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$$

解 因为方程组中未知量的系数行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3\times 7 - 2\times 4 = 13 \neq 0$$

所以方程组有惟一解. 再计算:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 36, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

于是方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{13},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{13}$$

对于含有三个变量的线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

也有类似的结论. 为此，引进三阶行列式. 记：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式所表示的代数和可以用图 1－2 显示的对角线规则（亦称沙流氏规则）记忆. 图中，沿各实线相连的三个数的积取正号；沿各虚线相连的三个数的积取负号，其代数和即为三阶行列式的值.

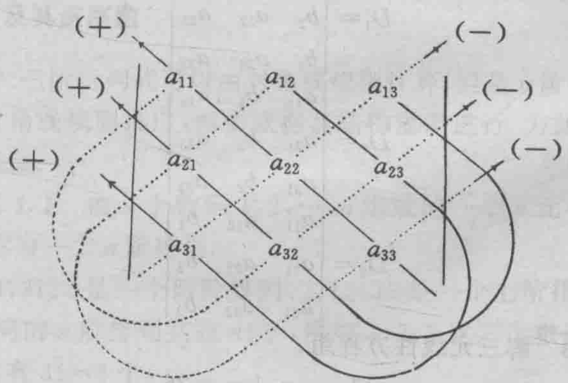


图 1－2

例 2　计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

解 $D=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0$

$-3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6$

$=-10-48=-58$

对于三元线性方程组(1.4),当其系数行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$$

时,由加减消元法得出它的惟一解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.5}$$

式中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 3 解三元线性方程组:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=26 \\ 2x_1-4x_2-x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & -4 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

所以方程组有惟一解. 再计算三个行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix}26 & -1 & 1\\ 9 & -4 & -1\\ 16 & 2 & 1\end{vmatrix}=55$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 26 & 1\\ 2 & 9 & -1\\ 1 & 16 & 1\end{vmatrix}=20$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 26\\ 2 & -4 & 9\\ 1 & 2 & 16\end{vmatrix}=-15$$

方程组的解为:

$$x_1=\frac{55}{5}=11,\quad x_2=\frac{20}{5}=4,\quad x_3=\frac{-15}{5}=-3$$

二、排列及其逆序数

二阶、三阶行列式可以由对角线规则计算,但是 n 阶行列式却不能按对角线规则推广,而要依据其结构规律进行. 为此,先引入排列的概念.

定义 1.1 由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个 n 元有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$,称为一个 n 阶排列.

例如,3124 是一个四阶排列;2715436 是一个七阶排列. 我们知道,不同的 n 阶排列共有 $n!$ 个,例如 1,2,3 这三个数码的不同排列总共有 $3!=6$ 个:

123, 132, 213, 231, 312, 321

定义 1.2 在一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面,即 $i_s>i_t\ (t>s)$ 时,称这一对数 i_s,i_t 构成一个逆

序.一个排列的逆序总数,称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例 4 在排列 25413 中,构成逆序的数对有 21,54,51,53,41,43 共 6 个,因此:

$$\tau(25413)=6$$

例 5 计算排列 $123\cdots n$ 与 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 在 n 阶排列 $123\cdots n$ 中,各个数是按照由小到大的自然顺序排列的,这一排列称为 n 元自然序排列.自然序排列的任何一个数对都不构成逆序,其逆序数为 0,$\tau(123\cdots n)=0$;而在排列 $n(n-1)\cdots 321$ 中,排在 n 之后而小于 n 的数码有 $(n-1)$ 个,排在 $(n-1)$ 之后小于 $(n-1)$ 的数码有 $(n-2)$ 个,…,排在 3 之后小于 3 的数码有 2 个,排在 2 之后小于 2 的数码是 1 个.可见:

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 1.3 逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

如例 4 中的排列 25413 是一个偶排列.容易验证 132,213,321 是奇排列,而 123,231,312 则是偶排列.

定义 1.4 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,把其中的某两个数码 i_s 和 i_t 互换位置,而其余数码不动,就得出另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,对排列施行的这种变换称为对换,常用符号 (i_s,i_t) 表示.

例如,$25413\xrightarrow{(5,1)}21453$.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后,改变其奇偶性.

证明 首先讨论互换相邻两个数码的情形,设排列为 $AijB$,其中 A,B 表示除 i,j 两个数码外的其余数码,经过对换 (i,j),变为排列 $AjiB$.

在这两个排列中,除 i,j 外,其他任何两个数的顺序均未改变,并且 i,j 与 A、B 中数码的次序也没有改变.因此,若 $i<j$,则新排列比原排列增加了一个逆序;反之,则减少了一个逆序.即相邻

对换改变排列的奇偶性.

一般情况,设互换的两个数 i,j 之间还有 k 个数 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,即原排列为 $Aii_1i_2i_3\cdots i_kjB$,经过对换 (i,j) 变为排列 $Aji_1i_2\cdots i_kiB$. 我们可以把它看做是先把 i 依次与 $i_1,i_2,\cdots,i_k,j$ 作 $k+1$ 次相邻对换,得到排列 $Ai_1i_2\cdots i_kjiB$ 后,再把数 j 依次与 $i_k,\cdots,i_2,i_1$ 作 k 次相邻对换而得出. 也就是说 (i,j) 对换可以看做经过上述 $(2k+1)$ 次相邻对换得来,其奇偶性变更了 $(2k+1)$ 次. 即两者的奇偶性恰好是不同的.

定理 1.2 当 $n\geqslant 2$ 时,所有 $n!$ 个 n 阶排列中,奇偶排列各占一半.

证明 设共有 p 个 n 阶奇排列,q 个 n 阶偶排列,$p+q=n!$. 对于 p 个奇排列施行同一个对换 (i,j),那么由定理 1.1,可得出 p 个偶排列,而且不同的奇排列经过同一对换 (i,j) 后不能得到相同的偶排列,故 $p\leqslant q$. 同理,可证 $q\leqslant p$,所以 $p=q=\frac{1}{2}n!$.

三、n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前,我们先来分析一下二、三阶行列式的特点. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

由两个项组成. 每一项都是不同行、不同列的两个元素的乘积. 而三阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

它是所有位于不同行不同列的三个元素乘积的代数和,因此,它的每一个项都有下述形式:

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

且其符号恰好与排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性一致. 所以三阶行列式可以表示成:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中"$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$"表示 $j_1j_2j_3$ 取遍所有的三阶排列时, 对形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的项求和.

通过对二、三阶行列式的分析, 我们不难给出 n 阶行列式的概念.

定义 1.5 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的算符:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 其中横排称为行, 纵排称为列. 它表示所有可能取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 在这个代数和中, 一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的行标按自然顺序排列, 其符号由列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性确定. 若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列则取负号, 而当它是偶排列时取正号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (1.6)$$

其中"$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$"表示对所有的 n 阶排列求和.

由于 n 阶排列共有 $n!$ 个, 所以(1.6)所表示的代数和共有 $n!$

项. 当 $n=2$ 时,就得到二阶行列式;$n=3$ 时,即是三阶行列式;而当 $n=1$ 时,就是一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$. 这里,一阶行列式与绝对值记号虽然形式上一样,但其意义是完全不同的.

例 6 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 按照定义,D 是一个含有 $5!=120$ 项的代数和,但是除了项 $1\times2\times3\times4\times5$ 外,其余各项均为零. 而项 $1\times2\times3\times4\times5$ 的行标排列是自然序排列,列标排列则是 54321,其逆序数 $\tau(54321)=10$,所以 $D=(-1)^{\tau(54321)}1\times2\times3\times4\times5=(-1)^{10}\times120=120$.

例 7 计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

解 根据定义 1.5:

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在上述和式中,只有当 $j_n=n, j_{n-1}=n-1, \cdots, j_2=2, j_1=1$ 时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不为零. 因此:

$$D_n=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

具有(1.7)形状的行列式称为上三角形行列式. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线,主对角线上的元素称为主对角元素. 上三角形行列式是主对角线下方元素全为零的行列式;如果主对角线上方元素全为零,则称为下三角形行列式;而当主对