按教育部新课程标准编写

奥数典型题举一反三

DIANXINGTI

总主编 单墫

前国家数学奥赛教练组组长

国家数学奥林匹克代表队领队

七年级

激活思维

强化训练

拓展提高

長春出版社

奥数典型题

举一反三

七年级

長春出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥数典型题举一反三．七年级/单墫主编．—长春：长春出版社，2006.7（2010.7 重印）

ISBN 978－7－80664－228－3

Ⅰ．奥…　Ⅱ．单…　Ⅲ．数学—中学—教学参考资料　Ⅳ．G624．233

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 049798 号

主　　编：单　墫
责任编辑：杨爱萍
封面设计：郝　威

出版发行：長春出版社　　总编室电话：0431－88563443
发行部电话：0431－88561180　　邮购零售电话：0431－88561177
地　　址：吉林省长春市建设街 1377 号
邮　　编：130061
网　　址：www.cccbs.net
制　　版：吉林省久慧文化有限公司
印　　刷：吉林省吉育印业有限公司
经　　销：新华书店

开　　本：880 毫米×1230 毫米　1/32
字　　数：250 千字
印　　张：9.5
版　　次：2011 年 7 月第 2 版
印　　次：2012 年 3 月第 2 次印刷
定　　价：12.00 元

编写说明

全国中学生数学奥林匹克竞赛是当前我国在青少年中开展素质教育的最高层次的学科知识竞赛。它注重能力的考核，内容广泛，命题新颖，思路开阔，对学生创新能力的培养和发散思维的训练具有极强的指导作用。近几年的全国各省市初中奥数试题，都强调了紧扣新课标要求，与初中教学内容相结合的命题特点。这些试题命题精巧，难度适中，接近中考各科中、高档试题的难度，命题特色也与中考大体相同。因此掌握奥数试题的解题思路和答题技巧，不但对参加奥数、奥赛学有余力的同学培养冲刺竞赛奖牌的能力很有帮助，就是对一般学生补充深化课本知识、开拓思维、冲刺中考也大有裨益。

为此我们编写了这套《奥数典型题举一反三》丛书，本书具有以下特点：

1. 权威性

丛书总主编单墫为国家著名奥赛教练员，南京师范大学教授，博士生导师。曾任国家数学奥赛教练组组长，中国数学奥林匹克代表队领队。全书所有参加编写的人员都是国家、省级奥赛优秀教练员，有着丰富的奥赛指导经验和奥赛图书编写经验，他们指导的学生在国内外各种竞赛中都取得了优异的成绩。

2. 系统性

本书不同于一般的竞赛试题汇编和单纯的方法讲解，而是将所学内容按知识点结构归纳整理，由浅入深、循序渐进。读者通过对一个个知识点的学习，由点及面即可系

统掌握所学内容。

3. 全面性

(1) 能力培养全。本书对学生的思维能力、实验能力、观察检测能力、想象能力、自学能力等多方面能力进行培养训练，全面开发学生智力。(2) 题型收录全。本书类型齐全，覆盖面广，全书悉数收入各科竞赛的热点题、开放题、经典题、与 STS 联系题，以拓宽学生视野，开拓学生思路。(3) 解答提示全。本书不但对精选的典型例题有详尽的分析解答，对一般习题也有详尽的解答提示，便于学生自学、自测。

4. 实用性

本书各章节编排与初中教学内容同步，编排科学、体例新颖。全书均设有 (1) 知识·规律·方法。归纳知识要点，总结一般规律，提炼基本方法。(2) 范例·解析·拓展。精选典型范例，深入分析讲解，纵向思维拓展。(3) 检测·反馈·提高。选编一定量的与本章内容密切相关、难度适中、有较好区分度的习题，检测知识掌握情况，提高解题能力。(4) 思路·点拨·详解。为师、生讲解练习之用，附详细解题过程，点拨思路、指导方法，每份试题实际上就是名师的辅导。书后所附的模拟试题是在认真研究了近几年全国各学科奥赛试题的指导思想、命题特点、题型配置的基础上精心设计的，供学生在复习训练结束时自我检测。

限于我们的水平，书中疏漏之处恐难避免，恳请各位读者批评指正。

编　者

目录

第一章 有理数

第一单元 相反数

知识·规律·方法

数轴和相反数是初中数学中的基本内容,也是竞赛中的必考内容,主要包括以下概念和性质:

❶数轴:

(1)三要素,即原点、正方向、单位长度;

(2)任何有理数都可以用数轴上的点来表示;

(3)数轴上的点所表示的数,右边的数总比左边的数大.

❷相反数:

(1)互为相反数的两个数的和为0;

(2)互为相反数的两个数位于原点的两侧,且到原点的距离相等.

利用这些性质,我们可以解决代数式求值、比较大小及其他相关问题.

范例·解析·拓展

例1 (1)你能找到两个数,使它们互为相反数,它们的倒数也互为相反数吗?

(2)你能找到两个有理数,它们既互为相反数,又互为倒数吗?

解析　(1)这两个数要满足两个条件:①互为相反数;②它们的倒数也互为相反数. 为了满足条件①,可设这两个数为 a 与 $-a$,但我们立即发现,只要 $a\neq0$,这两个数就满足条件②.

(2)所要找的两个有理数要满足两个条件:①互为相反数;②互为倒数. 为了满足条件①,可设两个数为 a 与 $-a$,为了使这两个数又满足条件②,这两个数的乘积应等于1,即 $a\cdot(-a)=1$,显然,满足这个等式的有理数 a 是不存在的.

拓展　如果两个数互为倒数,那么它们的和的倒数与它们的倒数的和也互为倒数吗? 为什么?

答案提示　先用两个具体的数试试看:5 与$\frac{1}{5}$互为倒数,它们的和的倒数为$\frac{1}{5+\frac{1}{5}}$,即$\frac{5}{26}$;而它们的倒数的和为$\frac{1}{5}+5$,即$\frac{26}{5}$,显然,$\frac{5}{26}$与$\frac{26}{5}$也互为倒数.

证明　设这两个数为 a 与$\frac{1}{a}(a\neq0)$,那么

①它们的和的倒数为$\frac{1}{a+\frac{1}{a}}$;②它们的倒数的和为$\frac{1}{a}+a$.

由①、②知$\frac{1}{a+\frac{1}{a}}$与$\frac{1}{a}+a$ 互为倒数.

$\therefore$ 如果两个数互为倒数,那么它们的和的倒数与它们的倒数的和也互为倒数.

例2　已知 a、b 互为相反数,c、d 互为倒数,x 的绝对值等于1,求 $a+b+x^2-cdx$ 的值.

解析　由相反数、倒数及绝对值的定义,得

$a+b=0,cd=1,x=\pm1.$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,原式 $=0+1-1\times1=0$.

当 $x=-1$ 时,原式 $=0+(-1)^2-1\times(-1)=2$.

拓展 若 a、c、d 是整数，b 是正整数，且满足 $a+b=c$，$b+c=d$，$c+d=a$，那么 $a+b+c+d$ 的最大值是 ( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. -5

答案提示 由 $a+b=c$，$b+c=d$，$c+d=a$ 构成方程组，无法解出 a、b、c、d 的值，但若注意到 $b=c-a$ 与 $d=a-c$，则它们互为相反数，问题可解.

$\because a+b=c, c+d=a,$

$\therefore b=c-a, d=a-c.$

$\therefore b+d=0, \therefore d=-b.$

$\because b+c=d, \therefore c=d-b=-2b.$

由 $c+d=a, \therefore a=-3b.$

所以 $a+b+c+d=a+c=-3b-2b=-5b.$

$\because b$ 是正整数，$\therefore -5b$ 的最大值是 -5.

故应选 D.

例3 设 $y=ax^{17}+bx^{13}+cx^{11}-5$，其中 a、b、c 为常数，已知当 $x=-7$ 时，$y=7$，则 $x=7$ 时，y 的值等于 ( )

A. -17 B. -7 C. 14 D. 21

E. 不能唯一确定

解析 若想先用"$x=-7$ 时，$y=7$"这个条件，求出 a、b、c 的值，然后再计算当 $x=7$ 时，y 的值，这是办不到的. 注意到 $x=7$ 与 $x=-7$ 互为相反数，且所给代数式中 x 的指数都是奇数，故应用相反数的性质将轻而易举地使问题得到解决.

解 把 $x=-7$，$y=7$ 代入 $y=ax^{17}+bx^{13}+cx^{11}-5$，

得 $7=a(-7)^{17}+b(-7)^{13}+c(-7)^{11}-5$，

$\therefore a\cdot 7^{17}+b\cdot 7^{13}+c\cdot 7^{11}=-12.$

故当 $x=7$ 时，$y=a\cdot 7^{17}+b\cdot 7^{13}+c\cdot 7^{11}-5=-12-5=-17.$

$\therefore$ 选 A.

这里体现了一种"整体处理"的思想方法.

拓展 把 $(x^2-x+1)^6$ 展开后得 $a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$，求 $a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$ 的值.

答案提示　若把$(x^2-x+1)^6$直接展开,再与$a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_1x^1+a_0$比较系数,得$a_{12}$、$a_{10}$、$a_8$、…、$a_0$的值,然后求其和,显然计算过程冗繁,如果结合原题的特征,取$x=\pm1$这一对互为相反数的特殊值,代入上式,便能简捷地求出结果.

解:由题意知

$a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=(x^2-x+1)^6$,

取$x=1$代入上式,得

$a_{12}+a_{11}+\cdots+a_2+a_1+a_0=1.$　①

取$x=-1$代入上式,得

$a_{12}-a_{11}+\cdots+a_2-a_1+a_0=729.$　②

①+②,得

$2(a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)=730$,

$\therefore a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=365.$

检测·反馈·应用

1.一个有理数的相反数与自身的绝对值的和　(C

A. 可能是负数　　B. 必为正数

C. 必为非负数　　D. 必为零

2.两个质数的和是49,则这两个质数的倒数的和是　(B)

A. $\frac{94}{49}$　B. $\frac{49}{94}$　C. $\frac{86}{45}$　D. $\frac{45}{86}$

E. 以上答案都不对

3.一个数a的倒数小于2,且大于-3,则这个数a的取值范围是　(C)

A. $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$　　B. $a>\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{3}<a<1$

C. $a>\frac{1}{2}$或$a<-\frac{1}{3}$　　D. 这样的数a不存在

4.若$|x-y+2|$与$(x+y-1)^2$互为相反数,则$x=$ -0.5 ,$y=$ 1.5 .

5.若 $a>0$,则 a 与$\frac{1}{a}$的大小关系是 $\frac{1}{a}>a$.

6.若$|m+5|$与$(n-2)^4$互为相反数,那么 $m^n=$ 25 .

7.若$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,则

$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=$ -243 .

8.已知 $y=ax^5+bx^3+cx+665$,且当 $x=365$ 时,$y=-665$,求 $x=-365$ 时,y 的值.

$\cancel{-365^5 \times 365^5}$

9.已知:$\frac{x}{x^2+x+1}=a$,且 $a\neq0$,求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

$\frac{x}{x^2+x+1}=a$

思路·点拨·详解

1.选 C. 因为一个有理数的相反数可能是正数、负数或零,但其自身绝对值一定为非负数.

当该有理数是正数时,其相反数为负数,它与自身的绝对值之和必为零.

当该有理数是负数时,其相反数为正数,则它与自身的绝对值之和为正数.

当该有理数是 0 时,则其相反数与自身的绝对值都为 0,所以和必为零.

2.选 B. 设这两个质数为 x、y.

则 $x+y=49$. 这两个质数必为 2 和 47.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{49}{2\times47}=\frac{49}{94}$.

3.选 C. 由题意得 $2>\frac{1}{a}>-3$.

当 $a>0$,且$\frac{1}{a}<2$ 时,$a>\frac{1}{2}$.

当 $a<0$,且$\frac{1}{a}>-3$ 时,$a<-\frac{1}{3}$.

综上得$a>\dfrac{1}{2}$或$a<-\dfrac{1}{3}$.

4. 解:$\because |x-y+2|\geqslant 0,(x+y-1)^2\geqslant 0$

而$|x-y+2|$与$(x+y-1)^2$互为相反数.

$\therefore$只有$\begin{cases}x-y+2=0 & ①\\ x+y-1=0 & ②\end{cases}$时成立.

解得$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

5. 解:当$0<a<1$时,$a<\dfrac{1}{a}$.

当$a=1$时,$a=\dfrac{1}{a}$.

当$a>1$时,$a>\dfrac{1}{a}$.

6. 解:$\because |m+5|\geqslant 0,(n-2)^4\geqslant 0$. 又两者互为相反数,$\therefore$只能是$|m+5|=0,(n-2)^4=0$. 即$m=-5,n=2$时成立.

$\therefore m^n=(-5)^2=25$.

7. 解:将$x=-1$代入已知等式得

$-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=(-3)^5=-243$.

8. 把$x=365,y=-665$代入已知式,得

$-665=a\cdot(365)^5+b\cdot(365)^3+c\cdot(365)+665$

$\therefore a\cdot(365)^5+b\cdot(365)^3+c\cdot(365)=-1330$.

故当$x=-365$时,

$$\begin{aligned}y&=a(-365)^5+b(-365)^3+c(-365)+665\\&=-[a\cdot(365)^5+b(365)^3+c(365)]+665\\&=-(-1330)+665=1995.\end{aligned}$$

9. 解:$\because \dfrac{x}{x^2+x+1}=a$,且$a\neq 0$

$\therefore \dfrac{x^2+x+1}{x}=\dfrac{1}{a}$,即$x+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}$.

$\therefore x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}.$

而$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1$

$=\left(\frac{1-a}{a}\right)^2-1=\frac{1-2a}{a^2},$

$\therefore \frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{a^2}{1-2a}.$

第二单元 绝对值

知识·规律·方法

❶绝对值的基本概念:

一个正数的绝对值是它本身,一个负数的绝对值是它的相反数,0的绝对值是0,即$|a|=\begin{cases}a, a>0\\0, a=0\\-a, a<0\end{cases}$.

❷绝对值的几何意义:

(1)$|a|$的几何意义是数a对应的点与原点之间的距离;

(2)$|a-b|$的几何意义是数a对应的点与数b对应的点之间的距离.

❸绝对值的常用性质:

(1)若a为有理数,则$|a|\geqslant 0$;

(2)若a为有理数,则$|a|=|-a|$;

(3)若a为有理数,则$|a^2|=|a|^2=a^2$;

(4)若a、b为有理数,则$|ab|=|a|\cdot|b|$;

(5)若 a、b 为有理数,且 $b\neq0$,则 $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$;

(6)若 a、b 为有理数,则 $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

绝对值是中学数学的重要内容,它能够比较全面地考察学生用分类讨论思想解决问题的能力,因此,在处理与绝对值有关的问题时,要学会分类讨论,并熟练运用绝对值的定义和性质,有时还要结合数轴去解决问题.

范例 · 解析 · 拓展

例 1　比较 $-\frac{7}{8}$ 与 $-\frac{6}{7}$ 的大小.

解析　这是两个负数的大小比较,先比较这两个数的绝对值的大小,根据"两个负数绝对值大的反而小"的结论,得出 $-\frac{7}{8}$ 与 $-\frac{6}{7}$ 的大小关系.

$\because \left|-\frac{7}{8}\right|=\frac{7}{8}=\frac{49}{56}$, $\left|-\frac{6}{7}\right|=\frac{6}{7}=\frac{48}{56}$.

$\because \frac{49}{56}>\frac{48}{56}$, $\therefore -\frac{7}{8}<-\frac{6}{7}$.

拓展一　若 $a<0$,则 $2006a+11|a|$ 等于________.

答案　$1995a$

拓展二　有理数 a,b 满足 $a>0$,$b<0$,$|a|<|b|$,用"<"号将 a、b、$-a$、$-b$ 连接起来.

答案　$b<-a<a<-b$

例 2　a、b 为异号两数,且设 $a>0>b$,比较 $|a+b|$ 与 $|a|+|b|$ 的大小.

解析　由于异号两数相加,和的符号与绝对值较大的那一个加数的符号相同,故比较大小时要考虑 a、b 绝对值的大小,分如下三种情

况考虑.

若$|a|>|b|$,则$|a+b|=||a|-|b||$

$$=|a|-|b|<|a|+|b|;$$

若$|a|=|b|$,则$|a+b|=0<|a|+|b|$;

若$|a|<|b|$,则$|a+b|=|-(|b|-|a|)|$

$$=|b|-|a|<|b|+|a|.$$

综合以上三种情况:得到$|a+b|<|a|+|b|$.

拓展一 如果a、b、c均为非零常数,求$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$的所有可能的值.

答案提示 考虑去掉绝对值符号,必须对a、b、c的正负情况做出分类,又注意到a、b、c在问题中的"平等"性,可从一般角度考虑三个字母a、b、c中均为正、仅一个为正、仅两个为正、均为负的四种情形.

(1)a、b、c均为正,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=3$;

(2)a、b、c中仅一个字母为正,不妨设$a>0$,则$b<0,c<0$,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}=-1$;

(3)a、b、c中仅两个字母为正,不妨设$a>0,b>0$,则$c<0$,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{-c}=1$;

(4)a、b、c均为负,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}=-3$.

所以$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$有四种可能的不同取值,其值为$\pm3$、$\pm1$.

拓展二 如果a、b、c、d均不为零,求$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{d}{|d|}$的所有可能的值.

答案 ±4, ±2, 0

例3　如果 $a+b-c>0, a-b+c>0, -a+b+c>0$

则 $\left(\frac{a}{|a|}\right)^{2006}-\left(\frac{b}{|b|}\right)^{2006}+\left(\frac{c}{|c|}\right)^{2006}$ 的值等于　（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 3

解析　由 $a+b-c>0, a-b+c>0, -a+b+c>0$，易知 a,b,c 均大于0，所以有 $\left(\frac{a}{|a|}\right)^{2006}=1, \left(\frac{b}{|b|}\right)^{2006}=1, \left(\frac{c}{|c|}\right)^{2006}=1$，故选 A.

拓展一　有理数 a、b、c 均不为零，且 $a+b+c=0$，设 $x=\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{a+c}+\frac{|c|}{a+b}$，试求代数式 $x^{19}-99x+2000$ 的值.

答案提示　$b+c=-a, a+c=-b, a+b=-c$.

因为 a、b、c 中必有一正两负或两正一负，所以 $x=1$ 或 $x=-1$，结果为 1902 或 2098.

拓展二　已知 $abc\neq0$，求 $x=\frac{a}{|a|}-\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}-\frac{abc}{|abc|}$ 的所有可能值.

答案提示　对 a、b、c 的正负性进行讨论，可知 $x=0$ 或 ±4.

例4　已知 a、b、c 为有理数，且 $|2a+6|^2+\left|\frac{1}{4}b-200\right|+|c+1|=0$，求 abc 的值.

解析　依题意，得 $2a+6=\frac{1}{4}b-200=c+1=0$，

$\therefore a=-3, b=800, c=-1$，

$\therefore abc=2400$.

拓展　已知 $|a|=5, |b|=3$，且 $|a-b|=b-a$，那么 $a+b=$ ________

答案提示　$\because |a-b|=b-a$，

$\therefore a-b<0$，

$\therefore a=-5, b=\pm3, a+b=-2$ 或 $a+b=-8$.