“十二五”
普通高等教育本科
国家级规划教材

# 大学数学

——微积分

吉林大学数学学院 主编
李辉来 郭华 孙毅

第3版 下册

高等教育出版社

"十二五"
普通高等教育本科
国家级规划教材

Daxue Shuxue Weijifen

# 大学数学
## ——微积分

吉林大学数学学院
李辉来　郭华　孙毅　主编

第3版
下册

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材，全书共分上、下两册。上册主要内容包括预备知识、极限与连续函数、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分和空间解析几何等；下册主要内容包括多元函数的极限和连续性、多元函数的微分学及其应用、重积分、第一型曲线积分与曲面积分、第二型曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程与差分方程等。每章都配备了精选的习题，书后附有部分习题参考答案，便于读者学习。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业的学生选用，也可供工程技术人员参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

大学数学．微积分．下册 / 李辉来，郭华，孙毅主编．-- 3版．-- 北京：高等教育出版社，2015. 2

ISBN 978-7-04-041649-7

Ⅰ．①大… Ⅱ．①李… ②郭… ③孙… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材 Ⅳ．①O13 ②O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第297362号

策划编辑 兰莹莹　　责任编辑 兰莹莹　　封面设计 张申申　　版式设计 童　丹
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 李大鹏　　责任印制 张福涛

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社　址 | 北京市西城区德外大街4号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 印　刷 | 北京市鑫霸印务有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 开　本 | 787 mm×960 mm 1/16 | | |
| 印　张 | 27 | 版　次 | 2004年11月第1版 |
| 字　数 | 490千字 | | 2015年2月第3版 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 印　次 | 2015年2月第1次印刷 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | 定　价 | 39.10元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换



物 料 号　41649-00

# 《大学数学》教材编委会

# 第一版前言

《大学数学》系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。本系列教材共四册:《微积分》(上、下)、《线性代数》和《随机数学》。

本系列教材的编写体现了时代的特点。本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则, 力争做到科学性、系统性和可行性相统一, 使传授数学知识和培养数学素养得到了较好的结合。

本系列教材是在吸取国内外同类教材的精华的基础上, 借鉴近几年我国出版的一批“面向 21 世纪课程教材”的成功经验, 结合作者在吉林大学多年数学教学教研的具体实践, 并针对非数学类理工科大学生的特点编写的。

本系列教材内容充实, 可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书。在教材体系与内容的编排上, 认真考虑了不同专业、不同学时的授课对象的需求, 对数学要求较高的物理、计算机、电子等专业原则上可讲授本教材的全部内容, 其他专业可以在不带“*”号的内容中, 根据实际需要选择适当的章节讲授。每章后面所配备的习题分成两类, 其中 (A) 类是体现教学基本要求的习题; (B) 类是对基本内容提升、扩展以及综合运用有关知识的习题。与教材中“*”号内容相应的习题用“*”号做了标注。本书的最后给出了习题参考答案或提示, 供读者参考。

《微积分》下册的第一、二章由赵建华编写, 第三、四章由张魁元编写, 第五章由白岩编写, 第六章由王树岩编写, 第七章由郭华编写。

在《大学数学》系列教材的编写过程中, 得到了吉林大学教务处的大力支持。数学学院尹景学教授为本套教材初稿的版面设计、软件培训提供了悉心的技术指导, 公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作, 研究生王军林、孙鹏、任长宇、李明、柯长海、吴刚、姜政毅及湖北大学郑巧仙老师完成了本系列教材初稿的排版制图工作, 在此一并致谢。作者要特别感谢高等教育出版社高等理科分社的领导和编辑们, 他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持。

由于我们水平所限, 书中的错误和不妥之处, 恳请广大读者批评指正, 以期不断完善。

《大学数学》系列教材编委会

2004 年 5 月

# 第二版前言

《大学数学》系列教材面世已经 5 年了。在此期间, 有不少高校同行在使用本系列教材的过程中提出了许多宝贵意见, 结合过去 5 年我们使用本系列教材的教学实践经验和近几年大学数学课程改革的一些新动态, 编委会决定对本系列教材进行修订、完善。新版列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

这次修订的指导思想是: 1. 保持原书风格与特色, 力求叙述简洁明了, 把基础知识尽可能地交代透彻; 2. 在加强理论知识系统性的同时, 尽可能突出数学思想方法的讲授, 删繁就简; 3. 突出数学应用的广泛性, 提高数学技术应用的深度和技巧。

本书第二版在第一版的基础上, 本着注重理工科需要, 贴近教学实际的原则, 重点修订了第七章, 增加了差分方程的内容, 其他章节也做了修改和完善。

李辉来主持修订了《微积分》(下册) 的第二版。

在本书的修订过程中, 得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的大力支持和帮助, 吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作, 在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限, 书中的错误和不当之处, 敬请读者批评指正。

《大学数学》系列教材编委会

2009 年 9 月

# 第三版前言

《大学数学》教材第二版面世已经 5 年多了, 在此期间, 许多高校同行和读者给我们提出了宝贵的意见, 也给予本套教材充分的肯定。结合过去 5 年读者反馈的意见、我们使用本套教材的体会和近几年大学数学课程改革的最新成果, 编委会决定对本套教材进行再次修订、完善, 以更好地适应当前的教学需求。

本次修订的指导思想是: 1. 保持原书的风格与特色, 力求叙述严谨准确, 简洁明了, 基础知识交代清楚透彻。2. 在保持理论知识系统性的同时, 突出数学思想方法的运用, 贯彻理论联系实际的原则, 注重实际问题的解决。3. 加强数学应用的广泛性, 提高数学技术应用的深度和技巧, 使数学理论、思想、方法更好地满足其他学科的需要。4. 重点修订大学数学课程实验教材, 补充 MATLAB 软件解决数学应用问题等。

根据读者的意见和我们的教学实践, 本次修订改正了第二版中存在的不当之处, 更换了部分例题和习题, 以更好地适应理工科各专业的教学实际; 在文字叙述上也做了一定的调整, 使概念叙述和理论推导更加清晰易懂、严谨准确。

参加本书第三版修订工作的有李辉来 (第三、四章)、孙毅 (第一、二章)、白岩 (第五章)、郭华 (第六、七章), 李辉来主持了本书的修订工作。

在本书的修订过程中, 得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社理工出版事业部数学分社的大力支持和帮助, 吴晓俐女士承担本套教材修订的编务工作, 在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限, 书中不当之处敬请广大读者批评指正。

《大学数学》教材编委会

2014 年 4 月

# 目　　录

# 第一章 多元函数的极限和连续性

我们已经讨论过一元函数微积分, 那里出现的是依赖于一个自变量的所谓一元函数. 然而在实际问题中, 有很多量是由多种因素所决定的, 反映到数学上就是依赖于两个或两个以上自变量的多元函数. 因此, 有必要研究多元函数的微分和积分问题.

本章介绍多元函数的概念、多元函数的极限和连续性的概念及其性质.

这些概念和性质由一元函数推广和发展得来, 由于变量从一个变为多个, 从而产生了不同于一元函数的一些特点. 在学习中应当把握这些特点, 重点掌握多元函数与一元函数在极限和连续性方面的相同点和不同点.

## §1 多元函数的概念

### 1.1 平面点集

我们知道, 为了掌握一元函数, 必须理解实数集 $\mathbf{R}$ 的基本概念. 同样, 在学习多元函数的时候, 首先要了解 $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ 乃至一般的 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的基本概念.

将 $n$ 元有序实数组的全体构成的集合记为

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid\ x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素有时也用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 表示, 即 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

在解析几何中, 通过建立直角坐标系, $\mathbf{R}^2$ (或 $\mathbf{R}^3$) 中的元素与平面 (或空间) 中的点形成一一对应关系. 所以 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点, $x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 $i$ 个坐标.

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**线性运算**为

$$\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \cdots, \lambda x_n + \mu y_n).$$

$\mathbf{R}^n$ 在上述线性运算下构成一个 $n$ **维线性空间**, 简称为 $n$ 维空间.

$\mathbf{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

$n$ 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中引入上述距离以后, 构成一个 **$n$ 维 Euclid 空间**, 仍简称为 $n$ 维空间.

下面给出 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的一些概念. 为简便, 以 $\mathbf{R}^2$ 为例加以介绍. $\mathbf{R}^2$ 中的点集称为**平面点集**, $\mathbf{R}^2$ 中的点通常用 $P(x,y)$ 或 $P$ 表示.

**1. 邻域**

**定义 1.1** 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2,\delta>0$. 称 $\mathbf{R}^2$ 中与点 $P_0$ 的距离小于 $\delta$ 的点 $P(x,y)$ 组成的平面点集为点 $P_0$ 的 $\delta$ **邻域**, 记为 $U(P_0,\delta)$, 即

$$\begin{aligned}U(P_0,\delta)&=\{P|\ \rho(P,P_0)<\delta\}\\&=\{(x,y)|\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.\end{aligned}$$

邻域 $U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的圆的内部.

在邻域 $U(P_0,\delta)$ 中除去点 $P_0$ 得到的平面点集, 称为点 $P_0$ 的**去心** $\delta$ **邻域**, 记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$, 即

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)&=\{P|\ 0<\rho(P,P_0)<\delta\}\\&=\{(x,y)|\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.\end{aligned}$$

在不需要强调邻域的半径时, 常用 $U(P_0)$ 或 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 来表示点 $P_0$ 的某个邻域或去心邻域.

**2. 内点、外点与边界点**

**定义 1.2** 设点集 $E\subset\mathbf{R}^2$.

(1) 对于点 $P_0\in E$, 若 $\exists\,\delta>0$, 使得 $U(P_0,\delta)\subset E$, 则称 $P_0$ 为点集 $E$ 的**内点**.

(2) 对于点 $P_1\notin E$, 若 $\exists\,\eta>0$, 使得 $U(P_1,\eta)$ 内不含 $E$ 的任何点, 则称 $P_1$ 为 $E$ 的**外点**.

(3) 对于点 $P_2\in\mathbf{R}^2$, 若 $\forall\,\varepsilon>0$, 使得 $U(P_2,\varepsilon)$ 内既有属于 $E$ 的点, 又有不属于 $E$ 的点, 则称 $P_2$ 为 $E$ 的**边界点**. $E$ 的边界点的全体称为 $E$ 的**边界**, 记为 $\partial E$.

边界点既不是内点也不是外点, 它可能属于 $E$ 也可能不属于 $E$ (图 1.1).

显然, 对于集合 $E$ 及点 $P$, $P$ 必为 $E$ 的内点或外点或边界点, 三者必具其一.

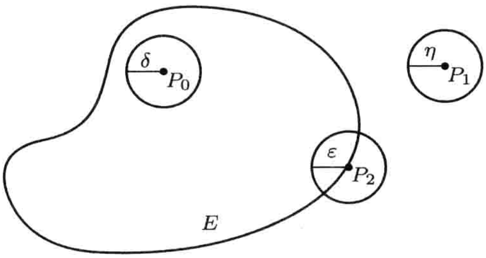


图 1.1

例如, $\mathbf{R}^2$ 中的点集

$$E_1 = \{(x,y)|\ 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$$

是一个圆环. 这时, 满足

$$1 < x^2 + y^2 < 4$$

的点 $P(x,y)$ 为 $E_1$ 的内点; 满足

$$x^2 + y^2 < 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 > 4$$

的点 $P(x,y)$ 为 $E_1$ 的外点; 而满足

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 = 4$$

的点 $P(x,y)$ 为 $E_1$ 的边界点. 显然, 单位圆周上的点是 $E_1$ 的边界点, 并且属于 $E_1$; 以原点为中心、以 2 为半径的圆周上的点, 也是 $E_1$ 的边界点, 但不属于 $E_1$ (图 1.2).

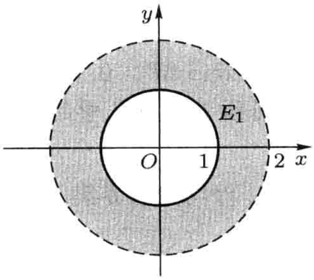


图 1.2

### 3. 开集与区域

**定义 1.3** 设点集 $E \subset \mathbf{R}^2$, 若 $E$ 中的每一点都是它的内点, 则称 $E$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的**开集**.

例如, 点集

$$E_2 = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 < r^2\}$$

是一个开集. 又如点集

$$E_3 = \{(x, y) |\ a < x < b, c < y < d\}$$

也是一个开集. 但是, 前面例子中的点集

$$E_1 = \{(x, y) |\ 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$$

不是一个开集, 因为单位圆周上的点属于 $E_1$, 却不是它的内点.

**定义 1.4** 设 $E$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的非空点集.

(1) 若对 $E$ 中任意两点 $P_1$ 和 $P_2$, 总存在完全属于 $E$ 的折线能把 $P_1$ 和 $P_2$ 连接起来, 则称 $E$ 为**连通的**.

(2) 若 $E$ 为连通的开集, 则称 $E$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的**开区域**, 简称为**区域**; 区域 $E$ 和它的边界 $\partial E$ 的并集称为**闭区域**, 记为 $\overline{E}$, 即 $\overline{E} = E \cup \partial E$.

例如, 点集

$$E_4 = \{(x, y) |\ 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$
$$E_5 = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 < 1 \text{ 或 } x^2 + y^2 > 4\}$$

都是开集. 其中 $E_4$ 是连通的, 所以 $E_4$ 是一个区域, 相应的闭区域为

$$\overline{E}_4 = E_4 \cup \partial E_4 = \{(x, y) |\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\},$$

而 $E_5$ 不是连通的, 所以 $E_5$ 不是区域.

**4. 有界集与无界集**

**定义 1.5** 设点集 $E \subset \mathbf{R}^2$, 若 $\exists\, M > 0$, 使得 $E \subset U(O, M)$, 即 $E$ 全部被包含在原点 $O$ 的一个邻域内, 则称 $E$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的**有界集**, 否则, 称为 $\mathbf{R}^2$ 中的**无界集**.

前面例中的几个点集, 除 $E_5$ 外均为有界集, $E_5$ 为无界集.

***5. 聚点与闭集**

**定义 1.6** 设点集 $E \subset \mathbf{R}^2$, 点 $P_0 \in \mathbf{R}^2$. 若 $\forall\, \varepsilon > 0$, 在 $U(P_0, \varepsilon)$ 内除点 $P_0$ 外至少还包含 $E$ 的一个点, 则称 $P_0$ 为 $E$ 的**聚点**.

容易看出, 点集 $E$ 的内点一定是它的聚点; $E$ 的外点一定不是它的聚点; 而 $E$ 的边界点, 可能是它的聚点, 也可能不是它的聚点.

例如, 点集

$$E_6 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 0 \text{ 或 } 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}.$$