经济数学基础

微积分学习指导

（第2版）

韩玉良　隋亚莉　李宏艳　王雅芝　编

清华大学出版社

经济数学基础

微积分学习指导

（第2版）

韩玉良 隋亚莉 李宏艳 王雅芝 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是学习微积分的辅助教材.共包括准备知识、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程初步、级数、多元函数的微分学和重积分共11章内容.每章包括:内容提要、典型例题解析、习题和习题答案4部分.编写本书的目的是使学生在学习主教材的基础上,进一步开阔眼界,拓展思路,多实践,多练习,以提高分析问题和解决问题的能力.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/韩玉良等编.--2版.--北京:清华大学出版社,2015
(经济数学基础)
ISBN 978-7-302-38594-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第311530号

责任编辑:刘 颖
封面设计:常雪影
责任校对:刘玉霞
责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:三河市金元印装有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185mm×230mm 印 张:19.75 字 数:406千字
版 次:2006年8月第1版 2015年1月第2版 印 次:2015年1月第1次印刷
印 数:1~3000
定 价:37.00元

产品编号:058625-01

编委会

主　编　韩玉良

编　委（按姓氏笔画为序）

于永胜　曲子芳　李宏艳　陈卫星

郭　林　崔书英　隋亚莉

前言

《微积分学习指导》(第 2 版)是与我们编写的《微积分》(第 4 版)配套的辅助教材.编写本书的目的是使学生在学习原教材的基础上,进一步开阔眼界,拓展思路,多实践,多练习,以增强分析问题和解决问题的能力.本书每章包括以下几个部分:

1. 内容提要.紧扣大纲,突出重点.对重要概念、定理、公式进行简明扼要的总结归纳,重点突出,层次清晰,便于读者记忆和掌握.

2. 典型例题解析.全书共精选了 300 多个典型例题,并详细地介绍了各类题型的解题方法和技巧,选题广泛且具代表性.在对一些问题的讨论和分析上融合了作者在教学实践中的经验和体会.

3. 习题.分基本题、综合题和自测题三部分.基本题是为复习巩固教材内容而选编的,对初学者来说,应选做其中相当数量的题目;综合题中,一些是有相当难度的题目,另一些则选自近年的考研题,对高等数学要求较高的某些专业的学生和准备考研的读者,应选做其中的大部分题目;对高等数学要求一般的专业的学生,做基本题之后再选做少量的综合题即可.每章最后的自测题供初学者检测自己对本章知识的掌握情况.

4. 习题答案.对习题中的计算题给出了答案,个别较难的证明题,给出了提示.

由于作者水平所限,书中一定有许多缺点和错误,恳请读者批评、指正.

编　者

2014 年 10 月

目录

第 1 章

准备知识

1.1 内容提要

函数概念是微积分中最重要的基本概念之一，而初等函数是微积分研究的主要对象，因此它们都是本章的重点.

1. 实数

（1）$\mathbb{R}$ 表示实数全体的集合.实数集$\mathbb{R}$与数轴上的点是一一对应的.

（2）实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

其几何意义是：$|a|$表示数轴上点 a 与原点 0 的距离.若 a,b 是两个实数，则绝对值$|a-b|$表示数轴上点 a 与点 b 之间的距离.

（3）区间

设 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a>b$，定义：

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbb{R}\}$为**闭区间**；

$(a,b)=\{x|a<x<b,x\in\mathbb{R}\}$为**开区间**；

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in\mathbb{R}\}$与$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in\mathbb{R}\}$为**半开区间**（或**半闭区间**）；

$$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b,x\in\mathbb{R}\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b,x\in\mathbb{R}\},$$
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty,x\in\mathbb{R}\},$$
$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty,x\in\mathbb{R}\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}.$$

统称为**无穷区间**.

称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$是以 x_0 为中心，$\delta(>0)$为半径的**邻域**；开区间$(x_0-\delta,x_0)$，$(x_0,x_0+\delta)$分别称为点 x_0 的**左邻域**和**右邻域**；左、右邻域的并集$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的**空心邻域**或**去心邻域**.

2. 函数的概念

(1) 函数的定义

定义 1.1 设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f,对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y\in\mathbb{R}$,则称 f 是定义在 A 上的**函数**,表示为

$$f: A\to\mathbb{R},$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,表示为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**,函数值的集合 $fA=\{f(x)\mid x\in A\}$称为函数 f 的**值域**.

显然,只要定义域和对应关系确定了,值域也就随之而定,故定义域和对应关系是确定一个函数的两个要素.

表示函数的主要方法有图示法、表格法和公式法.

(2) 分段函数

在定义域内各个互不相交的子集(多为子区间)上,分别用不同的解析表达式表示的函数,称为**分段函数**. 例如绝对值函数 $y=|x|$,符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 等.

注意,分段函数在其整个定义域上表示的是一个函数,而不是几个函数. 例如,分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

在整个定义域 $A=\mathbb{R}$ 上,表示一个函数,而不是两个函数.

(3) 函数定义域的求法

如果函数是用公式法表示的,且未赋予实际意义,则其定义域就是使函数表达式有意义的自变量所有可能取值的集合;对于实际问题中的函数,其定义域应由问题的实际意义确定.

用公式法表示的函数确定定义域时,应注意以下几点:①分母含有自变量时,分母不能为零;②偶次根式下含有自变量时,负数不能开偶次方;③对数函数的真数含有自变量时,真数应大于零;④有限个函数经四则运算而得到的函数,其定义域是这有限个函数定义域的交集,并除去使分母为零的 x 值;⑤分段函数的定义域是各"分段"函数定义域的并集.

3. 几类具有特殊性质的函数

(1) 有界函数

设函数 $f(x)$在某区间 D 上有定义,如果存在常数 $M>0$,使对任意的 $x\in D$,恒有 $|f(x)|<M$,则称函数 $f(x)$在集合 D 上**有界**,否则称 $f(x)$在 D 上**无界**;如果存在常数 $M(m)$,使对任意的 $x\in D$,恒有 $f(x)<M(f(x)>m)$,则称函数 $f(x)$在 D 上**有上界**(有

下界).

显然,有界函数必有上界和下界;反之,既有上界又有下界的函数必有界.

注意,一个函数是否有界、不仅与函数表达式有关,而且还与给定的集合 D 有关. 例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $(1,5)$ 内有界.

(2) 单调函数

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若 $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**严格单调增加(严格单调减少)**. 若上述不等式改为

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**单调增加(单调减少)**. 单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**,使函数 $f(x)$ 单调的区间称为**单调区间**.

判定函数单调性的常用方法是导数判别法,见第 4 章.

(3) 奇函数与偶函数

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,且集合 D 关于原点是对称的(即对任意 $x\in D$,必有 $-x\in D$). 如果对任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

常函数是偶函数;两个偶(奇)函数之和仍为偶(奇)函数;两个偶(奇)函数之积为偶函数;奇函数与偶函数之积为奇函数. 定义在对称区间上的任一函数必能表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

(4) 周期函数

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义. 如果存在常数 $T>0$,使对任意 $x\in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为函数 $f(x)$ 的一个周期. 满足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数 T_0(如果存在)称为 $f(x)$ 的**基本周期**,简称**周期**.

4. 复合函数与反函数

(1) 复合函数

设函数 $z=f(y)$ 定义在数集 B 上,函数 $y=\varphi(x)$ 定义在数集 A 上,G 是 A 中使 $y=\varphi(x)\in B$ 的 x 的非空集合,即

$$G=\{x\mid x\in A,\varphi(x)\in B\}\neq\varnothing.$$

$\forall x\in G$,按照对应关系 φ,对应唯一一个 $y\in B$,再按照对应关系 f,对应唯一一个 z,即 $\forall x\in G$ 对应唯一一个 z,于是在 G 上定义了一个函数,表示为 $f\circ\varphi$,称为函数 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的**复合函数**,即

$$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)],\quad x\in G,$$

y 称为**中间变量**. 今后经常将函数 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的复合函数表示为

$$z=f[\varphi(x)],\quad x\in G.$$

(2) 反函数

设函数 $y=f(x)$, $x\in X$. 若对任意 $y\in f(X)$, 有唯一一个 $x\in X$ 与之对应, 使 $f(x)=y$, 则在 $f(X)$ 上定义了一个函数, 记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(X),$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 如果仍然以 x 为自变量, 则 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$, $x\in f(X)$; 且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

定理 1.1 若函数 $y=f(x)$ 在某区间 X 上严格单调增加(严格单调减少), 则函数 $y=f(x)$ 存在反函数, 且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(X)$ 上也严格单调增加(严格单调减少).

5. 初等函数

(1) 基本初等函数

常量函数: $y=c$(c 为常数);

幂函数: $y=x^{\alpha}$(α 为常数且 $\alpha\neq 0$);

指数函数: $y=a^{x}$(a 为常数且 $a>0$, $a\neq 1$);

对数函数: $y=\log_a x$(a 为常数且 $a>0$, $a\neq 1$);

三角函数: $y=\sin x$(正弦), $y=\cos x$(余弦), $y=\tan x$(正切), $y=\cot x$(余切), $y=\sec x$(正割), $y=\csc x$(余割);

反三角函数: $y=\arcsin x$(反正弦), $y=\arccos x$(反余弦), $y=\arctan x$(反正切), $y=\operatorname{arccot} x$(反余切), $y=\operatorname{arcsec} x$(反正割), $y=\operatorname{arccsc} x$(反余割).

(2) 初等函数

由基本初等函数经有限次四则运算和复合而构成的函数, 称为**初等函数**.

初等函数是高等数学研究的主要对象.

6. 简单的经济函数

(1) 需求函数: 一种商品的市场需求量 D 与该商品的价格 p 密切相关, 涨价需求量减少, 降价需求量增加. 因此, 需求量 D 可看成价格 p 的单调减少函数, $D=f(p)$, 称为**需求函数**.

(2) 供给函数: 一种商品的市场供给量 Q 也与商品价格有关, 价格上涨供给量增加, 价格下跌供给量减少. 因此, 供给量 Q 是价格 p 的单调增加函数, $Q=f(p)$, 称为**供给函数**.

最简单的需求函数与供给函数为线性需求函数与线性供给函数

$$D = a - bp, \quad Q = -c + dp,$$

其中 a,b,c,d 为正的常数.

使一种商品的市场供给量与需求量相等的价格称为均衡价格,通常记为 p_e. 上述线性需求与线性供给函数的均衡价格为

$$p_e = \frac{a+c}{b+d}.$$

(3) 总收入函数(常用 R 来表示):若单位产品的售价为 p,销售量为 x,则总收入函数为 $R(x)=px$.

(4) 总成本函数(常用 C 来表示):生产 x 单位的产品,其总成本由固定成本和可变成本两部分组成. 固定成本与产量 x 无关,而可变成本为产量 x 的增函数. 生产 x 单位的产品的平均成本为 $\bar{C}x=C(x)/x$,$C(x)$ 为总成本.

(5) 总利润函数(常用 L 来表示):若销售量即是生产量,则生产 x 单位的产品的总利润等于总收入减去总成本,即 $L(x)=R(x)-C(x)$.

1.2 典型例题解析

题型 1 求定义域

例 1 求函数 $y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\lg(5-x)$ 的定义域.

解 在实数范围内,当 $x-2\geqslant 0$ 时,$\sqrt{x-2}$ 有意义;当 $x\neq 3$ 时,$\frac{1}{x-3}$ 有意义;当 $5-x>0$ 时,$\lg(5-x)$ 有意义. 因此,所给函数的定义域必须同时满足 $x\geqslant 2, x\neq 3, x<5$. 解之得到定义域

$$D=\{x \mid 2\leqslant x<5, 且\ x\neq 3, x\in\mathbb{R}\}=[2,3)\cup(3,5).$$

例 2 求函数 $y=\sqrt{\log_{0.3}\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)}$ 的定义域.

解 因 $0<a=0.3<1$,故要使 $\log_{0.3}\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)\geqslant 0$,充分必要条件是 $0<\frac{x^2-2x}{3}\leqslant 1$,即 $0<x^2-2x\leqslant 3$. 由此解得定义域为

$$D=[-1,0)\cup(2,3].$$

题型 2 求反函数

例 3 求下列函数的反函数:

(1) $y=(x-1)^3$; (2) $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$;

(3) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$, $a>0,a\neq 1$.

解 (1) 由 $y=(x-1)^3$ 解得 $x=1+\sqrt[3]{y}$,所以,$y=(x-1)^3$ 的反函数为 $y=1+\sqrt[3]{x}$;

(2) 由 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}=\log_4 2\sqrt{x}$,可得 $4^y=2\sqrt{x}$,$x=4^{2y-1}$,所以 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$ 的反函数为 $y=4^{2x-1}$;

(3) 由 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$,可解得 $x=\frac{1}{2}(a^y+a^{-y})$,故 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$.

题型3 经济问题中的函数

例4 某厂生产某种商品的最高日产量为100t,固定成本为130万元,每生产1t,成本增加6万元.试求该厂日产量的总成本函数和平均成本函数.

解 设日产量为 x(单位:t),总成本函数为 $C(x)$(单位:万元),则依题设有

$$C(x)=130+6x,\quad x\in[0,100],$$

而平均成本函数为

$$\overline{C}(x)=6+\frac{130}{x},\quad x\in(0,100].$$

例5 某厂生产某种产品,销售量在100件以内时,每件价格为150元;超过100件到200件的部分按九折出售;超过200件的部分按八五折出售.试求该产品的总收入函数.

解 设 q 表示销售量(单位:件),则依题设可知,总收入函数为

$$R(q)=\begin{cases}150q, & 0\leqslant q\leqslant 100,\\ 150\times 100+0.9(q-100), & 100<q\leqslant 200,\\ 150\times 100+150\times 0.9\times 100+150\times 0.85(q-200), & 200<q.\end{cases}$$

1.3 习题

基本题

1. 求下列函数的定义域,并用区间符号表示:

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$;　　(2) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$;

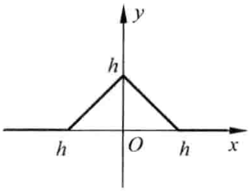
(3) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;　　(4) $y=\frac{x}{\sin x}$;

(5) $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$;　　(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$;

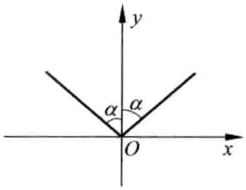
(7) $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

2. 写出下列图形所表示的函数：

(1)



(2)



3. 设 $\varphi(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，证明：$\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi\left(\dfrac{u+v}{1+uv}\right)$.

4. 若 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f(2)$，$f(0)$，$f[f(x)]$，$f(x_0+1)$ $(x_0\neq 0)$.

5. 作出下列函数的图形：

(1) $y=|x|+x$；　　(2) $y=\sqrt{\sin^2 x}$；

(3) $y=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0;\end{cases}$　　(4) $y=|x^2-1|$.

6. 对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若有三个彼此相异的实数 x_1,x_2,x_3，使 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$，证明：$a=b=c=0$.

7. 求满足下列性质的二次函数 $g(x)=ax^2+bx+c$：

(1) $g(-1)=5$，$g(0)=2$，$g(1)=7$；　　(2) $g(3)=7$，$g(5)=5$，$g(7)=3$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ 且 $a^2+bc\neq 0$，证明：$f[f(x)]=x$ $\left(x\neq\dfrac{a}{c}\right)$.

9. 设 $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$，$g(x)=x+\sqrt{x^2-1}$，证明：

$$g(\sqrt{x^2+1})=f(x)\ (x\geqslant 0);\quad f(\sqrt{x^2-1})=g(x)\ (x\geqslant 1).$$

10. $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$ 以及 $y=(\sqrt{x})^2$ 是否表示同一函数？为什么？作出它们的图形.

11. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

13. 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式，并证明 $f(x)$ 是奇函数.

14. 验证下列各函数是单调函数：

(1) $f(x)=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$；　　(2) $g(x)=\cos x$，$x\in(0,\pi)$；

(3) $h(x)=\sqrt{x}, x\in(0,+\infty)$.

15. 区间$(-\infty,+\infty)$上的严格单调增函数是否一定无界？举例说明之.

16. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in(-3,4)$；　(2) $f(x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$；　(4) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$；

(5) $y=x\cdot\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$.

(在 (4),(5) 中,$a>0$ 且 $a\neq1$)

17. 证明定义在$(-l,l)$上的任意函数均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

18. 下列函数中哪些是周期函数？哪些是非周期函数？对周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin^2x$；　(2) $y=\sin x^2$；

(3) $y=x\sin x$；　(4) $y=\cos3(x+2)$；

(5) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；　(6) $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$；

(7) $y=\arctan(\tan x)$；　(8) $y=|\sin x|+|\cos x|$.

19. 求下列函数的反函数:

(1) $y=10^x-1$；　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

(3) $y=\dfrac{2x+3}{4x-2}$；　(4) $y=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$.

20. 设 $y=f(x)$的定义区间为$(0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(\lg x)$；　(4) $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f(\log_2x)$.

21. 已知 $f(x)=a\cos(bx+c)$,试由条件 $f(x+1)-f(x)=\sin x$ 确定 a,b,c 的值.

22. 一个球形容器的半径为 R,当液面高度为 h 时,液面面积为 A. 写出函数关系式 $A(h)$,并指明其定义域.

23. 根据材料力学知识,矩形截面的横梁抗弯强度 W 与截面形状系数有关,即 W 与它的宽度 x 成正比,与高度 h 的平方成正比. 现把直径为 $2a$ 的圆木锯成以 $2a$ 为对角线的矩形横梁,试把 W 表示为 x 的函数.

24. 一容器装有 A,B,C 三个带活栓的水管,A,B 在它的上部,C 在它的底部. A 与 B 每分钟进水量分别为 20L 与 25L,C 管的排水量每分钟 80L,如果 A 开启 5min 后开启 B,B 开启 10min 后开启 C,求容器中的水量与时间 t 的函数关系.

25. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，试将它的全面积表示成底半径的函数，并确定此函数的定义域.

26. 把一半径为 R 的圆形铁片自中心处剪去一扇形后，围成一无底圆锥. 试将这圆锥的容积 V 表示为未剪去部分中心角 θ 的函数，并指出其定义区间.

27. 某厂有一条多个通道同时加工相同零件的自动生产线，可事先选定使用通道的数目，设每使用一个通道来加工零件需要的准备费为 1000 元，而且不论使用多少通道，每操作一次（这时被使用的每个通道各加工出一个零件）的操作费均为 0.025 元，现有 1000000 个零件需要加工，列出总费用与使用通道个数之间的函数关系式.

28. A，B 两厂与码头位于一条东西方向直线形河流的同侧，河岸边的 A 厂离码头 10km，B 厂在码头的正北方，离码头 4km. 现要在 A，B 两厂间修一条公路，如果沿河岸筑路，费用为 3（单位：千元/km），不沿河岸筑路时，费用为 5（单位：千元/km）. 此公路从 A 厂开始沿河岸修筑 x km，再直接修到工厂 B. 列出筑路总费用的函数关系式.

29. 设某工厂生产某种产品的固定成本为 200（百元），每生产一个单位产品，成本增加 5（百元），且已知需求函数 $Q=100-2P$（P 为价格，Q 为产量），这种产品在市场上畅销，试分别列出总成本函数 $C=C(P)$ 和总收益函数 $R=R(P)$ 的表达式.

30. 某工厂全年需要购进某种材料 800t，每次购进材料需要采购费 200 元，每吨材料每年的库存费是 4 元，如果每次购进材料数量相等，并且材料的消耗是均匀的（这时平均库存量为批量的一半），试写出全年采购费和库存费的总和 $F(x)$ 与批量 x 之间的函数关系.

综合题

31. 求下列函数的定义域：

（1）$y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^2\pi x}$；（2）$y=\cot\pi x+\arccos 2^x$.

32. 设函数 $f(x)$ 的定义域为区间 $[0,1]$，求函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域（$a>0$）.

33. 已知当 $0<u<1$ 时，函数 $f(u)$ 有意义，求函数 $f(\sin 2x)$ 的定义域.

34. 设 $f(x)=(x+|x|)(1-x)$，求满足下列各式的 x 值：

（1）$f(x)=0$；（2）$f(x)>0$；（3）$f(x)<0$.

35. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$ 以及 $\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$.

36. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\geqslant 0, \\ x^2+1, & x<0. \end{cases}$ 求：（1）$f(-x)$；（2）$f[f(x)]$.

37. 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

38. 设 $2f(x)+x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，求 $f(x)$，$f[f(x)]$.