普通高校“十二五”规划教材
公共基础课系列

经济数学——微积分新编（下）

侯吉成　主　编

清华大学出版社

普通高校“十二五”规划教材
公共基础课系列

经济数学——微积分新编（下）

侯吉成 主 编
侯吉成 张炳江 孟祥花 李冬香 闻小永 编 著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是专门为经济管理类专业学生编写的一套全新结构的教材. 本套教材本着"问题驱动"的教学理念,尝试将微积分的思想、概念、方法、结论渗透到解决实际经济管理问题过程中,实现微积分的思想性、知识性和可读性的统一,从而既提高学生的学习积极性,又使学生的数学思维能力得到极大提高,为将来继续深造和解决更复杂的经济管理问题奠定必要的数学基础.

本书是《经济数学——微积分新编》下册,内容包括微分方程、差分方程、无穷级数、多元函数微分学、二重积分. 各节配有练习题,各章末配有复习题和实验习题.

学习本书不需要任何特别的预备知识,考虑到读者的个性化需求,其深度高于现行的经济和管理类微积分教材(其中楷体部分为选学内容). 因此本书除了作为经济和管理类专业的微积分教材外,也可作为自学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 微积分新编. 下/侯吉成主编. —北京:清华大学出版社,2015
(普通高校"十二五"规划教材·公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-39042-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①侯… Ⅲ. ①经济数学—高等学校—教材 ②微积分—高等学校—教材
Ⅳ. ①F224.0 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 017130 号

责任编辑: 彭 欣
封面设计: 汉风唐韵
责任校对: 宋玉莲
责任印制: 何 芊

出版发行: 清华大学出版社
网 址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座　　邮 编: 100084
社 总 机: 010-62770175　　邮 购: 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载: http://www.tup.com.cn,010-62770175 转 4506
印 装 者: 保定市中画美凯印刷有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 185mm×260mm　**印 张:** 18.25　**字 数:** 419 千字
版 次: 2015 年 2 月第 1 版　**印 次:** 2015 年 2 月第 1 次印刷
印 数: 1～4000
定 价: 36.00 元

产品编号: 061476-01

目录

第5章 微分方程

在第1章中，我们学习了若干描述经济现象并用于解决经济问题的数学模型——函数.函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系可以对客观事物的规律性进行研究.经济学问题中的函数可用于描述市场中的供求、利润等公司或事业决策者所关心的问题在数量方面的规律性，所以寻找出所需要的函数关系在实践中具有决定性的意义.在许多经济问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，但是根据问题所提供的信息我们可以得到含有要找的函数及其导数的关系式.

问题1：某手机生产商要将新款智能产品推向国内市场，假设 t 时刻的销售量为 $Q(t)$，由于产品性能良好，每一个产品本身都是一个宣传品，因此 t 时刻产品销售的增长率与 $Q(t)$ 成正比. 同时，考虑到产品销售存在一定的市场容量 M，统计表明，销售的增长率与尚未购买该产品的顾客潜在的销售数量 $M-Q(t)$ 也成正比. 显然，如果能够通过问题所给的信息得到销售量随时间变化的函数关系，则可帮助供应商和销售商在不同的时期制定相应的生产及销售策略，节省不必要的费用.那么，销售量满足什么样的函数关系呢？由前面所学导数的意义可知，把时间看作连续变化的量，产品销售的变化率可表示为 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，因而销售量应满足以下方程：

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=kQ(M-Q), k\text{为比例系数}. \tag{5.0.1}$$

方程(5.0.1)被称为**逻辑斯蒂**(Logistic)**模型**.若能够通过方程(5.0.1)求出 $Q(t)$，则我们就可以得到销售量随时间变化的规律.

问题2：假定在当前价格下存在过度供给或者存在未卖出商品的存货时，都会出现迫使价格向下调整的压力，这时价格会按照如下方程对供求缺口做出反应：

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha(q^D-q^S)-\beta\int_0^t\left[q^S(\tau)-q^D(\tau)\right]\mathrm{d}\tau, \alpha>0, \beta>0. \tag{5.0.2}$$

其中 $q^D(t)=a+bp(t)$ 和 $q^S(t)=f+gp(t)$ 分别为需求量和供给量，$p(t)$ 表示该产品在 t 时刻的价格.在上述方程(5.0.2)中，右端第一项为当期价格下的需求供给缺口.在 $\alpha>0$ 时，如果存在过度需求，这一项就会使得价格向上调整；如果存在过度供给，这一项就会使得价格向下调整.第二项是供给和需求量之间的过去差额(的累积存量)的积分，其本身实际上就是未卖出的商品存货.在 $\beta>0$ 时，如果存货大于零，这一项就会使价格向下调整.为简化分析，我们假定未卖出的商品存货总是非负的.那么在已知上述条件下，如何得到价格随时间变化的规律呢？

在经济和管理科学中，还有很多类似的问题.在学习了本章内容之后，这样的问题就可以解决了.

5.1 微分方程的基本概念

一般地,将含有未知函数的导数的等式

$$F(x,y,y',y'',y^{(3)},\cdots,y^{(n)})=0$$

称为**微分方程**(differential equation). 微分方程中可以不显含 x、y,但是必须显含 y 的导数.

比如,令 y 表示我国的汽车燃料消耗量,通过先进节能技术的应用,假设年均下降 4%,即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-0.04y \tag{5.1.1}$$

这就是一个含有未知函数 $y=y(t)$ 的微分方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为**微分方程的阶**(order of differential equation). 如在微分方程(5.1.1)中,出现的未知函数的最高阶导数为一阶,因此是一阶微分方程. 又如方程

$$x^3y'''+(y'')^2-xy'=3x^2 \tag{5.1.2}$$

中出现的未知函数的最高阶导数是三阶,因此该方程是三阶微分方程. 为了从微分方程中求出函数,也就是求解微分方程,我们先将常见的微分方程分一下类.

将形如

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \tag{5.1.3}$$

的方程称为**线性微分方程**(linear differential equation). 不是线性的微分方程被称为**非线性微分方程**(nonlinear differential equation).

线性微分方程的特点是:未知函数和未知函数的导数的幂次都是一次,并且不含有未知函数与它的导数的乘积项.

我们观察到微分方程(5.1.1)中,含有未知函数 y 或未知函数的导数 y' 的项中,未知函数 y 和导数的幂次都是一次,因此式(5.1.1)是线性微分方程.

而方程(5.1.2)中,y'''、y' 的幂次都是 1 次,y'' 的幂次为 2 次,这是一个非线性微分方程. 又如方程

$$x(y')^2-2yy'+x=0$$

中 $(y')^2$ 和 yy' 的次数都是 2 次的,是一阶非线性微分方程.

将满足微分方程的函数称为微分方程的**解**(solution). 本章的主要内容之一就是如何求微分方程的解. 其实这个问题我们前面在学习原函数的时候就曾见到过了,已知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$,求 y,实质上,就是求一个简单微分方程解的问题. 实际上 $y=x^2$ 就是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 的一个解,还有 $y=x^2+C$(C 是任意常数)也是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 的解.

如果微分方程的解中含有任意常数,且所含的相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解被称为微分方程的**通解**(general solution).

例 1 验证函数 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$（$k\neq0$，C_1、C_2 是任意常数）是微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$$

的通解.

解 求函数的导数：

$$\frac{dy}{dx}=-kC_1\sin kx+kC_2\cos kx,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-k^2C_1\cos kx-k^2C_2\sin kx=-k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx).$$

将$\frac{d^2y}{dx^2}$及 y 的表达式代入所给方程，得

$$-k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx)+k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx)=0.$$

这表明函数 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$ 是二阶微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ 的解，且含有两个任意常数，因此是所给方程的通解.

确定了通解中任意常数后，得到的解称为**特解**(special solution). 微分方程的通解中含有任意常数，而有些实际问题中需要完全确定客观事物的规律性，需要确定通解中的任意常数得到微分方程的特解. 用于确定通解中任意常数的条件，称为**初始条件**(initial condition)，比如条件：当 $x=x_0$ 时，$y(x_0)=y_0$，其中 x_0、y_0 都是给定的数值.

上述初始条件一般写成 $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

求微分方程满足初始条件的解的问题称为**初值问题**(initial value problem). 我们从最简单的微分方程开始，来研究如何求微分方程的解.

一阶微分方程的一般形式可表示为

$$y'=f(x,y) \tag{5.1.4}$$

满足初始条件 $y\big|_{x=x_0}=y_0$ 的初值问题，记为

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}.$$

二阶微分方程的一般形式可表示为 $y''=f(x,y,y')$，满足初始条件 $y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_1$ 的特解的问题可表示为

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_1 \end{cases}.$$

例 2 已知函数 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$（$k\neq0$，C_1、C_2 是任意常数）是微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ 的通解，求满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的特解.

解 由条件 $y(0)=1$ 及 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$（$k\neq0$），得 $C_1=1$.

由条件 $y'(0)=0$ 及 $y'=-kC_1\sin kx+kC_2\cos kx$，得 $C_2=0$.

把 C_1、C_2 的值代入方程 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$（$k\neq0$）中，得方程的特解为 $y=\cos kx$.

例 3 已知一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任一点的切线斜率为横坐标的两倍，

求该曲线方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$,且 (x,y) 是曲线上任意一点,则根据导数的几何意义可知,在该点下述关系式成立:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{5.1.5}$$

求解未知函数 $y=y(x)$,实际上就是求函数 $2x$ 的原函数即不定积分,在等式两端关于 x 求积分

$$\int y'\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x,$$

可得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x+C^{①},$$

即

$$y=x^2+C\quad (C\text{ 为任意常数}). \tag{5.1.6}$$

由题设,曲线经过(1,2)点,将条件代入式(5.1.6)中,可得 $C=1$. 从而所求曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{5.1.7}$$

实际上,该问题是求解下面的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\ y\Big|_{x=1}=2\end{cases}.$$

我们注意到该任意常数是在求不定积分的过程中引入的. 对于微分方程(5.1.5),我们通过求一次不定积分得到满足方程的解,并且解中含有一个任意常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,因而式(5.1.6)是一阶微分方程(5.1.5)的通解.

例 4 国内生产总值 GDP 是指一个国家(或地区)在一定时期内所有生产经营活动的全部最终成果. 据统计,目前我国 GDP 每年增长率(增长速度除以前一年的 GDP)为10%,试分析多少年后方可翻两番.

解 首先我们通过分析问题,建立微分方程. 假设在第 t 年我国的 GDP 为 $N(t)$(亿元),显然,N 随时间 t(年)的变化而变化,即 N 是 t 的函数. 所谓的国内生产总值增长率也就是 N 关于时间 t 的变化率与 N 的比值,由前面所学导数的意义知,该变化率也就是国内生产总值 N 对时间 t 的导数,于是所求国内生产总值 $N(t)$ 满足下面的关系式:

$$\frac{N'(t)}{N}=0.1,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0.1N. \tag{5.1.8}$$

假设开始考察时国内生产总值为 N_0,即 $N(0)=N_0$. 接下来要讨论 GDP 翻两番的问题,我们先来找出 GDP$N(t)$ 随时间变化的规律性,即函数关系. 通过确定函数关系,我们

① 在本章约定 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 仅表示 $f(x)$ 的一个原函数.

就可以得到 GDP 在某一年的具体值，然后分析翻两番需要的时间. 这样所考虑的问题就变成，如何根据所得到的微分方程及 $t=0$ 时的条件得到所考察的函数 $N(t)$，即 GDP 随时间变化的函数关系.

对于式(5.1.8)这种类型微分方程的具体解法，我们在后面的内容中将会给出详细的求解过程. 此处，由该方程的形式我们发现 $N(t)$ 关于时间的导数等于函数本身的 0.1 倍，由前面所学习的指数函数 e^x 的导数的特点，假设 $N(t)=Ce^{0.1t}$，将它代入到方程(5.1.8)中，可验证函数 $N(t)=Ce^{0.1t}$ 确实满足微分方程(5.1.8)，$\frac{dN}{dt}=0.1Ce^{0.1t}=0.1N$. 利用开始考察时国内生产总值为 N_0，可得 $C=N_0$，从而 GDP 随时间变化的函数关系为 $N(t)=N_0e^{0.1t}$. 若使 GDP 翻两番，则需 $N(t)=N_0e^{0.1t}=4N_0$，可得 $t=10\ln 4\approx 14$(年).

在上面两个例子中，微分方程中所含有未知函数的最高阶导数都是一阶的，而在有些实际问题中，所建立的微分方程中会有更高阶的导数.

例 5　一物体在仅受重力作用的情况下作自由落体运动，试确定物体下落距离 s 与时间 t 的函数关系.

解　设物体在任一时刻 t 的下落距离为 $s=s(t)$，由于物体只受重力作用，所以物体运动的加速度为重力加速度 g，即

$$s''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=g. \tag{5.1.9}$$

此外，由自由落体运动的特点，$s(t)$ 还应该满足以下条件：

$$s(0)=0,\quad v(0)=s'(0)=0.$$

将这两个条件记作

$$s|_{t=0}=0,\quad v|_{t=0}=s'|_{t=0}=0. \tag{5.1.10}$$

由原函数的知识，将式(5.1.9)两端关于 t 积分一次，得

$$v=\frac{ds}{dt}=gt+C_1, \tag{5.1.11}$$

再对式(5.1.11)两端关于 t 积分一次，得

$$s=\int(gt+C_1)dt=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{5.1.12}$$

其中 C_1、C_2 都是积分常数. 把条件(5.1.10)代入到式(5.1.11)和(5.1.12)中，由 $v|_{t=0}=g\times 0+C_1=0$，可得 $C_1=0$，由 $s|_{t=0}=\frac{1}{2}g\times 0^2+C_1\times 0+C_2=0$，可得 $C_2=0$，将所得常数的值代入到式(5.1.12)中可得，$s=\frac{1}{2}gt^2$. 这正是大家熟知的自由落体的运动公式. 在该例中，微分方程(5.1.9)中未知函数 $s(t)$ 关于自变量的最高阶导数为 2，因此该方程为二阶微分方程. 式(5.1.12)是方程(5.1.9)通过积分两次后得到的含有两个独立的任意常数的解，因此式(5.1.12)是方程(5.1.9)的通解. 利用初始条件(5.1.10)确定了通解中两个任意常数，从而得到方程的特解. 例 5 中的问题就是求解初值问题

$$\begin{cases} s''=g \\ s|_{t=0}=0, s'|_{t=0}=0 \end{cases}.$$

积分曲线与方向场

前面给出了微分方程和解的概念，下面通过图形直观地给出通解和特解的几何解释.

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{5.1.13}$$

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上某区域 D 有定义. 方程的通解 $y=\varphi(x,C)$ 是平面上的一族曲线，称这族曲线为式(5.1.13)的**积分曲线族**(family of integral curves). 满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解是积分曲线族中过点 (x_0,y_0) 的一条**积分曲线**(integral curve). 如图 5-1-1 所示，例 1 中一阶微分方程的通解的图形是 xOy 平面上的一族曲线. 满足初始条件 $x=1,y=2$ 的特解是经过点(1,2)的一条积分曲线.

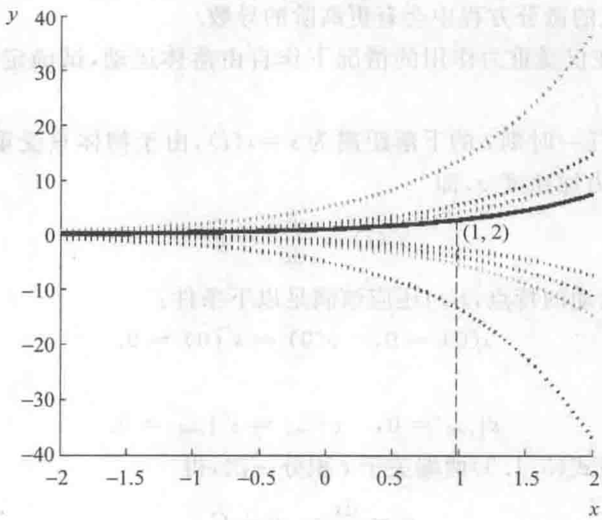

图 5-1-1

由方程(5.1.13)可知，过 D 内每一点 (x,y)，方程的积分曲线在该点的切线斜率等于函数 $f(x,y)$ 在该点的值. 于是，在区域 D 内每一点 (x,y)，以 α 表示积分曲线在该点的切线与 Ox 轴正向的夹角，即 $\tan\alpha=f(x,y)$.

过点 (x,y) 且与 Ox 轴正向构成角 α 的一条小线段称为**线素**(line element)，区域 D 内各点线素的总体称为微分方程的**方向场**(direction field)，这时的线素被称为方向场中的一个方向. 于是求解微分方程的问题可以解释为：求曲线族使其在各点处的切线方向与方向场在该点处的方向一致.

练习

1. 确定下列微分方程的阶数，并回答方程是否线性的.

(1) $x^2y''+6xy'+4y=0$；　　(2) $(y')^2+2yy'+x=0$；

(3) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；　　(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}P}+P\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}+Q=0$；

(5) $\frac{d^2y}{dx^2}+\cos y+2x=0$；　(6) $x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$；

(7) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$；　(8) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+e^y=x$.

2. 方程 $y=x+\int_0^x y\mathrm{d}x$ 可化为怎样的微分方程？

3. 已知 $Q=Ce^{Kt}$ 满足微分方程 $\frac{dQ}{dt}=-0.03Q$，问 C 和 K 的取值应如何？

4. 若 $y=\cos\omega t$ 是微分方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+9y=0$ 的解，求 ω 的值.

5. 验证：由 $x^2-xy+y^2=C$ 所确定的函数为微分方程 $(x-2y)y'=2x-y$ 的解.

6. 验证下列各函数是相应微分方程的解.

(1) $y=\frac{\sin x}{x}$，$xy'+y=\cos x$；

(2) $y=Ce^x$，$y''-2y'+y=0$，(C 是任意常数)

(3) $y=\sin x$，$y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0$；

(4) $y=-\frac{g(x)}{f(x)}$，$y'=\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}$.

7. 设曲线 $y=y(x)$ 上任一点 (x,y) 的切线垂直于此点与原点的连线，求曲线所满足的微分方程.

8. 某商品的销售量 Q 是价格 P 的函数，如果要使该商品的销售收入在价格变化的情况下保持不变，则销售量 Q 对于价格 P 的函数关系满足什么样的微分方程？在这种情况下，该商品的需求量相对价格 P 的弹性是多少？

9. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=2x$：

(1) 求出它的通解；

(2) 求通过点 $(1,4)$ 的特解；

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解；

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解；

(5) 画出(2)，(3)，(4)中解的图形.

5.2　一阶微分方程

由 5.1 的例子我们可以看到，利用所建立的未知函数的微分方程，如果能够求出满足微分方程的函数，可帮助我们去分析相关变量之间的依赖关系，寻找规律性. 那么如何来求得满足微分方程的解呢？

面对各种形式的微分方程找出求解的通用方法是根本不可能的. 但对于一些比较特殊的微分方程，我们还是可以根据方程的特点，找出求解的一般方法的. 本节介绍几种类型的一阶微分方程的解法.

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0. \tag{5.2.1}$$

若方程中的 y'可整理出来，则式(5.2.1)又可写为

$$y'=f(x,y), \tag{5.2.2}$$

有时式(5.2.2)又可写为如下对称形式：

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{5.2.3}$$

可分离变量的微分方程

首先我们介绍形如式(5.2.2)的一类特殊形式的方程的解法. 在 5.1 节中，我们利用找原函数的方法，通过对方程两端关于自变量 x 直接求不定积分求得了一阶微分方程(5.1.1)的通解.

一般情况下，在一阶微分方程(5.2.2)中，若右端的函数 $f(x,y)$中不显含 y，即形如

$$y'=f(x) \tag{5.2.4}$$

的方程，我们可以利用求原函数的方法得到该微分方程的通解. 下面将微分方程(5.2.4)进行改写，有

$$\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x, \tag{5.2.5}$$

然后在方程两端同时求积分，左端可看作关于 x 凑微分之后的结果，此时左端的积分变量为 y，右端的积分变量仍为 x，则得

$$y=\int f(x)\mathrm{d}x+C.$$

不难验证，它是微分方程(5.2.4)的通解. 然而并不是所有的一阶微分方程都可以通过这样的直接积分的方法求得方程的解. 若方程(5.2.2)式右端中显含 y，比如方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}, \tag{5.2.6}$$

则无法直接使用此方法. 然而，我们注意到，在对方程(5.2.5)两端直接求积分时，左端看做凑微分之后的结果，其实就是被积函数为 1，积分变量为 y 的不定积分. 如果形式作进一步的推广，当左端被积函数仅是 y 的函数，而右端仍为自变量 x 的函数的话，我们仍然可用两端同时求不定积分的方法求得相应一阶微分方程的通解. 观察方程(5.2.6)，我们将该方程作一下变形，把与变量 y 相关的项移到一边，另一边只与变量 x 相关，即

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x,$$

在该等式两端求积分，得

$$\int\left(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}x,$$

方程左端凑微分，得

$$\int y\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x.$$

此时左端积分变量为 y，右端的积分变量为 x，求积分可得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C_1,$$

即

$$x^2+y^2=C\quad (C=2C_1,\text{为任意常数})\tag{5.2.7}$$

该积分曲线对应着圆心在原点的一族同心圆. 由隐函数求导法则, 可验证式(5.2.7)所确定的隐函数确实满足方程(5.2.6), 且式(5.2.7)中含有一个任意常数, 因而是方程(5.2.6)的通解.

一般情况下, 如果一个一阶微分方程能写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)h(y)\tag{5.2.8}$$

的形式, 那么该方程称为**可分离变量的方程**(differential equation with separable variables). 该类型方程的特点是方程右端为只含有 x 的函数和只含有 y 的函数的乘积. 其实方程(5.2.6)就是 $f(x)=-x, h(y)=\frac{1}{y}$ 的可分离变量微分方程.

假设 $f(x)$ 与 $h(y)$ 都是连续函数, 且 $h(y)\neq 0$, 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=f(x)\mathrm{d}x,$$

然后两端积分, 左端积分变量为 y, 右端积分变量仍为 x:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $H(y), F(x)$ 分别是 $\frac{1}{h(y)}$ 和 $f(x)$ 的原函数, 于是有

$$H(y)=F(x)+C\quad (C\text{ 为任意常数})\tag{5.2.9}$$

根据隐函数求导法则很容易验证, 由式(5.2.9)所确定的隐函数满足微分方程(5.2.8). 式(5.2.9)称为微分方程(5.2.8)的**隐式解**(implicit solution), 且由于式(5.2.9)中含有一个任意常数, 因此, 式(5.2.9)为微分方程(5.2.8)的**隐式通解**(implicit general solution). 若 y 可解出, 则可得到**显式通解**(explicit general solution) $y=g(x,C)$.

将微分方程转化为形如(5.2.8)的过程称为**分离变量**(variables separation), 利用分离变量求解微分方程的方法称为**分离变量法**(variables separation method). 这是求解一阶微分方程的基本方法.

例 1 下列方程中哪些是可分离变量的微分方程?

(1) $y'=2xy$; (2) $3x^2+5x-y'=0$;

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$; (4) $y'=1+x+y^2+xy^2$.

解 (1) 是. 原方程可变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$.

(2) 是. 将原方程移项, 整理得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2+5x$, 分离变量可得 $\mathrm{d}y=(3x^2+5x)\mathrm{d}x$.

(3) 不是. 由于 x^2+y^2 无法整理成只含 x 和只含 y 的函数的乘积, 实现变量分离.

(4) 是. 将原方程右端因式分解可得 $y'=(1+x)(1+y^2)$, 然后分离变量可得 $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$.

例 2 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 此方程为可分离变量的微分方程. 分离变量后得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int 2x\mathrm{d}x,$$

即

$$\ln|y| = x^2 + C_1.$$

由此,得

$$y = \pm \mathrm{e}^{x^2+C_1} = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}.$$

因为$\pm \mathrm{e}^{C_1}$仍是不等于0的任意常数,把它记作C. 又可验证$y=0$也是微分方程的解(实际上是在分离变量时忽略的零为分母的情况),即$C=0$,从而可得到微分方程的通解

$$y = C\mathrm{e}^{x^2} \quad (C\text{为任意常数}).$$

例 3 求方程$x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$的通解.

解 方程两端同时除以$(x^2-1)(y^2-1)$,得

$$\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x + \frac{y}{(y^2-1)}\mathrm{d}y = 0,$$

即

$$\frac{y}{(y^2-1)}\mathrm{d}y = -\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x.$$

两端同时积分得

$$\ln|y^2-1| = -\ln|x^2-1| + C_1 \quad (C_1\text{为不为零的任意常数}).$$

利用对数的运算性质整理可得

$$\ln|(y^2-1)(x^2-1)| = C_1$$

两端取 e 指数并将绝对值号去掉可得

$$(x^2-1)(y^2-1) = C, \quad (C = \pm \mathrm{e}^{C_1}).$$

实际上,在分离变量的过程中,我们假设了$(x^2-1)(y^2-1)\neq 0$,即$x\neq\pm 1$或$y\neq\pm 1$. 而可验证$y=\pm 1$同样也是原方程的解,而这些解在上面所取通解中,当$C=0$时即可取得. 因此,我们可将丢掉的解补充到通解中,从而得到原方程的通解为

$$(x^2-1)(y^2-1) = C, \quad \text{其中}C\text{为任意常数}.$$

注释:由以上两例可以看到,对于任意常数C的取值我们关注的是它的取值范围,即能够取到哪些数.

例 4 指数增长或衰减模型.

在经济学和科学技术中经常会出现的一个模型就是指数模型,如马尔萨斯(Malthus)人口模型、冷却模型、放射性元素衰减模型等. 指数模型的求解就是分离变量法在实际中应用的典型例子.

指数模型是建立在所考察的量y的增长或衰减与目前的状态成固定比例上. 方程一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky. \tag{5.2.10}$$

其中 k 为比例系数，变量递增时，$k>0$；变量递减时，$k<0$. 在此，利用分离变量法我们可以求得指数模型的通解. 将方程(5.2.10)进行分离变量，然后两端积分可得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y}=\int k\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y|=kx+C_1.$$

两端取 e 指数：

$$\mathrm{e}^{\ln|y|}=\mathrm{e}^{kx+C_1},$$

$$|y|=\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{kx}.$$

将绝对值号去掉可得

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{kx},$$

取 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$，则有

$$y=C\mathrm{e}^{kx}.$$

注意到 $y=0$ 也是原方程的解，因此原方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{kx}$，其中 C 为任意常数.

实际上，在 5.1 节的例 4 中的微分方程(5.1.8)就是指数模型. 利用分离变量法我们可得到该方程的通解. 对于方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0.1N,$$

将该方程进行分离变量，然后两端积分可得

$$\int\frac{\mathrm{d}N}{N}=\int 0.1\mathrm{d}t,$$

$$\ln|N|=0.1t+C_1.$$

将 N 解出来可得微分方程的通解

$$N=C\mathrm{e}^{0.1t}.$$

其中 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 为任意常数. 然后将初值条件代入到通解中即可得到该微分方程的特解.

例 5 学习过程模型.

考察一个人掌握一项新知识的学习过程. 一种理论认为，对一项工作，一个人学得越来越多，他学得就会越来越慢. 换句话说，如果以 y 表示已经掌握了这项工作的量，以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 表示学习速度，那么由该理论，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 将随着 y 的增长而下降. 假设学习时间 $t=0$ 时，$y=0$. 如果整个需要学习的量设为 100，则可以建立如下模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=100-y,\\ y(0)=0\end{cases}$$

这是一个可分离变量的微分方程的初值问题，其解为

$$y=100-100\mathrm{e}^{-t}.$$

练习

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y'=\mathrm{e}^{x+y}$；　　(2) $y'=x\sqrt{1-y^2}$；

(3) $3x^2+5x-y'=0$； (4) $3e^x\tan y\mathrm{d}x+(2-e^x)\sec^2 y\mathrm{d}y=0$；

(5) $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$； (6) $(y+1)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^3=0$；

(7) $(1+x)y\mathrm{d}x+(1-y)x\mathrm{d}y=0$； (8) $\tan y\mathrm{d}x-\cot x\mathrm{d}y=0$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x=0, y|_{x=2}=1$；

(2) $y'\sin x=y\ln y, y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$；

(3) $e^x\cos y\mathrm{d}x+(e^x+1)\sin y\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；

(4) $\sin y\cos x\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x, y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；

(5) $y^2\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=1$.

3. 当湖面结冰时，湖水表面一层最先冻上，而水中的热量则是通过冰层向上传播然后散失在空气中的. 这样一来，更多的水冻成了冰. 假设 y 代表冰层的厚度，它是时间 t 的函数. 因为冰层越厚，热量通过冰层向上传到冰面外空气中的时间就越长，就假设结冰的速率与已结冰的厚度成反比，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{y},\quad k>0$$

求函数 $y(t)$.

4. 镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比，有资料表明，镭经过 1 600 年后，只余原始量 R_0 的一半，试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

5. 研究表明：驾车发生事故的风险率 R(百分比)与司机血液中的酒精浓度 b(百分比)有关，R 与 b 满足如下微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}b}=kR$，假设 $R(0)=1\%$，$R(0.14)=20\%$，求$R(b)$，并由此确定：当血液中酒精浓度达到多少时，事故的风险率为 100%.

齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.2.11}$$

的方程称为**齐次方程**(homogeneous equation).

如方程$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$ 是齐次方程. 事实上，我们可将方程进行变形：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}.$$

对于齐次方程的求解，难点在于方程右端的形式，不能直接对方程两端积分，也无法分离变量. 但是基于其特点，右端是关于$\dfrac{y}{x}$的复合函数，因而考虑能否将$\dfrac{y}{x}$整体看作一个新的未知函数，引入变量代换从而简化微分方程的求解. 事实上，在齐次方程(5.2.11)中，如果令