对偶三角模-三角余模逻辑及推理

张兴芳 著

科学出版社

对偶三角模-三角余模逻辑及推理

张兴芳 著

国家自然科学基金资助出版

科学出版社

北京

内 容 简 介

非经典逻辑及推理的种类和成果颇多, 限于篇幅, 本书总结作者 2005 年以来关于概率论、Lawry 的适当测度理论、刘宝碇的不确定理论、模糊集理论与数理逻辑理论的结合研究成果. 根据非经典命题和谓词的不确定性的各种特征, 作者分别提出了相应的逻辑和推理方法, 概括其本质分别称为随机命题的概率逻辑、Vague 命题的 Lawry 对偶三角模-三角余模逻辑, 不确定命题和一阶不确定谓词的对偶下-上确界逻辑、模糊命题的三角模-蕴涵逻辑和三角模-蕴涵概率逻辑、随机模糊命题的三角模-蕴涵概率逻辑和一阶随机模糊谓词的三角模-蕴涵概率逻辑.

本书可作为非经典逻辑、推理及应用研究的学者的参考资料, 也可以作为数学、计算机、智能控制、不确定信息处理等相关专业的硕士研究生和博士研究生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

对偶三角模-三角余模逻辑及推理/张兴芳著. —北京：科学出版社, 2015. 2
ISBN 978-7-03-043280-3

Ⅰ. ①对… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数理逻辑—研究 Ⅳ. ①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 025887 号

责任编辑: 赵彦超 李静科 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 2 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 2 月第一次印刷 印张: 16 1/2
字数: 352 000

定价: 88.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

在经典逻辑中, 一个命题非真即假, 通常用 1 表示真, 0 表示假, 因此这种逻辑也称为二值逻辑[1-7]. 二值逻辑是判断、推理论证和实际决策的根基, 是计算机科学和机器自动证明的必不可少的工具. 然而, 在现实生活中, 由于各种各样的不确定性, 命题的真假常常是不确定的. 这就是所谓的非经典命题. 下述命题都是非经典命题.

(i) ξ_1：掷一枚硬币将会出现正面.

(ii) ξ_2：小张明年 10 月 1 日将在天津.

(iii) $\xi_3=(\forall x)\gamma(x), x\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$：系统 H 的每个子系统都正常, 这里 $\gamma(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 分别表示系统 H 的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个子系统正常.

(iv) ξ_4：身高 170cm 的人属于高个子.

(v) ξ_5：身高 168cm 的人属于中等个子.

(vi) $\xi_6=(\forall x)\eta(x), x\in[165,175]$：身高在区间 [165,175] 内的人都是高个子, 这里 $\eta(x), x\in[165,175]$ 表示身高为 x 的人是高个子.

(vii) ξ_7：明天将下小雨.

(viii) ξ_8：(猜测) 目前小张在天津.

命题 ξ_1 是非经典命题, 因为它描述的事件发生的结果具有不确定性 (人们称这种不确定性为随机性或客观不确定性). 命题 ξ_2,ξ_3 是非经典命题, 因为它们所描述的事件皆具有不确定性 (人们称这种不确定性为主观不确定性). 命题 ξ_4,ξ_5,ξ_6 是非经典命题, 因为在这些命题中分别包含不清晰概念“高个子”“中等个子”和“高个子”. 人们称这种概念为模糊 (Fuzzy) 或含糊 (Vague) 概念. ξ_7 是非经典命题, 因为它既包含主观不确定性, 也包含模糊概念“小雨”. ξ_8 是非经典命题, 因为它具有信息不完全性.

经典逻辑演算的语义理论的主要贡献在于以下三点:

(i) 科学地定义了命题连接词关于真值的演算法则;

(ii) 基于 (i) 提供了命题真值恒为 1 和恒为 0 的规律 (即重言式和矛盾式);

(iii) 科学地建立了命题真值的推理规则.

显然, 基于经典逻辑演算理论无法判断上述命题的真值是 1 还是 0, 从而也就无法知道它们复合的非重言式和非矛盾式的真值是 1 还是 0. 我们只能知道重言式的真值是 1, 矛盾式的真值是 0(比如, 重言式 $\xi_1\vee\neg\xi_1$ 和矛盾式 $\xi_1\wedge\neg\xi_1$ 的真值

是 1 和 0). 因此, 现实生活需要建立度量非经典命题是真的可能程度 (或信任程度) 的理论.

针对命题真假的不确定性, 首先, 在 1920 年, Lukasiewicz 基于非经典命题, 将命题的真值集由 $\{0,1\}$ 扩充到 $\{0,0.5,1\}$, 通过模拟经典逻辑演算理论的思想方法, 提出了三值逻辑. 接着, 人们推广到几种多值逻辑, 如 Gödel 逻辑和乘积逻辑. 在 1965 年, Zadeh 提出了模糊集理论. 人们又基于模糊集理论和从蕴涵推理的科学角度, 提出了各种多值逻辑, 如 R_0 逻辑[53]、连续 t-模基础逻辑 BL[57]、左连续三角模 (记作 t-模) 基础逻辑 MTL[58]、左连续 t-模 NM 逻辑, 其中 R_0 逻辑和 NM 逻辑是等价的[54,56], Lukasiewicz 逻辑、Gödel 逻辑和乘积逻辑都是 BL 的扩张[57], BL 是 MTL 的扩张, NM 是 MTL 的扩张[58].

作者的科学研究始于 1987 年, 首先接触的是邓聚龙创立的"灰色数学", 研究的第一个课题是 "区间线性方程组的解法". 1990 年, 作者在中英合办的杂志 *The Journal of Grey System*上发表了第一篇论文*A kind of systend grey linear equations and the solution of it matrix*[86], 它激发了作者科学研究的兴趣. 后来作者转向模糊数学的研究. 在模糊评价、模糊模式识别、模糊聚类分析、模糊数理论、区间值理论、区间值模糊集及模糊数模糊集 (国外学者称型 2 模糊集) 理论及应用方面作者又发表了 30 余篇论文. 作者于 2002 年 3~6 月, 在陕西师范大学做王国俊教授的访问学者, 至此开始了多值逻辑的研究, 并发表了 100 余篇论文[66,73,75,80−82]. 特别是最近, 鉴于目前多值逻辑的种类繁多, 有着各自的长处和短处, 从采多家之建议和尽量减少风险的思想的角度, 基于连续 t-模基本逻辑 BL, 提出了模糊命题的多维三层逻辑[84].

目前, 以 Lukasiewicz 逻辑为代表的多值逻辑的内容已经非常丰富, 理论比较完善[49,98−105], 而且也得到一些应用. 但是, 它们对于某些包含随机性的命题 (简称随机命题) 的赋值具有不合理性. 例如, 从客观上随机命题 $\xi_1 \vee \neg\xi_1$ 应当是永真的, 而在多值逻辑下, 它不是真的 (作者在文献 [35] 中验证了这一点). Dubois 和 Prade 早在 1988 年就证明了任何一种命题连接词的固定演算法则都不能使对应的多值逻辑系统和谐于经典逻辑[52]. 这正是某些学者对多值逻辑的科学性产生质疑的原因[62,63]. 然而, 这仅说明它们不适应处理随机命题, 但不能完全否定它们的价值. 它们可以处理包含 Fuzzy 概念的命题 (简称 Fuzzy 命题). 所以多值逻辑学者又称连续值逻辑为 Fuzzy 逻辑. Fuzzy 逻辑的重要意义在于蕴涵推理, 这正是 Fuzzy 逻辑学者研究的热点[96−100,120,130,131].

针对 Lukasiewicz 逻辑处理随机性的不适应性, 早在 1933 年, A.N.Kolmogoroff 依据随机事件发生的频率的性质, 就提出了概率测度, 由此产生了概率论[8,9,13]. 自然地, 某些学者将概率论引入到逻辑中, 提出了处理随机命题的概率逻辑[10−12,14−16,44−47,60,61].

在王国俊关于多值逻辑的研究中, 公式的真度理论是一个主要分支. 作者在做王国俊的访问学者期间, 仅具有命题逻辑公式的真度理论[17], 还没有建立谓词逻辑公式的真度理论. 所以, 作者开始致力于谓词逻辑公式的真度理论的研究. 在此方面发表了一些成果[64−72]. 但是直到 2009 年也没有建立谓词逻辑公式真度的一般理论. 其实, 王国俊的真度理论的实质就是概率逻辑. 如今它已硕果累累, 发展为一门数学分支, 称为计量逻辑学[18,89−95,118,119].

概率逻辑也不尽善尽美. 一方面, 概率逻辑依赖客观的或历史的统计数据, 而我们往往无法得到客观的或历史的统计数据. 那么, 我们不得不依靠专家经验智能评价命题的真实程度. 人们往往高估不可能发生的事件, 如果仍然采用概率计算, 所得结果往往不可信服. 例如, 对于命题 ξ_7, 当 n 较大时, 由 $\gamma(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的真的概率 0.99, 通过概率乘积计算得到 $\xi_7=(\forall x)\gamma(x), x\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 真的概率 0.99^n 很小. 就此小小的数, 按理应该决策它是假的, 然而, 在实际中人们往往不接受它假, 而决策它真. 另一方面, 概率逻辑不适应含有 Fuzzy 概念的命题. 例如, 对于命题 $\xi_6=(\forall x)\eta(x), x\in[165,175]$, 运用概率的乘积算法既不可信也无法实现. 其理由是: 对任何两个 $x_1,x_2\in[165,175], x_1\neq x_2$, 命题 $\eta(x_1)$ 和 $\eta(x_2)$ 既有相关性又有独立性. 例如, 命题 $\eta(70)$ 和 $\eta(67)$, 我们说它们相关是因为它们的真值的大小有相对关系; 我们说它们独立是因为它们可以同时真, 同时假. 况且我们也无法实现非有限或可数的无限次的概率乘积运算. 正是上述原因, 在 1965 年, Zadeh 才针对 Fuzzy 概念提出了 Fuzzy 集理论[48]. 从而, 人们才基于 Fuzzy 集理论, 模仿经典逻辑真值演算的方式, 提出了多种多值逻辑. 在多值逻辑下, 命题 $\xi_6=(\forall x)\eta(x), x\in[165,175]$ 的真值, 使用下确界运算不仅解决了命题 $\xi_6=(\forall x)\eta(x), x\in[165,175]$ 无法实现乘积运算的难题, 而且也是合理的. 这正是至今一般性的概率谓词逻辑没有建立而 Fuzzy 谓词逻辑早已有之的原因[59].

固然 Fuzzy 逻辑能够处理 Fuzzy 命题, 其长处是推理能力较强和相对概率逻辑简便. 但是它无法克服和经典逻辑的排中律和矛盾律的不和谐性. 鉴于此, 2004 年, Lawry 基于随机集和概率统计的思想提出了处理 Fuzzy 概念的一种新方法[19−24]. 比如, 按照逻辑 BL 和逻辑 MTL, 如果赋予命题 ξ_4 和 ξ_5 的真值分别是 $v(\xi_4)=0.5$ 和 $v(\xi_5)=0.5$, 则命题 $\xi_4\vee\xi_5$ 的真值是 $\min\{0.5,0.5\}=0.5$. 按照 Lawry 提供的模型 (其实是概率逻辑), 如果邀请 10 个专家, 有 6 个专家说身高 168cm 属于高个子或属于中等个子, 则 $\xi_4\vee\xi_5$ 的适当测度为 0.6. 我们可认为它是命题 $\xi_4\vee\xi_5$ 真的可能程度. 尽管对于同一命题, Lawry 的逻辑给出了与逻辑 MTL 不同的赋值, 但是按照其自身的解释也有其科学意义. 于是, 作者将 Lawry 的不确定模型移植到逻辑中, 提出了 Vague(或 Fuzzy) 命题的 Lawry 逻辑[83]. 虽然 Lawry 的模型有其意义, 但是其应用范围较窄 (仅限制在同主语上). 为了扩充其应用范围, 我们通过对连接词 “$\wedge$” 和 “$\vee$” 使用两对算子: 乘积三角模和对偶余模-加法、下确界三角模和对

偶三角余模–上确界, 分别提出了两种新的非经典逻辑, 称为 Vague 命题的 Lawry 乘–加逻辑和 Lawry 下–上确界逻辑[85].

鉴于概率计算具有和谐于经典逻辑的长处, 概率乘积运算不能实现无限数据的乘积算法的短处, Fuzzy 逻辑提供的确界运算具有处理主观数据的长处, 不和谐于经典逻辑的短处, 刘宝碇在 2007 年又基于正规性公理、对偶性公理、次可加性公理和乘积公理提出了一种智能处理不确定性的新的数学理论, 称为不确定理论[25−27]. 它已广泛应用到各种实际问题中[30−43]. 特别是, 李想和刘宝碇基于不确定理论初步提出了不确定命题逻辑[28], 陈孝伟提出了带有独立性不确定命题的公式的真值 (本项目称真度) 计算的一般方法[29].

作者于 2009 年又到清华大学做刘宝碇的访问学者, 开始了不确定理论及其应用 (特别是不确定逻辑) 的研究. 最近, 作者基于李想和刘宝碇的不确定命题逻辑提出了不确定推理模型[38], 并且初步建立了一阶不确定谓词逻辑的语义理论[39].

任何一种理论的存在必然有它的价值. 任何理论不可能包络万象, 十全十美. 多值演算逻辑、概率逻辑和不确定逻辑来自不同的角度和认识, 从自身的系统都有着各自的意义. 因此它们都有待于进一步完善和发展.

本书主要介绍作者自己关于非经典逻辑的研究成果, 其结构、基本内容安排和说明如下.

第 1 章介绍后续几章用到的经典逻辑、概率论和不确定理论的基础知识.

第 2 章鉴于带随机性的命题 (称之为随机命题), 基于概率论推广二值逻辑的语义, 这是数学理论发展的必然. 因此, 目前这种研究成果 (特别是追随王国俊教授的这种研究 (称为计量逻辑)) 很多, 内容也非常丰富. 但其描述方式不一. 不过究其本质, 都是上述思想的体现. 据其共性, 可统称它们为概率逻辑. 作者以前曾写过这方面的论文, 随着研究的深入, 一直没有定稿. 本书的内容是作者借鉴一些专家的成果和思想, 基于最近的思想体系, 重新编写的.

第 3 章由作者发表的两篇论文[83,85] 和一篇没有发表的论文构成. 这种逻辑研究的对象是带有含糊 (或模糊) 概念的命题 (称为 Vague(或 Fuzzy) 命题). 究其实质对于相关 Vague 命题采用了专家数据概率统计的思想, 对于独立 Vague 命题使用了乘积三角模和对偶三角余模–加法及下确界三角模和对偶三角余模–上确界两对算法. 考虑处理模糊概念的专家数据的概率统计法是 Lawry 提出的, 为了突出概率测度的对偶性、三角模算子和对偶三角余模算子, 所以统称这类逻辑为 Vague 命题的 Lawry 对偶三角模–三角余模逻辑.

第 4 章介绍不确定命题的对偶下–上确界逻辑与推理. 这种逻辑的研究对象是非经典命题. 因为它建立在二值命题的真假不确定的思想之上, 所以在这章中称非经典命题为不确定命题. 这种逻辑来自于刘宝碇的不确定测度, 而不确定测度与概率测度一样具有对偶性, 且其乘积测度采用了下确界三角模和对偶三角余模上确

界, 因此本书称这种逻辑为不确定命题的对偶下–上确界逻辑 (简称不确定命题逻辑). 其内容吸收了李想和刘宝碇的不确定逻辑[28] 和陈孝伟等的真值定理[29] 的成果. 其主要内容是按照作者的思想体系重新编写的.

第 5 章的一阶不确定谓词的下–上确界逻辑是一阶经典谓词逻辑的延伸. 它来自于作者和李想的论文[39]. 这种研究刚刚开始, 其理论有待完善和发展.

在第 6 章中, 因为多值逻辑的基本思想是连接词 "并且" 和 "蕴涵" 分别使用了三角模和伴随蕴涵算子, 所以本书又称 Hajek 提出的 BL 逻辑和 Esteva 等提出的 MTL 三角模逻辑为三角模–蕴涵逻辑. 这种研究在非经典逻辑界占主流, 成果最多, 内容最丰富. 限于篇幅本书不介绍他人的成果, 仅介绍自己及研究生李成允和张安英别具特色的成果 (部分成果还没有发表).

在第 7 章中, 由于某些命题不仅具有随机性也包含模糊概念, 所以基于概率论推广多值逻辑是数学理论发展的必然. 显然, 这种理论可称为随机模糊命题的多值概率逻辑.

作者关于本章课题的研究颇多. 特别是作者建立的模糊逻辑系统的相容度理论比较王国俊教授等学者建立的这种理论, 具有鲜明的特色, 其内容较系统和丰富, 且曾得到王国俊教授的认可和高度评价. 此外, 本章还介绍作者最近在多值逻辑 MTL 下建立的概率真度理论 (目前还没有发表).

基于概率论推广一阶模糊谓词逻辑是数学理论发展的必然. 第 8 章的内容是作者早期发表的成果[64,65,67,71,72]. 目前这种研究较少. 限于本书的篇幅, 本书不介绍他人的成果.

关于书名的说明: 从第 2 章随机命题的概率逻辑与推理、第 3 章 Vague 命题的 Lawry 对偶三角模–三角余模逻辑、第 4 章不确定命题的对偶下–上确界逻辑与推理和第 5 章一阶不确定谓词的对偶下–上确界逻辑的说明可以看出它们都应用了具有对偶性的测度, 连接词 "交" 和 "并", 都使用了三角模和对偶三角余模, 所以可统称它们为对偶三角模–三角余模逻辑.

鉴于概率测度和不确定测度分别使用了三角模乘积、三角模下确界和对偶三角余模概率和、上确界两对算子, 作者已经推广它们为对偶三角模–三角余模测度, 并基于此, 建立更广义的逻辑–对偶三角模–三角模余模逻辑. 由于这方面的内容还不很成熟, 本书没有介绍, 以后再版时再补加.

虽然本书的后几章的随机模糊命题的多值概率逻辑与前几章的二值不确定命题的对偶三角模–三角余模逻辑有一定的差别. 但考虑书名的简洁性和特色性, 本书命名为对偶三角模–三角余模逻辑及推理.

作者能够将自己 10 余年关于非经典逻辑的辛勤研究的独具特色的成果形成此书和读者商榷, 首先感谢王国俊教授、刘宝碇教授的培养和指导, 还要感谢同行专家和同事的鼓励和支持, 2013 年国家自然科学基金 (项目编号: 61273044) 和 2015

年国家自然科学基金 (项目编号: 11471152) 的资助. 其次更要感谢科学出版社编校人员为本书的出版做了许多细致的工作.

作者从 2003 年研究各种非经典逻辑至今, 成果数量颇多, 观点比较新颖, 有独到的见解. 正因如此, 书中会有某些提法读者可能不易理解和接受. 限于作者的水平, 也可能会出现某些不妥之处, 望读者见谅, 并提出宝贵意见.

张兴芳

2014 年 9 月 1 日

符 号 说 明

第 1 章

ξ_i	命题变量
或 $\left.\begin{matrix} X, Y, Z, \cdots \\ X_1, X_2, \cdots \end{matrix}\right\}$	命题变量公式
$X(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$	包含 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的公式
$F(S)$	命题变量公式之集
$v(X)$	X 的赋值或 X 的真值
Ω	$F(S)$ 上的全体赋值之集
$f_{\xi_i}(x_i)$	ξ_i 的真 (或 Boole) 函数
$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	X 的真 (或 Boole) 函数
$\models X$	X 为重言式
$\models \neg X$	X 为矛盾式
$X \approx Y$	X 与 Y 语义逻辑等价
$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$	$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 产生的合取公式
$W[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$	$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 产生的所有合取公式
$\Gamma \vdash X$	从 Γ 到 X 的证明
$\mathcal{L}$	一阶语言
$\mathrm{Var}(L)$	全体变元之集
$\mathrm{Const}(L)$	全体个体常元之集
$\mathrm{Tem}(\mathcal{L})$	全体项之集
$\xi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$	n 元谓词命题
$X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	包含变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的谓词公式 X
D_I	解释 I 的论域
$\Omega_I(\mathcal{L})$	$\mathcal{L}$ 在 I 中的赋值的全体
$I \models \neg X$	X 是关于 I 的假公式
$\mathrm{Cl}X$	X 的闭包
$X \approx Y$	X 与 Y 逻辑等价
(Ω, L, P)	概率空间
$E[\xi]$	ξ 的数学期望
(Γ, L, M)	不确定空间
ξ	不确定变量
Φ	ξ 的不确定分布

Φ^{-1}	ξ 的逆不确定分布

第 2 章

RProPL	随机命题的概率逻辑
$X(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$	包含 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的公式
S	随机变量之集
$F(S)$	随机变量公式之集
$\Phi_{\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}}$	随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的一个联合概率分布
$\mathrm{G}(X)$	X 的析取范式
$T(X)$	X 的真度
$M=(\Sigma,v)$	$F(S)$ 的一个模型
$X^{(k)}=X(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\xi_{n+1},\cdots,\xi_{n+k})$	$X(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的 k 元扩张
$S(X,Y)$	X 与 Y 的相似度
$\rho(X,Y)$	X 与 Y 的距离
$T(\psi\|\phi)$	ψ 相对 φ 的概率真度
$T_{\min}(X)$	最小概率真度
$T_{\max}(X)$	最大概率真度
$T_E(X)$	期望概率真度
$T_H(X)$	H 概率真度

第 3 章

$L_1,L_2,\cdots,L_n$	论域皆为 Ω 的一类 (相关的)Vague 概念
$\mathrm{LA}=\{L_1,L_2,\cdots,L_n\}$	标签
$\varphi,\phi,\cdots$	标签表达式
LE	由 LA 产生的 $(\neg,\wedge,\vee)$ 型自由代数
$\mu_\theta(x)$	事件 $\lambda(\theta)$ 的适当测度或发生的概率
Val	LA 上所有赋值的全体
φ 推出 ψ	$\varphi\|=\psi$
$\varphi\equiv\psi$	φ 逻辑等价 ψ
$[\theta]$	θ 的析取范式
f_{θ^*}	θ 的扩张 θ^* 的真函数
$\mathrm{LE}(x)$	$\mathrm{LA}(x)=\{L(x)\|L\in\mathrm{LA}\}$ 产生的 $(\sim,\cap,\cup)$ 型自由代数
$t_{\mathrm{La}}(\theta(x))$	同主语含糊命题 $\theta(x)$ 的 Lawry 真度
$F(S)-S=\mathrm{LA}(x_1)\cup\mathrm{LA}(x_2)\cup\cdots\cup\mathrm{LA}(x_n)\cup\cdots$	产生的 $(\sim\cap,\cup)$ 型自由代数
$T^{\mathrm{II}}(\varphi)$	φ 的 Lawry 乘-加真度
$T^t(\varphi)$	Lawry t-s 真度
$\Omega_L\subset\Omega$	$L\in\mathrm{LA}$
$D(\Omega_L)$	由 Ω_L 产生的 $(\mathrm{c},\cap,\cup)$ 型自由代数

$\{P_{L_i} \| L_i \in \mathrm{LA}\}$	(LA, Ω) 的有限群函数
$\mathrm{Val}(\Omega_L)$	Ω_L 上所有赋值的全体
$F(L(\Omega_L))$	由 $L(\Omega_L) = \{L(z) \| z \in \Omega_L\} \subset L(\Omega)$ 产生的 $(\sim, \cap, \cup)$ 型自由代数
$t(A(L))$	同 Vague 谓词命题 $A(L)$ 真的概率, 简称 $A(L)$ 的概率真度

第 4 章

S	不确定命题 (不确定变量) 之集
$F(S)$	不确定命题 (不确定变量) 公式之集
UProL	不确定逻辑
$T(X)$	不确定命题公式 X 的真度
$[X]$	事件 $\{X = 1\}$

第 5 章

UPreL	一阶不确定谓词逻辑
ULa	UPreL 的语言
UI	ULa 的一个不确定解释
$\Sigma = (\mathrm{ULa}, F(\mathrm{ULa}), \mathrm{UI})$	UPreL 中的一个结构
$T(X) = M\{X = 1\}$	不确定谓词公式 X 的真度

第 6 章

$*$	三角模
$R_{(q,p)}$-LGN	模糊蕴涵算子族 $R_{(q,p)}$-LGN $((q,p) \in [-1,1] \times (-\infty, 0))$
$T_{(q,p)}$-LGN	左连续三角模族 $T_{(q,p)}$-LGN $((q,p) \in [-1,1] \times (-\infty, 0))$
R_p-LΠG	模糊蕴涵算子族 $R_{,p}$-LΠG $(p \in [0, \infty) \cup (-\infty, 0) \cup \{-\infty\})$
T_p-LΠG	左连续三角模族 T_p-LΠG $(p \in [0, \infty) \cup (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$
$R_{(q,p)}$-LΠ GN	模糊蕴涵算子族 $R_{((q,p)} - \mathrm{L\Pi GN}((q,p) \in [-1,1] \times (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \cup (1, 0))$
$T_{(q,p)}$ -LΠGN	左连续三角模族 $\mathrm{L\Pi GN}((q,p) \in [-1,1] \times (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \cup (1, 0))$

第 7 章

$\underline{\tau}(\Gamma)$	理论 Γ 的下真度
$\mathrm{Consist}_R(\Gamma)$	理论 Γ 的相容度
$\mathrm{Inconsist}(\Gamma)$	理论 Γ 的不相容度
$\mathrm{div}_R(\Gamma)$	理论 Γ 的发散度
$\rho_R(A, B)$	公式 A 与 B 距离
$\overline{A}$	A 的诱导函数
$\mathrm{Ker}(A)$	A 的核
$0\mathrm{Ker}(A)$	A 的零核
$m(\mathrm{Ker}(A))$	$\mathrm{Ker}(A)$ 的 Lebesgue 测度

$m(0\mathrm{Ker}(A))$	$0\mathrm{Ker}(A)$ 的 Lebesgue 测度
$D(\Gamma)=\{A\in F(S)\vert\Gamma\vdash A\}$	Γ 的推论之集
$A\backsim B$	A 与 B 是可证等价
$A\approx B$	A 与 B 是逻辑等价
$\rho(\Gamma_1,\Gamma_2)$	公式集 Γ_1 与 Γ_2 的距离
$\eta(\Gamma)$	理论 Γ 的弱相容度
$\Omega(X)$	X 上的全体赋值之集
$\mathrm{Var}(\varphi)$	φ 的命题变元集
$\Omega(\mathrm{Var}(\varphi))$	$\mathrm{Var}(\varphi)$ 上全体赋值之集
$\vert\Omega(\varphi)\vert$	$\Omega(\varphi)$ 的势
$\tau_R(\varphi)$	φ 的 R-真度
$\Gamma\vdash\varphi_n$	Γ 推出 φ_n
$\tau_{\Gamma\alpha}(\phi)$	公式 φ 在 Γ 下的模糊条件 α-真度
$\mathrm{Prov}(\Gamma)$	公式 B 的理论 Γ 可证度
$f_\phi\vert C$	f_ϕ 在 $[0,1]^n$ 上的限制
$*_{\mathrm{MTL}}$	一个左连续 t-模
$*_{\mathrm{BL}}$	一个连续 t-模
$f_{\mathrm{var}(\varphi)}$	$\mathrm{Var}(\varphi)$ 上的一个联合赋值分布 (密度) 函数
$T(\varphi\vert\psi)$.	φ 在给定的 ψ 下的条件概率真度
$S(\varphi,\psi)$	φ 与 ψ 的相似度

第 8 章

f_i^n	函数符号
A_i^n	谓词符号
$\mathrm{Var}(\phi)$	ϕ 的全体变元之集
$\mathrm{Const}(\phi)$	全体个体常元之集
$\mathrm{Term}(\phi)$	全体项之集
$F(\phi)$	全体公式之集
$(\exists x_i)A$	$\neg(\forall x_i)\neg A$
$A\wedge B$	$\neg(\neg A\vee\neg B)$
D_I	解释 I 的论域
$\Omega_A(I)$	全体 I-赋值之集, 其中 $\Omega_A(I)$ 为幂集
$v(A)=\vert\vert A\vert\vert_{I,v}^M$	A 关于 v 的真值
$\tau_I(A)$	A 的解释 I 真度
$\{I_m\}$	解释模型 $\{I_m\}_{m=1}^n$ 或 $\{I_m\}_{m=1}^\infty$
$\bar{\tau}(A)$	解释模型 $\{I_m\}_{m=1}^n$ 的上真度
$\bar{\tau}(A)$	解释模型 $\{I_m\}_{m=1}^n$ 的下真度
$\int_{[a,b]^n}f\mathrm{d}w$	$\int_{[a,b]^n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}w$

目　　录

第1章　预 备 知 识

1.1　二值命题演算的基础知识

1.1.1　命题变量及其公式

用符号 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 表示简单陈述句, 并且用符号 $\neg,\wedge,\vee$ 和 $\rightarrow$ 分别表示连接词"非""并且""或者"和"蕴涵". 符号 ( ) 表示括号. 这样任何非简单陈述句都可以使用上述符号表示. 例如, 如果用符号 ξ_1,ξ_2,ξ_3 和 ξ_4 分别表示"小王明天在北京""小张明天在北京""小王明天去天安门"和"小张明天去天安门", 则符号 $\xi_1\wedge\xi_2\rightarrow\xi_3\wedge\xi_4$ 表示非简单陈述句"若小王明天在北京且小张明天在北京, 则他们两个明天都去天安门". 类似地, 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 和 ξ_4 分别表示简单陈述句"小王是一个大个子""小张是一个大个子""小王爱打篮球"和"小张爱打篮球", 则符号 $\neg\xi_1$ 表示陈述句"并非小王是一个大个子", 符号 $(\xi_1\rightarrow\xi_3)\wedge(\xi_2\rightarrow\xi_4)$ 表示陈述句"若小王是一个大个子则小王爱打篮球且若小张是一个大个子则小张爱打篮球".

符号 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 分别可以表示任何命题, 因此可以说它们是命题变量.

定义 1.1.1　设 $S=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$ 是有限或可数个命题变量集, $F(S)$ 是由 S 产生的 $(\neg,\rightarrow)$ 型自由代数, 即

(i) 若 $\xi_i\in S$, 则 $\xi_i\in F(S)$;

(ii) 若 $X,Y\in F(S)$, 则 $\neg X,X\rightarrow Y\in F(S)$;

(iii) $F(S)$ 中的元素都能由 S 中的元素通过 (i) 和 (ii) 的方式产生.

称 $F(S)$ 中的元素为命题变量公式.

一般用大写英文字母 $X,Y,Z,\cdots$ 或 $X_1,X_2,\cdots$ 表示命题变量公式. 若命题变量公式包含命题变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 则它可记作 $X(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$.

例如, $\xi_1,\neg\xi_1,\neg\xi_1\rightarrow\xi_2,\neg(\xi_1\rightarrow\xi_2)$ 都是命题变量公式. 注意运算顺序是先括号, 再 $\neg$, 然后是 $\rightarrow$.

以上没有用到连接词 $\wedge$ 和 $\vee$, 其实它们都可以用 $\neg,\rightarrow$ 表达. 规定 $X\vee Y$ 是 $\neg X\rightarrow Y$ 的简写, $X\wedge Y$ 是 $\neg(X\rightarrow\neg Y)$ 的简写.

1.1.2　语义理论

定义 1.1.2　设映射 $v:F(S)\rightarrow\{0,1\}$. 如果 v 满足条件:

(i) 对于任一公式 $X\in F(S),v(\neg X)=1-v(X)$;

(ii) 对于任二公式 $X, Y \in F(S)$, $v(X \to Y) = 0$ 当且仅当 $v(X) = 1$ 且 $v(Y) = 0$,
则称 v 为 $F(S)$ 上的一个赋值, 简称赋值, 记 $F(S)$ 上的全体赋值之集为 Ω.

注 1.1.1 为了表达方便, 也称 $v(X)$ 为 X 的赋值, 或称它为 X 的真值.

注 1.1.2 为了表达方便, 在 $\{0,1\}$ 中规定

$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0, \quad 0 \to 0 = 0 \to 1 = 1 \to 1 = 1, \quad 1 \to 0 = 0,$$

则 $\{0,1\}$ 也称为 $(\neg, \to)$ 型自由代数, 于是 v 是赋值当且仅当 $v: F(S) \to \{0,1\}$ 是同态.

注 1.1.3 既然 $F(S)$ 是由 S 产生的 $(\neg, \to)$ 型自由代数, 则任何映射 $v_0 : S \to \{0,1\}$ 都可以扩张为 $F(S)$ 上的一个赋值, 即

(i) 对于任一公式 $X \in F(S)$, $v(\neg X) = \neg v(X)$;

(ii) 对于任二公式 $X, Y \in F(S)$, $v(X \to Y) = v(X) \to v(Y)$.

例如, 若 $v(\xi_1) = 1, v(\xi_2) = 0, v(\xi_3) = 0, \cdots$, 则

$$v((\neg\xi_1 \to \xi_2) \to \xi_3) = (\neg v(\xi_1) \to v(\xi_2)) \to v(\xi_3) = (\neg 1 \to 0) \to 0 = 0.$$

那么对于任何包含命题变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的公式 X, $v(X(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)), v \in \Omega$ 是一个 n 元函数 $f_X : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, 称为 X 的 Boole 函数, 或真值函数.

注 1.1.4 由 $X \vee Y = \neg X \to Y, X \wedge Y = \neg(X \to \neg Y)$ 可知

$$v(X \vee Y) = \max\{v(X), v(Y)\}, \quad v(X \wedge Y) = \min\{v(X), v(Y)\}.$$

定义 1.1.3 若对任意 $v \in \Omega$, 有 $v(X(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)) = 1$, 即

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 1, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{0,1\}^n,$$

则称 X 为重言式, 记作 $\vDash X$. 若对任意 $v \in \Omega$, $v(X(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)) = 0$, 则称 X 为矛盾式.

显然 $v(X) = 0$ 当且仅当 $v(\neg X) = 1$, 所以, 若 X 为矛盾式, 则 $\neg X$ 为重言式. 因此若 X 为矛盾式, 则记作 $\vDash \neg X$.

例 1.1.1 下述三类公式都是重言式.

(1) $X \to (Y \to X)$;

(2) $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$;

(3) $(\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)$.

证明 (1) 对于任意赋值 v, 如果 $v(X) = 1$, 显然

$$\begin{aligned} v(X \to (Y \to X)) &= v(X) \to (v(Y) \to v(X)) \\ &= 1 \to (v(Y) \to 1)) = 1 \to 1 = 1. \end{aligned}$$