普通高等教育“十二五”规划教材

微积分

主编　熊传霞　曾京京

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

微　积　分

主　编　熊传霞　曾京京

副主编　王玉霞　肖敏芳　李自玲

周宏艺　傅　媛

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书涵盖了微积分的大部分基础知识和内容，主要包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分与定积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数等。

本书体例清晰，习题丰富，可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业微积分课程的教材，也可供部分学生自学参考之用。另外，书中配置了大量的习题，并附有参考答案，有利于学生进一步地巩固所学知识。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/熊传霞，曾京京 主编. —武汉：华中师范大学出版社，2014.8

(普通高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-5622-6681-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①熊… ②曾… Ⅲ.①微积分 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 127606 号

微 积 分

©熊传霞 曾京京 主编

编 辑 室：第二编辑室　**电　　话**：027－67867362

责任编辑：陈　梅　袁正科　**责任校对**：易　雯　**封面设计**：罗明波

出版发行：华中师范大学出版社

社　　址：湖北省武汉市珞喻路 152 号　**邮　　编**：430079

销售电话：027－67863426/67863280(发行部)　027－67861321(邮购)　027－67863291(传真)

网　　址：http://www.ccnupress.com　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn

印　　刷：武汉市新华印刷有限责任公司　**督　　印**：章光琼

开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印　　张**：19.75　**字　　数**：440 千字

版　　次：2014 年 8 月第 1 版　**印　　次**：2014 年 8 月第 1 次印刷

印　　数：1－2000　**定　　价**：37.50 元

前　言

当前，独立院校迅速发展，但相应的教材建设尤其是本科教材建设明显滞后。在这一新形势下，我们在认真总结独立院校本科数学教学经验的基础上，以教育部《高等数学课程教学基本要求》为原则，编写了这本适合经济管理类专业及其他相关专业本科生使用的《微积分》教材。在编写过程中，我们力求保持本课程学科体系的科学性和教学内容的系统性，同时还遵循了培养“应用型本科生”这一办学宗旨，确定了编写本书的指导思想：重视基本概念，适当降低对解题技巧训练的要求，从简处理一些公式的推导，简化一些定理的证明，加强数学思想的讲解以及应用能力的培养，力争从体系、内容、方法上进行改进和优化，使主题和中心更加明确，更加符合学生的认识规律。

本书的内容有以下特色：

1. 注意从学生了解的实际问题出发，引入数学概念，使学生了解数学概念的实际背景，以激发学生的学习兴趣，增强学生学好数学的自信心。对基本概念、基本理论的叙述，力求准确简明，使学生容易理解和掌握。

2. 力求贯彻“以应用为目的，以够用为度”的基本原则。书中有选择性地编入了丰富的实际问题的例题及习题，以培养学生应用数学知识的意识，而不拘泥于过于繁琐的理论推导。

3. 标有 * 号的内容对大部分学生来说较难理解，教师在教学过程中可根据实际情况选讲或学生自学。

本书的编写人员均为具有多年教学实践经验的一线教师，分别是：武汉理工大学华夏学院的王玉霞，肖敏芳，曾京京，李自玲，熊传霞，傅媛，周宏艺。全书由武汉理工大学的朱金寿教授和彭斯俊教授统稿审定，在此特别感谢两位教授对本书提出的许多宝贵意见。本书的出版还得到了华中师范大学出版社的重点扶持，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，成书时间又很仓促，书中难免存在诸多不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编者

2014 年 5 月

目　录

第 1 章　函数与极限

函数是量与量之间的依赖关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象。当某个变量变化时，人们常讨论与这个变量相关的量的变化趋势，这种研究方法就是所谓的极限方法，极限方法是微积分学的基本分析方法。微积分中其他的一些概念如导数、积分、级数等都是建立在极限的概念之上的。本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

1.1　函　　数

1.1.1　区间和邻域

区间是常用的一类数集。

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，数集 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，数集 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为**半开区间**，a 和 b 称为**区间端点**，以上四种形式的区间长度均为 $b-a$，都是**有限区间**。这类区间均可以用数轴上长度有限的线段来表示。

此外，还有所谓**无限区间**。引入记号“$+\infty$”及“$-\infty$”，分别读作正无穷大和负无穷大，可以类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}\text{（即实数集 }\mathbf{R}\text{）。}$$

前两个无限区间在数轴上表示如图 1-1 所示。

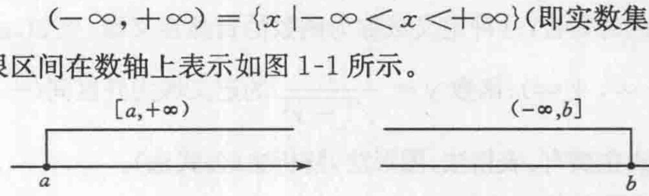

图 1-1

邻域也是一个常用的概念。设 a 与 δ 为实数，且 $\delta>0$，则称区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\} \quad \text{或} \quad U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}。$$

它在数轴上表示为以 a 为中心，长度为 2δ 的对称开区间，如图 1-2 所示，我们称 a 为**邻域的中心**，δ 为**邻域的半径**。

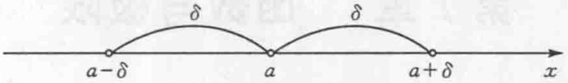

图 1-2

当不需要考虑邻域的半径大小时，也将其简记为 $U(a)$。

有时用到的邻域需要将中心点 a 去掉，得到点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}。$$

当需要时，也将区间 $(a,a+\delta)$ 和 $(a-\delta,a)$ 分别称为点 a 的**右邻域**和点 a 的**左邻域**。

1.1.2 函数的概念

定义 1.1 设 x,y 是两个变量，D 是一个给定数集，如果对每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$。其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，集合 D 称为函数的**定义域**。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$，称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值。当 x 取遍 D 中的一切值时，对应的函数值构成的集合称为函数的**值域**，记作 W，即

$$W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}。$$

从函数的定义 1.1 可以看到，函数有两个要素：定义域和对应法则。如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就不同。

函数中表示对应法则的记号也可以采用其他字母，如 F、g、G 等。

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定。但如果只是抽象地研究用算式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的所有实数值所组成的集合，这种定义域称为函数的**自然定义域**。例如，函数 $y=x$ 的定义域是实数集合 $(-\infty,+\infty)$；函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间 $(-1,1)$。

表示函数的方法主要有：表格法，图形法，解析法(公式法)。

下面介绍几个常用的特殊函数。

例 1 常值函数 $y=c$，c 是一常数，其定义域为实数集，对任意实数 x，y 都取唯一确定的值 c 与之对应，函数的图形为一条水平直线。当 $c>0$ 时，函数 $y=c$ 的图形如图 1-3 所示。

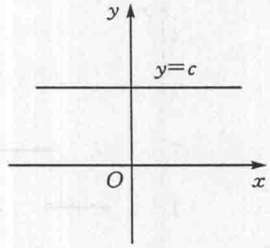

图 1-3

例 2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，其图形如图 1-4 所示。

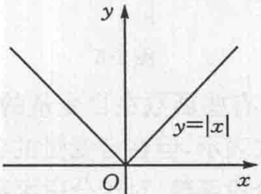

图 1-4

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-5 所示。

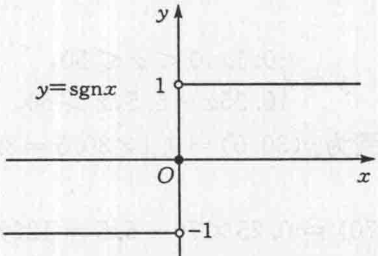

图 1-5

例 4　取整函数 $y=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。例如 $[-3.5]=-4$，$[-1]=-1$，$\left[\frac{1}{2}\right]=0$，$[\pi]=3$，取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathbf{Z}$，取整函数的图形是阶梯曲线，如图 1-6 所示，在 x 的整数值处图形发生跳跃，跃度为 1。

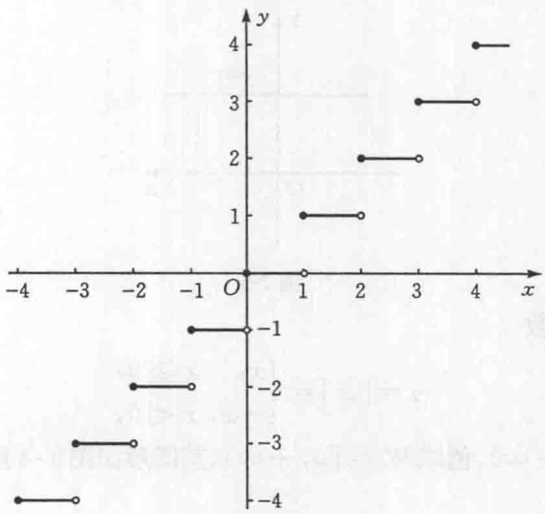

图 1-6

从例 2、例 3、例 4 可以看到，有些函数在自变量的不同变化范围内对应法则是不同的，即一个函数要用若干个表达式表示，但在自变量的各个不同变化范围内，函数值是唯一确定的，通常称这样的函数为**分段函数**。对于分段函数应注意以下几点：

(1) 定义域是各段上自变量取值范围的并集；

(2) 求函数值时首先判断自变量所在的区间，再使用该区间的函数表达式；

(3) 类似于例 2、例 3 中的点 $x=0$ 称为分段函数的**分段点**。

例 5　火车站关于行李收费规定如下：当行李不超过 50kg 时，按 0.1 元 /kg 收费；当超过 50kg 时，超重部分按 0.25 元 /kg 收费。若重 $x$kg 的行李收费为 y 元，则有

$$y=\begin{cases}0.1x, 0<x\leqslant 50,\\ 5+0.25(x-50), x>50,\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}0.1x, 0<x\leqslant 50,\\ 0.25x-5.5, x>50。\end{cases}$$

当行李重 30.5kg 时，运费为 $y(30.5)=0.1\times 30.5=3.05$(元)；若行李重 70kg，则运费为

$$y(70)=0.25\times 70-5.5=12(\text{元})。$$

注意：这种通过建立变量之间的函数关系来描述实际问题的方法，具有普遍的数学意义。

1.1.3　函数的性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

总有

$$f(x_1) < f(x_2)(\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**),单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,则必有 $-x \in D$),如果对于任意 $x \in D$,总有

$$f(-x) = f(x)(\text{或 } f(-x) = -f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**)。

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对任意 $x \in D$,有 $(x \pm l) \in D$,且有

$$f(x \pm l) = f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的一个**周期**,通常我们所说周期函数的周期 T 是指最小正周期。

从图形上看,一个周期为 T 的周期函数,在每个长度为 T 的区间上,函数图形有相同的形状。有很多自然现象和经济活动,如季节、气候、商品销售、宏观经济运行等,其变化都具有周期规律性。

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果存在常数 k,使得对任意 $x \in X$,总有

$$f(x) \leqslant k(\text{或 } f(x) \geqslant k),$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**(或**有下界**),k 称为 $f(x)$ 的一个**上界**(或**下界**)。

例如,函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内既有上界也有下界,显然 1 就是该函数的一个上界,当然大于 1 的任意常数也是该函数的上界;类似地,-1 以及小于 -1 的常数都是该函数的下界。

又例如,函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内有下界但没有上界。事实上,不难看出,1 以及小于 1 的常数均可以作为 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内的下界,而当 x 接近于 0 时,不存在常数 k,使 $k \geqslant \dfrac{1}{x}$ 成立,即函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内没有上界。

如果存在常数 $M > 0$,使得对任意 $x \in X$,总有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**。如果不存在这样的常数 M,就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**,亦即,如果对于任何正数 M,总存在 $x_0 \in X$,使得 $|f(x_0)| > M$,那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

例如,函数 $y = \sin x, y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ 在定义域上有界,因为对任意 $x \in \mathbf{R}$,总有 $|\sin x| \leqslant 1$,