



普通高等教育“十二五”规划教材

微积分

主编 熊传霞 曾京京



教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

微 积 分

主 编 熊传霞 曾京京
副主编 王玉霞 肖敏芳 李自玲
周宏艺 傅 媛

出版社 华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书涵盖了微积分的大部分基础知识和内容,主要包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分与定积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数等。

本书体例清晰,习题丰富,可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业微积分课程的教材,也可供部分学生自学参考之用。另外,书中配置了大量的习题,并附有参考答案,有利于学生进一步地巩固所学知识。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/熊传霞,曾京京 主编. —武汉:华中师范大学出版社,2014. 8
(普通高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-5622-6681-5

I. ①微… II. ①熊… ②曾… III. ①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 127606 号

微 积 分

©熊传霞 曾京京 主编

编辑室:第二编辑室

责任编辑:陈 梅 袁正科

出版发行:华中师范大学出版社

社 址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

销售电话:027-67863426/67863280(发行部)

网 址:<http://www.ccupress.com>

印 刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

版 次:2014 年 8 月第 1 版

印 数:1—2000

电 话:027-67867362

责任校对:易 雯

邮 编:430079

027-67861321(邮购) 027-67863291(传真)

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

督 印:章光琼

印 张:19.75

印 次:2014 年 8 月第 1 次印刷

定 价:37.50 元

封面设计:罗明波

字 数:440 千字

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话 027-67861321

前 言

当前,独立院校迅速发展,但相应的教材建设尤其是本科教材建设明显滞后。在这一新形势下,我们在认真总结独立院校本科数学教学经验的基础上,以教育部《高等数学课程教学基本要求》为原则,编写了这本适合经济管理类专业及其他相关专业本科生使用的《微积分》教材。在编写过程中,我们力求保持本课程学科体系的科学性和教学内容的系统性,同时还遵循了培养“应用型本科生”这一办学宗旨,确定了编写本书的指导思想:重视基本概念,适当降低对解题技巧训练的要求,从简处理一些公式的推导,简化一些定理的证明,加强数学思想的讲解以及应用能力的培养,力争从体系、内容、方法上进行改进和优化,使主题和中心更加明确,更加符合学生的认识规律。

本书的内容有以下特色:

1. 注意从学生了解的实际问题出发,引入数学概念,使学生了解数学概念的实际背景,以激发学生的学习兴趣,增强学生学好数学的自信心。对基本概念、基本理论的叙述,力求准确简明,使学生容易理解和掌握。

2. 力求贯彻“以应用为目的,以够用为度”的基本原则。书中有选择性地编入了丰富的实际问题的例题及习题,以培养学生应用数学知识的意识,而不拘泥于过于繁琐的理论推导。

3. 标有*号的内容对大部分学生来说较难理解,教师在教学过程中可根据实际情况选讲或学生自学。

本书的编写人员均为具有多年教学实践经验的一线教师,分别是:武汉理工大学华夏学院的王玉霞,肖敏芳,曾京京,李自玲,熊传霞,傅媛,周宏艺。全书由武汉理工大学的朱金寿教授和彭斯俊教授统稿审定,在此特别感谢两位教授对本书提出的许多宝贵意见。本书的出版还得到了华中师范大学出版社的重点扶持,在此表示衷心的感谢。

由于水平有限,成书时间又很仓促,书中难免存在诸多不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

编者

2014年5月

目 录

第1章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 区间和邻域	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的性质	4
习题 1.1	6
1.2 初等函数	6
* 1.2.1 反函数	6
1.2.2 基本初等函数	7
1.2.3 复合函数	10
1.2.4 初等函数	11
习题 1.2	11
1.3 常用经济函数	11
1.3.1 需求函数	11
1.3.2 成本函数	12
1.3.3 收益(入)函数	12
1.3.4 利润函数	12
习题 1.3	13
1.4 数列极限	13
1.4.1 数列	14
1.4.2 数列极限的定义	14
1.4.3 收敛数列的性质	16
习题 1.4	17
1.5 函数的极限	18
1.5.1 函数极限的概念	18
1.5.2 函数极限的性质	22
习题 1.5	23
1.6 无穷小与无穷大	23
1.6.1 无穷小	23
1.6.2 无穷大	25

1.6.3 无穷大与无穷小的关系	25
1.6.4 无穷小的阶	26
1.6.5 等价无穷小的性质	27
习题 1.6	27
1.7 极限的运算法则	28
习题 1.7	32
1.8 极限存在准则与两个重要极限	33
1.8.1 夹逼准则	33
1.8.2 单调有界准则	36
习题 1.8	38
1.9 函数的连续性	39
1.9.1 函数连续的定义	40
1.9.2 间断点及其分类	41
1.9.3 连续函数的运算性质	43
1.9.4 初等函数的连续性	45
1.9.5 闭区间上连续函数的性质	46
习题 1.9	48
总习题 1	48
第 2 章 导数与微分	51
2.1 导数概念	51
2.1.1 引例	51
2.1.2 导数的定义	52
2.1.3 导数的几何意义	56
2.1.4 函数的可导性与连续性的关系	57
习题 2.1	57
2.2 求导法则与基本初等函数的求导公式	58
2.2.1 导数的四则运算法则	58
*2.2.2 反函数的求导法则	60
2.2.3 复合函数的求导法则	61
2.2.4 基本求导法则与导数公式	62
习题 2.2	63
2.3 高阶导数	64
习题 2.3	66

2.4 隐函数的导数	66
习题 2.4	68
2.5 函数的微分	68
2.5.1 微分的定义	68
2.5.2 微分的几何意义	70
2.5.3 基本初等函数的微分公式与微分运算法则	71
2.5.4 微分在近似计算中的应用	72
习题 2.5	73
2.6 导数与微分在经济学中的应用	73
2.6.1 边际与边际分析	73
2.6.2 弹性与弹性分析	74
习题 2.6	76
总习题 2	76
第 3 章 中值定理与导数的应用	78
3.1 微分中值定理	78
3.1.1 罗尔定理	78
3.1.2 拉格朗日中值定理	79
3.1.3 柯西中值定理	82
习题 3.1	82
3.2 洛必达法则	83
3.2.1 未定式“ $\frac{0}{0}$ ”的情形	83
3.2.2 未定式“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”的情形	84
3.2.3 $0 \cdot \infty$ 、 $\infty - \infty$ 、 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0 型的未定式	85
习题 3.2	86
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性	86
3.3.1 函数的单调性	86
3.3.2 曲线的凹凸性与拐点	89
习题 3.3	91
3.4 函数的极值与最大值、最小值	91
3.4.1 函数极值的判定法	91
3.4.2 函数的最大值、最小值	95
习题 3.4	97

3.5 函数作图	98
3.5.1 曲线的渐近线	98
3.5.2 函数作图	99
习题 3.5	100
总习题 3	100
第 4 章 不定积分	102
4.1 原函数与不定积分	102
4.1.1 原函数与不定积分的概念	102
4.1.2 不定积分的性质	103
4.1.3 不定积分的基本公式	104
习题 4.1	107
4.2 换元积分法	107
4.2.1 第一类换元积分法(凑微分法)	107
4.2.2 第二类换元积分法	111
习题 4.2	115
4.3 分部积分法	115
习题 4.3	118
总习题 4	118
第 5 章 定积分	120
5.1 定积分的概念	120
5.1.1 定积分问题实例	120
5.1.2 定积分的定义	122
5.1.3 定积分的几何意义	123
习题 5.1	125
5.2 定积分的性质	125
习题 5.2	127
5.3 定积分的基本定理	127
5.3.1 积分上限的函数及其导数	128
5.3.2 牛顿—莱布尼茨公式	129
习题 5.3	131
5.4 定积分的计算	131
5.4.1 定积分的换元法	131
5.4.2 定积分的分部积分法	134
习题 5.4	135

5.5 定积分的应用	136
5.5.1 定积分的元素法	136
5.5.2 平面图形的面积	137
5.5.3 体积	140
5.5.4 平面曲线的弧长	143
5.5.5 经济应用问题举例	144
习题 5.5	145
5.6 反常积分	145
5.6.1 无穷区间的反常积分	145
5.6.2 无界函数的反常积分	147
* 5.6.3 Γ 函数	149
习题 5.6	150
总习题 5	150
第 6 章 空间解析几何与向量代数	152
6.1 向量及其运算	152
6.1.1 空间直角坐标系	152
* 6.1.2 空间两点间的距离	153
* 6.1.3 向量及其线性运算	154
6.1.4 向量的坐标及线性运算的坐标表达式	156
* 6.1.5 向量的模与方向余弦	158
* 6.1.6 向量的乘积	159
习题 6.1	161
6.2 平面与直线方程	161
6.2.1 平面的方程	161
* 6.2.2 两平面的夹角	163
6.2.3 空间直线的方程	164
* 6.2.4 两直线的夹角	165
* 6.2.5 直线与平面的夹角	166
习题 6.2	166
6.3 曲面和空间曲线的方程	167
6.3.1 曲面与曲面的方程	167
6.3.2 空间曲线的方程	173
6.3.3 空间曲线在坐标面上的投影	176
习题 6.3	177
总习题 6	177

第 7 章 多元函数微分法及其应用	178
7.1 多元函数的概念、极限与连续性	178
7.1.1 平面点集	178
7.1.2 多元函数的概念	178
7.1.3 多元函数的极限	180
7.1.4 多元函数的连续性	181
习题 7.1	183
7.2 偏导数	183
7.2.1 偏导数的定义	184
7.2.2 偏导数的计算	185
7.2.3 偏导数的几何意义	185
7.2.4 偏导数与函数连续的关系	186
7.2.5 高阶偏导数	186
习题 7.2	187
7.3 全微分	188
7.3.1 全微分的概念	188
7.3.2 可微的条件	188
7.3.3 全微分在近似计算中的应用	191
习题 7.3	191
7.4 多元复合函数的求导法则	191
7.4.1 复合函数的中间变量均为一元函数的情形	191
7.4.2 复合函数的中间变量均为多元函数的情形	193
7.4.3 复合函数的中间变量既有一元函数又有多元函数的情形	194
习题 7.4	195
7.5 隐函数的求导公式	196
7.5.1 一个方程的情形	196
* 7.5.2 方程组的情形	198
习题 7.5	198
7.6 多元函数的极值及其求法	199
7.6.1 多元函数的极值	199
7.6.2 二元函数的最值	201
7.6.3 条件极值与拉格朗日乘数法	202
习题 7.6	205
总习题 7	205

第 8 章 二重积分	207
8.1 二重积分的概念与性质	207
8.1.1 二重积分的概念	207
8.1.2 二重积分的性质	210
习题 8.1	211
8.2 二重积分的计算方法	212
8.2.1 利用直角坐标计算二重积分	212
8.2.2 利用极坐标计算二重积分	219
习题 8.2	223
总习题 8	224
第 9 章 微分方程与差分方程	225
9.1 微分方程的基本概念	225
习题 9.1	228
9.2 一阶微分方程	228
9.2.1 可分离变量的微分方程	229
9.2.2 齐次方程	231
9.2.3 一阶线性方程	233
习题 9.2	236
* 9.3 一阶微分方程在经济学中的应用	237
习题 9.3	239
9.4 高阶微分方程	239
9.4.1 可降阶的微分方程	240
9.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程	242
9.4.3 二阶常系数非齐次线性微分方程	245
习题 9.4	249
* 9.5 差分方程简介	250
9.5.1 差分的概念	250
9.5.2 差分方程的概念	251
9.5.3 常系数线性差分方程	252
习题 9.5	256
总习题 9	256
第 10 章 无穷级数	259
10.1 常数项级数的概念和性质	259
10.1.1 常数项级数的概念	259

10.1.2 级数的基本性质	261
习题 10.1	263
10.2 常数项级数的审敛法	264
10.2.1 正项级数及其审敛法	264
10.2.2 交错级数及其审敛法	268
10.2.3 绝对收敛与条件收敛	269
习题 10.2	271
10.3 幂级数	272
10.3.1 函数项级数的概念	272
10.3.2 幂级数及其敛散性	272
10.3.3 幂级数的运算性质	276
习题 10.3	277
10.4 泰勒公式与泰勒级数	277
10.4.1 泰勒公式	277
10.4.2 泰勒级数	280
10.4.3 函数展开成幂级数	281
*10.4.4 近似计算	285
习题 10.4	286
总习题 10	287
习题参考答案	289

第 1 章 函数与极限

函数是量与量之间的依赖关系在数学中的反映,也是高等数学的主要研究对象。当某个变量变化时,人们常讨论与这个变量相关的量的变化趋势,这种研究方法就是所谓的极限方法,极限方法是微积分学的基本分析方法。微积分中其他的一些概念如导数、积分、级数等都是建立在极限的概念之上的。本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

1.1 函 数

1.1.1 区间和邻域

区间是常用的一类数集。

设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$, 数集 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 数集 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 数集 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 和 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 称为半开区间, a 和 b 称为区间端点, 以上四种形式的区间长度均为 $b - a$, 都是有限区间。这类区间均可以用数轴上长度有限的线段来表示。

此外, 还有所谓无限区间。引入记号“ $+\infty$ ”及“ $-\infty$ ”, 分别读作正无穷大和负无穷大, 可以类似地表示无限区间, 例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} \text{ (即实数集 } \mathbf{R} \text{)}.$$

前两个无限区间在数轴上表示如图 1-1 所示。

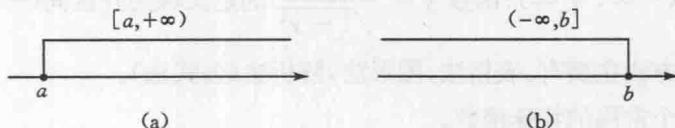


图 1-1

邻域也是一个常用的概念。设 a 与 δ 为实数, 且 $\delta > 0$, 则称区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} \quad \text{或} \quad U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

它在数轴上表示为以 a 为中心, 长度为 2δ 的对称开区间, 如图 1-2 所示, 我们称 a 为邻域的中心, δ 为邻域的半径。

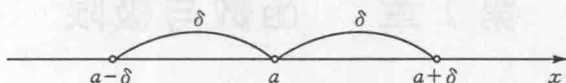


图 1-2

当不需要考虑邻域的半径大小时, 也将其简记为 $U(a)$ 。

有时用到的邻域需要将中心点 a 去掉, 得到点 a 的去心 δ 邻域, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

当需要时, 也将区间 $(a, a + \delta)$ 和 $(a - \delta, a)$ 分别称为点 a 的右邻域和点 a 的左邻域。

1.1.2 函数的概念

定义 1.1 设 x, y 是两个变量, D 是一个给定数集, 如果对每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则 f 总有唯一确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y = f(x)$ 。其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 集合 D 称为函数的定义域。

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$, 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值。当 x 取遍 D 中的一切值时, 对应的函数值构成的集合称为函数的值域, 记作 W , 即

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

从函数的定义 1.1 可以看到, 函数有两个要素: 定义域和对应法则。如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就不同。

函数中表示对应法则的记号也可以采用其他字母, 如 F, g, G 等。

关于函数的定义域, 在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定。但如果只是抽象地研究用算式表达的函数, 这时我们约定: 函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的所有实数值所组成的集合, 这种定义域称为函数的自然定义域。例如, 函数 $y = x$ 的定义域是实数集 $(-\infty, +\infty)$; 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间 $(-1, 1)$ 。

表示函数的方法主要有: 表格法, 图形法, 解析法(公式法)。

下面介绍几个常用的特殊函数。

例 1 常值函数 $y = c$, c 是一常数, 其定义域为实数集, 对任意实数 x, y 都取唯一确定的值 c 与之对应, 函数的图形为一条水平直线。当 $c > 0$ 时, 函数 $y = c$ 的图形如图 1-3 所示。

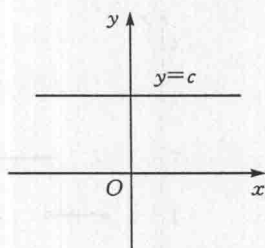


图 1-3

例 2 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 其图形如图 1-4 所示。

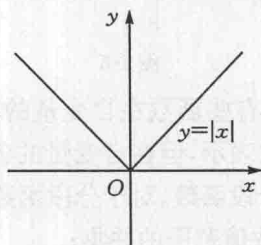


图 1-4

例 3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-5 所示。

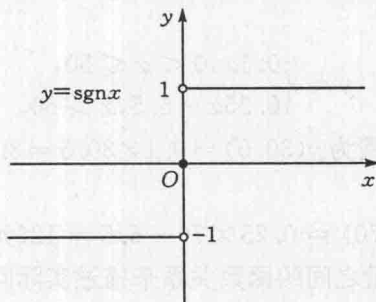


图 1-5

例 4 取整函数 $y = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。例如 $[-3.5] = -4$, $[-1] = -1$, $[\frac{1}{2}] = 0$, $[\pi] = 3$, 取整函数的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \mathbf{Z}$, 取整函数的图形是阶梯曲线, 如图 1-6 所示, 在 x 的整数值处图形发生跳跃, 跃度为 1。

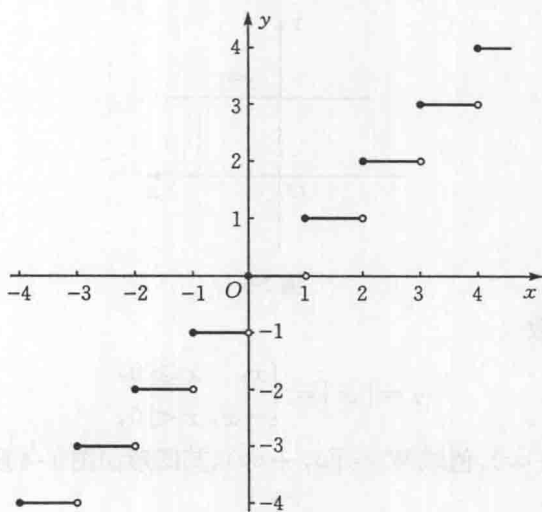


图 1-6

从例 2、例 3、例 4 可以看到,有些函数在自变量的不同变化范围内对应法则是不同的,即一个函数要用若干个表达式表示,但在自变量的各个不同变化范围内,函数值是唯一确定的,通常称这样的函数为分段函数。对于分段函数应注意以下几点:

- (1) 定义域是各段上自变量取值范围的并集;
- (2) 求函数值时首先判断自变量所在的区间,再使用该区间的函数表达式;
- (3) 类似于例 2、例 3 中的点 $x = 0$ 称为分段函数的分段点。

例 5 火车站关于行李收费规定如下:当行李不超过 50kg 时,按 0.1 元/kg 收费;当超过 50kg 时,超重部分按 0.25 元/kg 收费。若重 x kg 的行李收费为 y 元,则有

$$y = \begin{cases} 0.1x, & 0 < x \leq 50, \\ 5 + 0.25(x - 50), & x > 50, \end{cases}$$

即

$$y = \begin{cases} 0.1x, & 0 < x \leq 50, \\ 0.25x - 5.5, & x > 50. \end{cases}$$

当行李重 30.5kg 时,运费为 $y(30.5) = 0.1 \times 30.5 = 3.05$ (元);若行李重 70kg,则运费为

$$y(70) = 0.25 \times 70 - 5.5 = 12 \text{ (元)}.$$

注意:这种通过建立变量之间的函数关系来描述实际问题的方法,具有普遍的数学意义。

1.1.3 函数的性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 与 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,

总有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)},$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少), 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则必有一 $x \in D$), 如果对于任意 $x \in D$, 总有

$$f(-x) = f(x) \text{ (或 } f(-x) = -f(x) \text{)},$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数)。

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得对任意 $x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且有

$$f(x \pm l) = f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的一个周期, 通常我们所说周期函数的周期 T 是指最小正周期。

从图形上看, 一个周期为 T 的周期函数, 在每个长度为 T 的区间上, 函数图形有相同的形状。有很多自然现象和经济活动, 如季节、气候、商品销售、宏观经济运行等, 其变化都具有周期规律性。

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 如果存在常数 k , 使得对任意 $x \in X$, 总有

$$f(x) \leq k \text{ (或 } f(x) \geq k \text{)},$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界(或有下界), k 称为 $f(x)$ 的一个上界(或下界)。

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内既有上界也有下界, 显然 1 就是该函数的一个上界, 当然大于 1 的任意常数也是该函数的上界; 类似地, -1 以及小于 -1 的常数都是该函数的下界。

又例如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内有下界但没有上界。事实上, 不难看出, 1 以及小于 1 的常数均可以作为 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内的下界, 而当 x 接近于 0 时, 不存在常数 k , 使 $k \geq \frac{1}{x}$ 成立, 即函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内没有上界。

如果存在常数 $M > 0$, 使得对任意 $x \in X$, 总有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界。如果不存在这样的常数 M , 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界, 亦即, 如果对于任何正数 M , 总存在 $x_0 \in X$, 使得 $|f(x_0)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

例如, 函数 $y = \sin x, y = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域上有界, 因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, 总有 $|\sin x| \leq 1$,