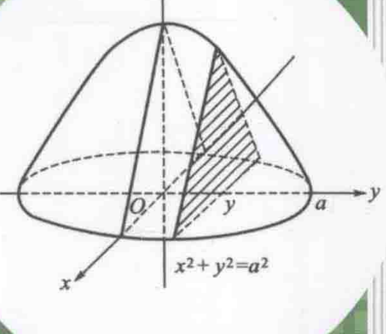
高职高专“十二五”规划教材

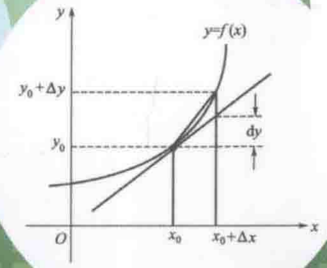
国家示范性 高职院校建设规划教材

微积分学基础学习指导

第二版

贺利敏 主编





化学工业出版社

高职高专“十二五”规划教材

国家示范性高职院校建设规划教材

微积分学基础学习指导

第二版

贺利敏 主编

化学工业出版社

·北京·

本书是根据《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并结合国家示范性骨干高职院校教材建设要求编写的．全书共八个专题，包括函数、函数的极限、函数的连续、函数的导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、常微分方程等内容.

每一专题均由学习目标、重点难点解析、典型例题、应用与提高、部分习题解答、复习资料、自我测验题七部分组成.

本书可作为高等数学教学辅助教材供教师与学生使用，也可供函授与自学考试学生及工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分学基础学习指导/贺利敏主编．—2版．北京：化学工业出版社，2013.7

高职高专“十二五”规划教材 国家示范性高职院校建设规划教材

ISBN 978-7-122-17788-9

Ⅰ.①微… Ⅱ.①贺… Ⅲ.①微积分-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第137798号

责任编辑：韩庆利　　装帧设计：关　飞

责任校对：蒋　宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张12½　字数265千字　2013年9月北京第2版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：27.00元

第二版前言

《微积分学基础学习指导》是为配合学生学习高等数学微积分学知识，根据《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的．本书第二版结合教材改版的需要，在各部分选材上做了一些必要的修订．总体来说，在编写结构上，主要基于明确目标，解答疑惑，巩固知识，推广应用，以帮助学生克服学习中的困难，加深巩固对基本知识的理解与掌握，扩大数学知识的应用范围，提高数学知识的应用能力.

本书共设置八个专题，包括函数、函数极限、函数的连续、函数的导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、常微分方程．每一专题均由学习目标、重点难点解析、典型例题、应用与提高、教材部分习题解答、复习资料、自我测验题七部分组成．**学习目标**提出本专题学习之后应达到的程度，知识的要求由低到高分为了解、理解、掌握三个层次，分别是（1）了解：对知识的含义有初步的认识，知道知识的内容是什么，并能在有关的问题中进行简单的应用．（2）理解：对知识内容有较深刻的理性认识，知晓其规律和与相关知识的基本联系，并能利用知识解决有关问题．（3）掌握（会）：系统地掌握知识的内在联系，能运用知识解决综合性的问题. **重点难点解析**针对每部分的重点与难点进行阐述，以帮助学生领会重点、消除疑点. **典型例题**选择具有典型性、代表性和综合性的例题，作较详细的解答，加深对概念的理解并提高解题能力. **应用与提高**拓宽学生知识的实际应用领域. **部分习题解答**针对教材习题较易出错的题目给出参考答案. **复习资料**给学生提供课余学习资料，弥补课后作业习题量的不足，巩固所学知识. **自我测验题**用来检查学习效果，并达到提高的目的. 书中标★内容为选学内容.

本书由贺利敏担任主编，第一专题至第五专题以及第七专题由贺利敏编写，第六专题由刘琨编写，第八专题由霍桂利编写，陈从科提供了一部分习题答案，宋晓婷为每一专题配备了自我测验题.

本书是国家示范性高职院校建设规划系列教材的配套教材之一，王庆云教授、杨俊萍教授、富伯亭教授在百忙中审阅了全部书稿并提出了许多建设性建议，在此深表谢意．真诚欢迎各位教师与学生在本书的使用过程中提出宝贵意见，以使本书更加适用，真正起到辅助教学的作用.

编　者

目　录

专题一 函 数

学习目标

1. 理解事物表述中数量与形态的统一，知道一维、二维、三维空间参照系.
2. 理解区间、区域与邻域.
3. 理解函数概念（拓展后的函数概念），掌握函数结构.
4. 熟悉一元函数基本性质（奇偶性、单调性、有界性、周期性）.
5. 了解二元函数图形（平面或曲面），认识平面方程与常见曲面方程.

重点难点解析

一、参照系

（1）一维空间常用参照系为数轴，有实数 x 与数轴上的点 P 一一对应，数 x 称为点的坐标，点 P 即记为 $P(x)$.

（2）二维空间，常用参照系有平面直角坐标系与极坐标系.

① 平面直角坐标系中，作平面点 P 到 x 轴、y 轴的投影点，其数值 x，y 构成的二元有序数组 (x,y) 称为点 P 的直角坐标，二元有序数组 (x,y) 与平面点 P 一一对应，记为点 $P(x,y)$.

② 极坐标系中，给出平面点 P，记 $OP=\rho$，称为极径，实数范围内取值；记有向线段 OP 与极轴正向所成的角为 θ，称为极角，弧度制下实数范围内取值；二元有序数组 (ρ,θ) 称为点的极坐标，记为点 $P(\rho,\theta)$. 要注意在极坐标系下，二元有序数组 (ρ,θ) 与平面上的点 P 非一一对应，其中，已知极坐标 (ρ,θ)，可唯一确定点的位置，方法为先根据给出的极角 θ 确定终边位置，$\rho>0$ 时，以极点为圆心，以 ρ 为半径画圆，圆弧与极角 θ 终边的交点即为所求点；$\rho<0$ 时，在极角 θ 终边的反向延长线上，以 $|\rho|$ 为半径画圆弧找交点为所求点；而当 $\rho=0$ 时，不论 θ 多大，所求点都为极点. 当给出点时，与其对应的极坐标不唯一，有无数多个. 实际问题中，如果限定极径 $\rho\geqslant 0$，极角 $0\leqslant\theta<2\pi$，则除极点外，平面上的点与其极坐标一一对应，此时极坐标系可视为由距离和方向确定点位置的坐标系.

（3）三维空间，常用参照系有空间右手直角坐标系、空间柱面坐标系与空间球面坐标系.

① 空间直角坐标系下，作空间点 P 到三坐标轴的投影点，其数值 x，y，z 构

成的三元有序数组(x,y,z)称为点 P 的直角坐标，使用中通常要求 x 轴，y 轴，z 轴恰好对应右手的拇指、食指、中指，称为空间右手直角坐标系. 三元有序数组(x,y,z)与空间点 P 一一对应，记为点 $P(x,y,z)$.

② 设 $P(x,y,z)$为空间一点，并设点 P 在 xOy 面上的投影坐标为ρ，θ，三元有序数组(ρ,θ,z)称为空间点 P 的柱面坐标，记为 $P(\rho,\theta,z)$，限定 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，则除坐标原点外，空间点与其柱面坐标一一对应.

③ 设 $P(x,y,z)$为空间一点，记 $OP=\rho$，有向线段 OP 在与 xOy 面上投影与 x 轴正向的夹角为 θ，有向线段 OP 与 z 轴正向的夹角为 ϕ，(ρ,θ,ϕ)称为点 P 的球面坐标，记为 $P(\rho,\theta,\phi)$. 限定 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$0\leqslant\phi\leqslant\pi$，则除坐标原点外，空间点与其球面坐标一一对应.

二、函数概念

（1）函数概念反映客观现实中量与量之间的对应关系，往往是一个或一组相互独立的变量变化决定了另一变量的取值，即动点变化决定了一个变量的取值．函数构成因素有自变量、因变量、对应规律、定义域与值域，其核心为定义域与对应规律，它们被称为确定函数的两个要素．如 $y=\sqrt{(x+1)^2}$与 $y=x+1$ 不是同一函数，尽管它们定义域完全相同，但当 $x<-1$ 时，它们的对应规律不同．$y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 也不是同一函数，因为它们的定义域不同，前者为 $x\neq 0$，而后者为 $x>0$. 多元函数也是一样，如 $z=\dfrac{y^2-x^2}{y-x}$与 $z=y+x$ 不是相同的函数，它们的定义域不同，后者是全平面，前者在全平面中要去掉直线 $y=x$.

（2）与中学函数概念相比，本部分函数概念及表现形式均有所拓展，主要有以下三点：

① 一元函数与多元函数：自变量只有一个的函数称为一元函数，自变量有两个的函数称为二元函数，自变量有三个的函数称为三元函数，二元及其以上函数统称为多元函数．任意元的函数都可看作“点”的函数.

② 单值函数与多值函数：一个定点的函数值不要求唯一，如果唯一时称为单值函数，不唯一但能被确定时称为多值函数.

③ 函数解析式：

显函数形式：形如 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，用自变量直接表示因变量来反映函数关系.

隐函数形式：由方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 确定了 y 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$之间的函数关系.

分段函数形式：在自变量不同的取值范围内用不同式子表示的函数．它是一个函数，而不是几个函数.

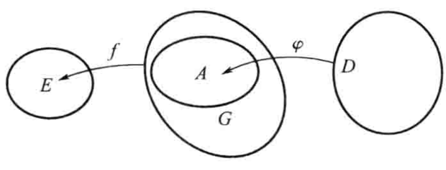
参数方程形式：由式子$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$确定了 y 是 x 的函数，称为由参数方程表示的函数.

（3）复合函数

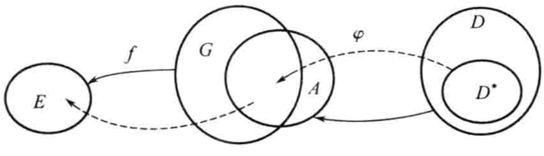
① 复合函数的通俗说法是“函数里面套函数”，被套函数称为内函数，其余为各层外函数．中间变量既是函数又是自变量，复合函数的中间变量可以有一个或多个．复合函数只是函数的一种结构形式，不是一类新函数．

② 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数，两个函数能够构成复合函数的条件是内函数的值域与外函数的定义域交集为非空集合，即当自变量的取值所对应的中间变量的值，属于外函数的定义域时才能复合．例如 $y=\arcsin u, u=\sqrt{2}+x^2$ 不能构成一元复合函数 $y=\arcsin(\sqrt{2}+x^2)$，而 $z=\sqrt{u}, u=-(x^2+y^2+1)$ 不能构成 $z=\sqrt{-(x^2+y^2+1)}$ 二元复合函数．

③ 设外函数 $y=f(u)(u\in G, y\in E)$，内函数 $u=\varphi(x)(x\in D, u\in A)$，如果 $A\subseteq G$ 时，任取 $x\in D$ 都有确定的 y 值对应，此时复合函数的定义域为 D，这种复合是直接复合[见图 1-1(a)]；如果 $A\not\subset G$，但有 $D^*\subset D$，使得任取 $x\in D^*$ 都有确定的 y 值对应，此时复合函数的定义域仅为 D^*，这种复合是间接复合[见图 1-1(b)]．



(a) 直接复合示意图



(b) 间接复合示意图

图 1-1　复合示意图

④ 必须正确掌握复合函数的复合和分解过程，“分解”过程是由外向里逐步设出中间变量，而“复合”过程是由里往外逐步代入．下面例子表明了复合函数的分解与复合过程．

函数的分解过程

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$y=\sqrt{z}\quad z=1+\lg u\quad u=3+\cos v\quad v=5^t\quad t=\sqrt{x}$$

$$\xleftarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

函数的复合过程

三、初等函数

高等数学中所研究的函数，除分段函数外，大都是初等函数．由于初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算与有限次的函数复合所产生．所以掌握初等函数的各种运算，要解决的问题依次应为：基本初等函数如何运算，由基本初等函

数经过四则运算构成的简单结构函数如何运算，由基本初等函数经过复合运算构成的复合结构函数如何运算.

四、函数图形

著名数学家华罗庚说过“数缺形时欠直观，形离数时难入微”，借助坐标系，点可以用坐标表示，而平面直线与曲线，空间平面、曲面、直线与曲线，均可看成是适合某种条件的点的轨迹．将点所满足的条件用坐标关系式表示，则得到关于坐标的函数关系式 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$，也称为关于坐标的方程．如果：

（1）图形 C 上每一点的坐标都满足方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$.

（2）以方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 的每一组解为坐标的点都在图形 C 上.

则称 C 为方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 的图形，而 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 称为图形 C 的方程.

（一）二元方程与平面图形

一元函数解析式为 $y=f(x)$ 或 $F(x,y)=0$，即是一个二元方程．平面直角坐标系下其图形是一条直线或曲线或是一些离散点或一条线段．如

$y=2x-1,x\in\{-2,-1,0,1\}$，其图形为四个离散点 $(-2,-5)$，$(-1,-3)$，$(0,-1)$，$(1,1)$.

$y=2x-1,x\in[-2,2]$，其图形为一条线段，包括端点.

$y=2x-1,x\in R$，其图形为整条直线.

直线方程常用形式有：

点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$；斜截式：$y=kx+b$；

两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$；截矩式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$；

二元一次方程其图形是一条直线，其余的二元方程其图形均为曲线，常见二次曲线有：

圆的标准方程：　$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$；$x^2+y^2=r^2$；

圆的一般方程：　$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$.

椭圆标准方程：　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$

双曲线标准方程：　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

抛物线标准方程：　$y^2=2px$，$y^2=-2px$，$x^2=2py$，$x^2=-2py(p>0)$

（二）三元方程与空间图形

二元函数解析式为 $z=f(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$，即是一个三元方程．以 (x,y,z) 为点的坐标，作出图形，是空间坐标系下的平面或曲面，也可能是一些离散点.

本节学习中，重点掌握空间平面与曲面的方程特点，并注意与一元函数图形形式进行联系或甄别.

1. 平面

任何一个二元一次函数 $Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C 不全为零）即三元一次

方程，其图形是空间一张平面.

根据 A，B，C，D 取值的不同，可分别确定平面的特殊位置.

当 $D=0$ 时，方程 $Ax+By+Cz=0$ 表示过坐标原点（0，0，0）的一张平面.

当 $A=0$ 时，方程 $By+Cz+D=0$ 表示过 yOz 平面上满足 $By+Cz+D=0$ 的直线且平行于 x 轴的一张平面，若 $D=0$，该平面过 x 轴．总之，三元一次方程中缺一个变量时，该平面平行于这个变量对应的坐标轴.

当 $A=0,B=0$ 时，方程为 $Cz+D=0$，表示过 z 轴上 $\left(0,0,-\dfrac{D}{C}\right)$ 点且平行于 xOy 坐标面的一张平面，若 $D=0$，该平面即为 xOy 坐标面．总之，三元一次方程中缺两个变量时，该平面平行于由这两个变量所决定的坐标面.

特别地，三个坐标面方程为：$z=0$（xOy 坐标面）；$x=0$（yOz 坐标面）；$y=0$（zOx 坐标面）.

2. 柱面

柱面方程的特点为三元方程中缺一个变量，缺哪个变量，柱面的母线平行于那个轴．根据准线形状，相应柱面可能会是一张平面，也可能会是一张曲面（如圆柱面，椭圆柱面，双曲柱面，抛物柱面）.

3. 旋转曲面

旋转曲面方程可利用它的母线方程并结合以下特点确定：绕哪个坐标轴旋转，母线方程中该坐标轴对应变量不变，另一个变量替换为其它两个变量平方和的方根．据此可知旋转曲面方程为有两项系数完全相同的三元非一次方程．因此若给出曲面方程中有两项系数相同，可判断其为旋转曲面，它的母线方程为曲面方程中系数相同的两项中保留一项后的方程，而旋转轴为系数不同项所对应坐标轴．如 $x^2+y^2=1-4z$ 为旋转抛物面，可视为由 yOz 坐标面内抛物线 $y^2=1-4z$ 绕 z 轴形成的旋转曲面，也可视为由 zOx 坐标面内抛物线 $x^2=1-4z$ 绕 z 轴形成的旋转曲面.

4. 二次曲面

实际中常用曲面其方程为关于 x,y,z 的三元二次方程，统称为二次曲面．各类曲面及其方程见教材表 1-1.

三元及其以上函数没有直观图形，只能用数学语言描述.

典型例题

【例 1】 求下列函数的定义域，并画出定义域的图形.

（1）$y=\sqrt{2+x}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$；　　（2）$z=\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{y-x^2}}$.

解题提示　由解析式表示的函数的定义域是使该解析表达式有意义的一切实数所构成的集合，求定义域时应注意以下几点：

① 若函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零.

② 若函数的表达式中含有偶次根式，则被开方式非负.

③ 若函数的表达式中含有对数，则真数必须大于零.

④ 若函数的表达式中含有 $\arcsin\phi(x)$ 或 $\arccos\phi(x)$，则必须满足 $|\phi(x)|\leqslant 1$；

⑤ 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围之并.

⑥ 若函数由几部分经四则运算构成，其定义域是各部分定义域的交集.

在画出定义域所表示的图形时，一元函数定义域为数轴上的点集，要注意区间端点应画成实点还是空圈；二元函数定义域为平面上的点集，画图时，要先将不等式写成等式，做出相应边界曲线，然后按照不等式确定定义域内点位于边界的哪一侧，如果是严格不等式，相应边界曲线应画成虚线，各不等式限定区域的公共部分就是定义域对应图形.

解 （1）要使式子有意义，须满足 $\begin{cases}2+x\geqslant 0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x\geqslant -2\\ -3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，即 $-2\leqslant x\leqslant 4$，故函数定义域为 $[-2,4]$，见图 1-2.

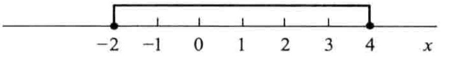


图 1-2　例 1（1）图

（2）要使式子有意义，须满足 $\begin{cases}1-x^2-y^2>0\\ y-x^2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x^2+y^2<1\\ y>x^2\end{cases}$ 于是所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,y>x^2\}$，见图 1-3.

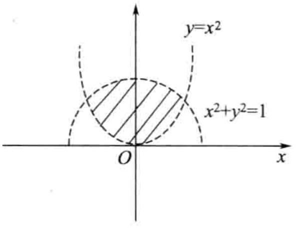


图 1-3　例 1（2）图

【例 2】 写出下列复合函数的复合过程.

（1）$y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$；　　　（2）$y=\ln(1+\sqrt{x^2+1})$；

（3）$y=x^{\sin x}$ $(x>0)$；　　　（4）$z=\sqrt{x^2+y^2+1}$

解题提示 写出一个函数的复合过程，应遵循下面原则：

（1）由外向里逐层拆分；

（2）分解结果都必须是基本初等函数或基本初等函数四则运算结果.

解 （1）$y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$ 由 $y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

（2）$y=\ln(1+\sqrt{x^2+1})$ 由 $y=\ln u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 复合而成.

（3）函数 $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ 其特点是底与幂指数都是变量，本身不是复合函数，结合对数恒等式变为 $y=e^{\sin x\ln x}$，可看作是由 $y=e^u$，$u=\sin x\ln x$ 复合而成的

函数.

(4) $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$是由 $z=\sqrt{u}$，$u=x^2+y^2+1$ 复合而成的二元函数.

【例 3】 给出一半径为 R 的圆球，作外切于圆球的圆锥，试将圆锥体积表示为高的函数.

解题提示 建立函数关系式最重要的是寻找变量之间的对应关系，没有统一的规律可循．一般可利用几何、代数、三角、物理或其它知识来确定量与量之间的对应关系，找出对应规律，实际问题中定义域要依据实际意义而定，不能仅从解析式来确定.

解 作出示意图 1-4，设圆锥底边长为 $2x$，高为 h，体积为 V.

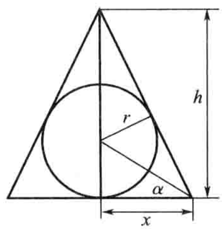


图 1-4 例 3 图

方法一 $V=\dfrac{1}{3}\pi x^2 h$，

因为 $\dfrac{x}{r}=\dfrac{h}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}$（三角形相似，对应边成比例）

$$x=\frac{rh}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}=\frac{rh}{\sqrt{h^2-2rh}}$$

所以 $$V=\frac{1}{3}\pi x^2 h=\frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}(2r<h<+\infty).$$

方法二 如图 1-4，设定角 α，则 $\tan\alpha=\dfrac{r}{x}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{h}{x}$，由二倍角公式 $\dfrac{h}{x}=\dfrac{2\dfrac{r}{x}}{1-\left(\dfrac{r}{x}\right)^2}$，得 $x^2=\dfrac{r^2 h}{h-2r}$，所以

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 h=\frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}(2r<h<+\infty).$$

【例 4】 说明下列方程各表示什么曲面，特点如何．若是旋转曲面，指出它是如何形成的.

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$； (2) $x^2+y^2+z^2-x+3y=0$；

(3) $2y=x^2$； (4) $x^2+y^2=4z$；

(5) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$； (6) $y^2+z^2=2x^2$；

(7) $x^2=z^2$；　　　　(8) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=-1$；

(9) $(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{4}=1$.

解题提示　对照平面、曲面方程形式，抓住特点，确定曲面名称；若有两个二次项系数相等，可视为旋转曲面.

解　(1) 旋转椭球面．xOz 面上曲线$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ 绕 z 轴旋转而成或 yOz 面上曲线$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

(2) $x^2+y^2+z^2-x+3z=0$ 即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$，这是一个球心为$\left(\frac{1}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$，半径为$\frac{\sqrt{10}}{2}$的球面.

(3) 抛物柱面．以 xOy 面上抛物线 $2y=x^2$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面.

(4) 旋转抛物面．xOz 面上曲线 $x^2=4z$ 绕 z 轴旋转而成或 yOz 面上曲线 $y^2=4z$ 绕 z 轴旋转而成.

(5) 单叶双曲面.

(6) 圆锥面．由 xOy 面上直线 $y=\pm\sqrt{2}x$ 绕 x 轴旋转而成或 zOx 面上 $z=\pm\sqrt{2}x$ 绕 x 轴旋转而成.

(7) $x^2=z^2$变形得 $x=\pm z$，实质是两个一次方程，表示平行于 y 轴，且分别过 zOx 面上直线 $x=z$ 或 $x=-z$ 的两张平面．也可说成是母线平行于 y 轴的两张柱面.

(8) 双叶双曲面.

(9) 令 $x-2=x',y+1=y',z-3=z'$，进行坐标轴平移，则原方程变为 $x'^2+\frac{y'^2}{9}+\frac{z'^2}{4}=1$，这是一张中心在（2，－1，3）的椭球面.

应用与提高

【例 5】　已知一个单三角脉冲，其波形如图 1-5，试建立电压 U（伏）与时间 t（微秒）之间的函数关系.

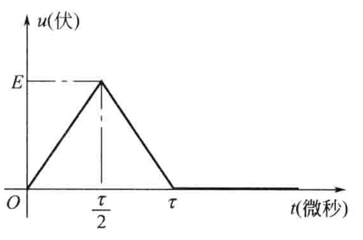


图 1-5　例 5 图

解题提示　观察图形，注意到在不同的时间段电压按不同的规律进行变化，故需将时间段分为 $0\leqslant t<\frac{\tau}{2}$，$\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau$，以及 $t\geqslant\tau$ 三段，需要用分段函数表示结果.

解　由图可知

当 $0\leqslant t<\frac{\tau}{2}$时，$U=\dfrac{E}{\frac{\tau}{2}}t=\dfrac{2E}{\tau}t$；

当$\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau$ 时，$U-0=\dfrac{E-0}{\frac{\tau}{2}-\tau}(t-\tau)=-\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau)$；

当 $t\geqslant\tau$ 时，$U=0$.

即电压 U（伏）与时间 t（微秒）之间的函数关系为

$$U=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & 0\leqslant t<\dfrac{\tau}{2}\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & \dfrac{\tau}{2}\leqslant t<\tau\\ 0, & t\geqslant\tau\end{cases}.$$

【例 6】　某跳水运动员进行 10m 跳台跳水训练时，身体（看成一点）在空中的运动路线是经过原点 O 的一条抛物线，如图 1-6 所示．跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$m，入水处距池边的距离为 4m，同时，运动员在距水面高度为 5m 以前，必须完成规定的翻腾动作，否则就会出现失误.

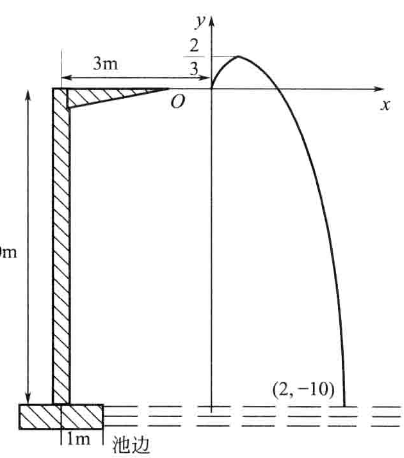


图 1-6　跳水训练图

（1）求这条抛物线的函数表达式；

（2）在某次试跳中，测得运动员在空中的路线是图中的抛物线，且运动员在空中调整好姿势后，距池边的距离为 $3\frac{3}{5}$m，问此次试跳会不会出现失误？通过计算说明理由.

解题提示　这是函数关系在生活中的应用，充分利用图形直观及抛物线特点，确定抛物线表达式，并将实际问题转化为数学量的确定.

解　(1) 由题意可知：入水处对应点的坐标为 $(2，-10)$，抛物线顶点的纵坐标为 $10\frac{2}{3}-10=\frac{2}{3}$，且原点在抛物线上，设抛物线为 $y=ax^2+bx+c(a<0)$，$c=0$，因 $\begin{cases}4a+2b=-10\\ -\frac{b^2}{4a}=\frac{2}{3}\end{cases}$，计算得 $a=-\frac{25}{6}$，$b=\frac{10}{3}$（顶点只能在 y 轴右侧）即所求抛物线为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$.

(2) 当 $x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$ 时，可求得 $y=-\frac{16}{3}$，此时，运动员距水面的高度为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}<5$，故此次试跳会出现失误.

部分习题解答

习题 1-1

3. 某房屋建筑上的窗户是由矩形与半圆构成，如图 1-7 所示，若采光面积为定值 a，试确定矩形的长与高的函数关系.

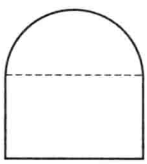


图 1-7　习题 1-1　3 题图

解　设矩形长为 x，高为 h，则矩形面积为 xh，而半圆面积为 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi x^2$，由条件得，$xh+\frac{1}{8}\pi x^2=a$，所以 $h=\frac{a}{x}-\frac{1}{8}\pi x$.

5. 某段时间内，电话公司“A 网”收费标准是：月租费 30 元，来电显示费 6 元/月，本地话费 0.4 元/分；“B 网”收费标准是：月租费和来电显示费免收，本地话费 0.6 元/分；想拥有来电显示服务的用户入哪种网比较合算？

解　要弄清入哪种服务网较为合算，需要就 A、B 两网首先分别确定通话时间与服务收费之间的关系，然后将收费加以比较即可.

用 t 表示通话时间，y 表示“A 网”服务收费，s 表示“B 网”服务收费，则 $y=36+0.4t$；$s=0.6t$.

(1) 若 $s>y \Leftrightarrow 0.6t>36+0.4t \Rightarrow t>180$ 分钟，此时用户入“A 网”较合算；

(2) 若 $s<y \Leftrightarrow 0.6t<36+0.4t \Rightarrow t<180$ 分钟，此时用户入“B 网”较合算；