张楚廷教育文集

Zhang Chuting's
Collected Works on Education

16

第十六卷 数学文化与教育卷

湖南人民出版社

张楚廷教育文集

Zhang Chuting's
Collected Works on Education

16

第十六卷 数学文化与教育卷

湖南人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

张楚廷教育文集. 第16卷，数学文化与教育卷/ 张楚廷著. —长沙：湖南人民出版社，2012. 7

ISBN 978-7-5438-8628-5
I. ①张… II. ①张… III. ①教育—文集②数学教学—文集 IV. ① G4-53 ②01

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第175936号

张楚廷教育文集（第16卷）——数学文化与教育卷

编 著 者 张楚廷
责任编辑 吴优优
装帧设计 熊玉心

出版发行 湖南人民出版社［http://wwwhnppp.com］
地　　址 长沙市营盘东路3号
邮　　编 410005
经　　销 湖南省新华书店

印　　刷 长沙市精美彩色印刷有限公司
版　　次 2012年8月第1版
　　　　 2012年8月第1次印刷
开　　本 710×1000 1/16
印　　张 35.5
字　　数 538千字
书　　号 ISBN 978-7-5438-8628-5
定　　价 90.00元

营销电话：13875944655 0731-82683371

自　题

来自江汉平原的一个村口，
依在上天之下的一片热土，
手捧祖宗馈赠的一箱帛竹，
肩扛朝耕夕作的一把锄头。

曾闻铸就宇宙的一声怒吼，
凝望日月星辰的一缕素数，
吟聚人间诗篇的一湾溪流，
敬伺毫秒构筑的一束冬秋。

序

20世纪90年代中，中国大学开展素质教育活动。那时，主管高等教育的教育部副部长周远清有力地领导了这个活动。为了推进大学的素质教育，也在周远清的直接领导下，建立了一个素质教育指导委员会。周远清、张岂之任顾问，杨叔子任主任委员，王一道（北大）、胡显章（清华）、李进才（武大）、刘献君（华中科大）、王弘德（西安交大）和我任副主任委员。

这个委员会的一项较大的工作项目是为全国的大学生出版一套直接用于素质教育的书。为这个书系的组编也建立了一个编委会，编委会由当时任教育部高教司司长钟秉林任主任，杨叔子是副主任之一。在这套丛书组编的过程中，杨叔子提到要将增强科学素养的内容考虑进去。有一次，他就找到我，说“你写一本‘数学文化’方面的书吧”。我立即回答，至少有十年以上未接触数学了，恐怕写不出。然而，他坚持，说具有文化性质的内容是很难忘记的。

正是在上述背景下，我动手写了一本书，书名就叫《数学文化》，也被纳入了素质教育书系。若不是杨叔子院士的建议和敦促，这本书是肯定出不来的。

现在回过头来看，当时写这本书的工作量不小，困难也很多。写的具体过程已经记不很清楚了，只觉得很艰难的。可能我对自己感到比较满意的一点是，当时干劲很足。

实际上，我的数学知识是很有限的。但是长期接触数学，

长期从事数学教育，对数学还是很有感情。又是十年过去了，对数学更加生疏了。然而，那份感情还在。

最近20多年来，我主要转向了教育学、教育哲学的研究。《数学文化》只是这20余年中的一个插曲。

这个插曲的出现，依然是教育事业促成的。不过，基础在于，我在跟数学打交道时，比较喜欢数学史，喜欢数学事实与活动背后活跃着的思想，乃至数学哲学。实际上，对于《数学文化》，正是教育思想与数学思想共同造就的。

对于这个插曲，现在看来，我并不感到是一件与我近20多年来的工作完全不相干的事情。我现在所涉及的教育思想、教育史、教育哲学，与我曾经长期接触过的数学史、数学思想、数学哲学是相通的，只不过我现在的研究已不再以数学为背景，但数学给我的影响仍留在我的工作和思想中。

并且，我还认为，数学的影响对任何人都是宝贵的，而不只是对我。对我所不同的是，我与数学有过更深切、更亲近的接触，也更受益于它。感谢数学对每个人都可能赐予的思想。

目　录

第一章　数学美学

许多人的许多行为是出于审美动机。这里说了两个“许多”，准确地说，所有正常的人都有审美活动。越广泛的审美活动，使人越热爱生活；越深入的审美活动，使人有越强烈的追求和理想，越充满生命活力。

人们在与数学接触的过程中，也有审美活动吗？当然，我们盼望有。因为，如果在这一过程中有广泛的审美活动，那就会使我们更加热爱数学；如果这种活动不断深入，甚至会使我们产生充满活力的数学理想，进而有所成就。

没有可能让所有的人成为数学家，现实生活中也不可能有很多的数学家。但是，应该而且可能盼望几乎所有的人愿意跟数学打交道，盼望有更多的人从数学那里获益，也盼望中国有更多的数学家。在古代中国曾是一个数学水平很高的国家，历史证明，中国人是擅长数学的。新的世纪里，曾有人预言中国将成为数学大国。“一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量”[A. N. 拉奥（音 Rao）语]，繁荣昌盛的中国需要数学。

利益的考虑是一个方面，然而仅仅只有利益的考虑，不可能有大批杰出的数学家出现。如果你感到它是过于严肃的，甚至感到它是单调的、冷酷的、无情的，你会深入地接近它吗？亲切、激情在美感消失的时候都会消失，因而，创造性的数学活动也难以出现。

自觉的审美需要是一种较高级的心理活动，数学活动中产

生这种心理需要也需要有一个过程。我们能否考虑这样两个目标呢？一是使中学高年级学生以及必须继续学习数学的大学生们都多少能从审美的角度看待数学；二是数学教师们，无论是哪一类学校的数学教师们，都具有一定的数学美学修养。没有第二个目标，就不可能有第一个目标的实现。

更基本的问题是，数学真的是值得人们去欣赏的吗？数学有美可言吗？如果对这个问题不做回答，前面的问题就都没有意义了。进一步的问题，如"数学审美对人的一般审美能力的提高甚至对人的一般发展也有作用吗"等也以这个更基本的问题为基础。因此有必要先讨论这个更基本的问题。

第一节　引人注目的历史现象

许多大数学家同时兼备科学与艺术这两方面的优良素质，甚至在两方面都颇有造诣，这是一个不容忽略的历史现象。

在古代，可以说上述现象更为典型。古希腊时，亚里士多德、柏拉图、德谟克利特等人的著作中许多既是杰出的科学和哲学著作，又是优秀的艺术著作。尤其是毕达哥拉斯学派，他们不仅是一批著名的数学家、物理学家、天文学家，同时还研究音乐和绘画，被称为最早用自然科学观点看待美学的美学家。那时，数学本身就被珍视为一门艺术，从其中看到美、和谐、简单、明确以及秩序。算术、几何与天文被看做是心智的艺术、灵魂的音乐。算术、几何、天文、音乐是学校课程的"四大科"，而这"四大科"又都被看成是数学学科。可见，那时候数学与美学被多么紧密地联系在一起。

毕达哥拉斯本人还是音乐理论的一位始祖。他阐明了单弦的调和乐音与单弦弦长之间的关系。例如，他发现以下事实：单弦所发出的声音取决于弦的长度。绷得一样紧的弦，若它们的长度成整数比，就会发出谐音。

欧几里得、普托拉米等数学家也写过音乐方面的著作，研究过谐音

的配合，而且还制订过音阶。

对于达·芬奇，可能很少有人不知道他是文艺复兴时期的一位大画家，但是，却可能很少有人知道他还是一位数学家，很少有人知道“黄金分割”的美名竟出自这位画家之口。他曾说：“一个人如怀疑数学的极端可靠性就是陷入混乱……”他非常赞赏数学的说明和论证。

笛卡儿是卓越的数学家、哲学家，但不应该忘记，在他的著作中有一本名叫《音乐概论》(1650 年）的书。

伽利略的主要著作虽然以科学为主题，但同时被认为是杰出的文学作品，他也研究音调、谐音。

莱布尼茨堪称学识渊博，同时，他多才多艺，具有极高的艺术素养。

欧拉当然主要以数学家著称，但是他在 18 世纪 30 年代创立了一种新的音乐理论。1731 年，他写了一本以乐声为主题的著作《建立在确切的谐振原理基础上的音乐理论的新颖研究》。他的音乐理论，在音乐家看来是“太数学化了”，而在数学家看来又“太音乐化”了。

1762 年，欧拉在一个音乐审美学主要问题的推动下还研究过粗细可变弦的振动问题。欧拉从二十几岁起，到年逾花甲之后，一直对声乐有许多的研究。

应当指出的是，还有泰勒、拉格朗日、丹尼尔·伯努利及其父约翰·伯努利等人都研究过音乐。长笛、风琴、各种形状的喇叭、小号、军号、铃及许多的弦乐器和管乐器都被研究过。

被音乐这一主题所吸引的数学家直至 19 世纪也不乏其人，赫姆霍兹（他还是物理学家）就是其中一位。

当然，数学家的艺术素质和兴趣并不只在音乐方面。19 世纪英国领头的数学家之一西勒维斯特是一名出色的诗人。

大科学家麦克斯韦是另一位同时具备数学才能和写诗才能的代表。

一位卓越的女数学家柯娃列夫斯卡娅既能写小说，又能写剧本。

伟大的爱因斯坦是一位出色的小提琴手，这已经是众所周知的。

20 世纪最优秀的数学家之一冯·诺依曼是多才多艺的数学家，他除了是语言学家外，还极喜爱喜剧、幽默。

我国著名的数学家华罗庚的诗作许多人也不会是没有印象的。

我不是想由所列举的历史现象得出凡数学家必同时是艺术家的结论，我只是想提出数学与美学究竟有些什么联系的问题。也许，数学家自己关于数学与美学的论述能直接说明一些问题。这正是在下一节和以后的某些地方要介绍的。

第二节　对正整数的美学审视

每个人最初接触的都是正整数。那么，我们每个人就可以首先问自己：对正整数的感觉如何？很多人可能说“没有什么感觉”。然而，正整数曾引起无数人的兴趣和喜好，而且是一个长盛不衰的论题。

一、完美数

很早很早，人们就思索正整数的分解，看一个正整数是几个正整数的乘积，也就是一个正整数能被哪些正整数整除的问题。除了 1 和它自己以外的任何正整数都不能整除它时，称它为素数或质数。例如，2 是最小的素数，也是唯一的偶素数；在奇数当中，最小的素数是 3；此外，5，7，11，13 等都是素数，但整数中很多不是素数。

若 m 能整除 n，称 m 为 n 的一个因数，1 和 n 是两个很特殊的因数。现在考虑 n 的一切因数之和：假若 n 是一个素数，那么 n 的因数之和是 $n+1$；反过来也对，若 n 的因数之和是 $n+1$，则 n 是素数。

有人问：你喜欢哪个数？许多人未曾思索过，一时答不上。稍加思考，也觉得 1，2，3，4，…，好像没有什么差别。当然，根据我们汉语的发音，有人喜欢 8，因为那似乎意味着“发”；也有人喜欢 6，因为那意味着顺利。但这并不是出自对数本身性质的原因而产生的喜好。

数有许多不同的性质，人们可能不会因其有某种性质而一定喜欢它，但是一些奇妙的性质则很可能引起人们的兴趣。奇妙的性质也不少，人们对数的兴趣也可能各不相同，或可能有多方面的兴趣。

6 这个数的因数有 1，2，3，6（暂约定 1 和 6 自身亦算其因数），

其和恰为 12，6 的两倍；如果不计 6 自身，则其因数之和恰是它自己。

28 也具有这样的性质，其因数 1，2，4，7，14 之和恰等于 28。这是第 2 个具有这种性质的正整数。

496，仔细看看，1，2，4，8，16，31，62，124，248 是它的因数，它们的和也正等于 496。

第 4 个具有这种性质的数稍难找一些，它是 8 128。可是，1 800 多年之前就有人知道 8 128 具有其各因数之和恰为它自己（不计它自己）的性质。

人们把这种数称为完美数，即各因数之和为它的两倍或不计它自己时恰等于它的那种数叫完美数。6，28，496，8 128 便是很久以前人们知道的 4 个最小的完美数。看来，完美数不多，已可初步看到，前 8 000 多个正整数中才 4 个！物以稀为贵，完美数稀罕。

完美数，人们用美来形容数。顺便看一下汉语里以“美”字组词的情况。美好，把美与善联系在一起；美妙，把美与奇异联系在一起；美满，把美与情感联系在一起；美言、美谈、美味……用美来形容一些行为和感觉。又有壮美、俊美、秀美、完美等对不同性质的美的区分。汉语有关美的丰富词汇本身反映了在我们文化中对美的多方面的准确理解。

用完美来形容 6，28，496，…这一类数也很恰当。这种数的完美，一方面表现在它稀罕、奇妙，一方面表现在它的完满，各因数和不多不少等于它自己。

第 5 个完美数在哪里？很不容易寻找。在距离发现第 4 个完美数之后 1 000 多年，于公元 1538 年才发现第 5 个完美数——33 550 336。又过了 50 年，才发现第 6 个是：

8 589 869 056

寻找这种数那么难，却还是有人去寻找，到现在为止也还只发现 20 多个。为什么去寻找呢？是因为这种数在现实生活中有什么特别的用途吗？目前确实还没有发现，是它的奇异和美丽吸引了许多的人。

二、默森素数

在探寻完美数时，欧几里得就已发现它可能是形如 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的数。

容易验证，$C_n=2^{n-1}(2^n-1)$，当 $n=2$ 时，$C_2=6$；当 $n=3$ 时，即有 $C_3=28$。还可看到：

$$C_5=496; \quad C_7=8\ 128.$$

正好，C_2，C_3，C_5，C_7 是最小的 4 个完美数。也难怪第 5、第 6 个完美数的发现要困难一些，C_8，C_9，C_{10}，C_{11} 都不是完美数，而

$$C_{13}=2^{12}(2^{13}-1)=33\ 550\ 336,$$

$$C_{17}=2^{16}(2^{17}-1)=8\ 589\ 869\ 056,$$

才是第 5、第 6 个完美数。

对这 6 个完美数进行观察可以发现，$n=2$，3，5，7，13，17 都是素数，此外，还可发现：

$$2^2-1=3$$

$$2^3-1=7$$

$$2^5-1=31$$

$$2^7-1=127$$

$$2^{13}-1=8\ 191$$

$$2^{17}-1=131\ 071$$

都是素数。欧几里得当时就想到过，如果 n 和 2^n-1 同时是素数的时候 $C_n=2^{n-1}(2^n-1)$ 是完美数。后来，在 18 世纪有一位数学家证明了偶完美数确实是形如 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的数，其中 n 与 2^n-1 为素数。

这样，形如 2^n-1 的素数就与完美数有十分密切的关系了。只要确定了 2^n-1 是素数，就很容易确定相应的完美数了。形如 2^n-1 的素数被称为默森素数，并记为 $M_n=2^n-1$。

默森本人只确证了当 $n=2$，3，5，7，13，17，19，31 时 2^n-1 是素数，也就是说他本人只发现了 8 个默森素数，事实上，这 8 个之中的前 6 个是前人发现的。这都是距今三四百年前的事了，然而默森素数一直被人研究着。除了已提到的 8 个外，另外还有 20 个形如 2^n-1 的默

森素数，其中 $n=61$，89，107，127，521，607，1 279，2 203，2 281，3 217，4 253，4 423，9 689，9 941，11 213，19 937，21 701，23 209，44 497，86 243。

第 28 个默森素数 $2^{86\,243}-1$ 已是一个非常大的数，这个数写出来共有25 000多位。仅写下这个数就要花几个小时，用二三十页纸，至于要判断它是否是素数，那就难上加难了。你只要试着判断 641,811,977 这样的三位数是否是素数，就能体会到有一定的难度，更不要说对十位数、百位数是否是素数判断时的难度，对于像 $2^{86\,243}-1$ 这样大的数，如果没有计算机帮忙来判断是难以想象的。

默森素数的研究在代数编码等应用学科中能派上用场。但是，长久以来，对这种素数的研究并非是由应用而推动的。应用中也有美——应用美。然而，关于整数的许多奇特性质的研究常常出自人们对自然美的欣赏与追求，人类的智慧光芒在其中闪烁，人也在这种追求中显示自己的价值。

三、回文素数

古人诗作中有一种“回文诗”，这种诗完全反过来念也成一首诗，如《晚秋即景》：

烟霞映水碧迢迢，
暮色秋声一雁遥，
前岑落辉残照晚，
边城古树冷萧萧。

把这首诗从最后一个字“萧”起倒过来念，即成了：

萧萧冷树古城边，
晚照残辉落岑前，
遥雁一声秋色暮，
迢迢碧水映霞烟。

数学中也有“回文素数”（参见吴振奎等著《数学中的美》）。回文素数是指这样的素数：将它的各位数码完全倒过来写，却仍是素数。例如，19 是素数，若倒过写便是 91，它不是素数（$91=7\times13$），所以 19