非线性预测控制

钱积新　宋春跃
王可心　陈　杨　编著

科学出版社

非线性预测控制

钱积新　宋春跃
王可心　陈　杨　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书的目的是寻求基于机理微分-代数方程模型的预测控制算法，并力图建立通用的非线性预测控制器(NMPC)软件. 全书共分三篇. 第一篇系统地介绍了动态系统的数值计算方法理论，该内容对掌握 ODE 和 DAE 系统及其数值计算的精髓，并进一步构建合理、鲁棒的 NMPC 问题的求解方法是十分必要的. 第二篇以 Hessenberg DAE 生产过程模型为对象，给出了结合联立动态优化策略的非线性预测控制理论与方法，并针对相应的变负荷优化控制命题，构造了适于该类机理模型的通用 NMPC 算法. 第三篇针对联立动态优化策略生成的大规模非线性规划问题，介绍了目前最高效的求解算法，并简要介绍了作者与 Carnegie Mellon 大学合作开发的动态优化求解器，该求解器的实现综合了本书各篇涉及的数值方法.

本书可作为高等院校控制科学与工程、计算机控制、工业自动化等专业高年级本科生和研究生的参考用书，也可供从事先进控制、工业自动化等研究的相关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性预测控制/钱积新等编著. —北京：科学出版社，2015.3
ISBN 978-7-03-043726-6

Ⅰ.①非… Ⅱ.①钱… Ⅲ.①非线性-预测控制 Ⅳ.①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 049820 号

责任编辑：姚庆爽 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：张 倩 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 3 月第一次印刷 印张：15 1/2
字数：305 000
定价：80.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

为了适应市场需求的波动及达到使生产过程节能降耗的目的,工厂生产的产品品种及产量安排就不能始终固定不变,自动变负荷生产、产品牌号的自动切换生产、减少过渡料的数量、缩短切换时间等就成为生产过程控制中除了定值控制以外的一个新研究领域.而这些场合由于生产过程工作点的大幅度变动以及过程动态特性的变化,非线性特征表现得更加突出,所以非线性预测控制算法的研究就成为我们的课题.

预测控制并不是指某种具体的控制策略,而是指相当宽泛的一类控制方法.对线性或非线性过程,预测控制策略的实现不存在太大差别.

什么是非线性特性呢?除了线性特性,其他都是非线性的.所以我们只能以一类特定的非线性模型作为研究对象.本书选择工业过程的非线性机理模型作为研究平台.因为工业过程控制已从单变量(温度、压力、流量、液位、组成)控制向多变量控制扩展;控制系统的规模已从单个工艺变量的定值控制转向整个单元操作的控制进而过渡到全流程的多变量控制,所以需要一个能描述广泛范围的过程动态模型作为研究平台.过程工程学科的发展(从20世纪六七十年代开始)已能够提供基于工业过程全流程机理的稳态及动态非线性数学模型,即以微分-代数方程组(differential algebraic equation,DAE)表示的机理模型.因而很自然,我们就选择这样的非线性机理动态模型作为研究平台.

过程工程专业建立的非线性机理动态模型不是数学意义上最一般的微分-代数方程组,而是一组所谓的Hessenberg半显式DAE模型.它的特点是以一阶微分方程表示的微分变量和代数变量是"解耦"的,这种DAE形式的机理模型可以描述工业中绝大多数实际生产过程的行为.这种形式的DAE在数学上研究得比较多,因此人们对它的了解也比较透彻.这类DAE模型与常微分方程(ordinary differential equation,ODE)模型相比较,它们的不同之处在于前者是在ODE基础上增加了代数方程组.因此,为了研究方便,在数学上引入了index的概念,并且证明了只有index-1的系统才能直接离散化,对较高index的系统不能直接离散化,否则会出现错误的结果.对index较高的系统在数值求解前要求先降低系统的index,而这种降index工作是因问题而异的,而且十分繁杂.从系统仿真的角度讲,这就是二次建模的工作.对降index的工作不存在通用的方法.这对要设计一种通用的非线性预测控制(nonlinear model predictive control,NMPC)算法(软件)是不利的,这正是将NMPC推广应用到工业过程生产实际中去的困难所在.

Hessenberg 半显式 DAE 系统的 index 的物理意义是模型中的代数方程个数与代数变量维数之间关系的描述. 当代数方程组中方程个数与代数变量维数相等时(代数方程组是一个"方"系统),一般讲代数方程组的解存在且唯一(当然要求代数变量的 Jacobian 矩阵是非奇异的),当代数方程个数小于代数变量的维数时,系统就呈现出高 index 的特性.

我们通过对化工过程建模过程的分析得知,在建模过程中必须要求代数方程是"闭合"的,也就是要求代数方程个数与代数变量的维数是相等的. 这样就保证了系统是 Hessenberg 半显式的 DAE 且 index 是 1. 所以对这样"合理的"DAE 系统可进行像 ODE 一样的直接离散化,而不必对一个非常大而复杂的实际工业过程系统模型进行判断 index 及降 index 的二次建模工作,大大简化了数值求解工作.

为了将连续的 DAE 系统用数值求解,第一步必须离散化. 尽管对于一般性的 DAE 没有很好的理论结果,但对于一类特殊的 Hessenberg 系统,而且较低 index (index-1, index-2)的 Hessenberg 系统,已有了很好的结果,而这正是我们在第二篇中所依赖的一些理论结果. 为此我们编译了 *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations* 一书的有关章节作为本书的第一篇介绍给读者,给出了离散化方法的一般性分析,介绍了在 DAE 系统的数值求解方面的成果,使求解 DAE 系统的工程师、科技工作者、应用数学和数值分析工作者或者在该领域从事进一步研究的人更容易接受.

第二篇给出了基于 DAE 数值求解的非线性预测控制理论与方法. 具体地讲,我们采用的是有限元正交配置方法进行离散化. 当配置点选为正交多项式的根时,能够以最少的配置点个数达到最高的近似程度(代数精度),此时的配置方法就称为正交配置. 我们在离散化一个连续系统时,为保证计算结果的正确性,离散方法必须满足相容性、收敛性与数值稳定性. 本篇在配置法与隐式 Runge-Kutta 方法的等价性基础上,阐述了动态系统的正交配置离散化方法,保证了离散化策略的相容性、收敛性及数值稳定性. 隐式方法的计算步长的选取范围要比显式方法更宽(当然步长的选取还会受到计算精度的限制),这对缩短求解时间是十分有利的. 对于离散后的最优控制问题,给出了联立优化策略所得解与最优控制真解的一致性关系论证.

由于最优控制问题中解的唯一性的重要性,在第二篇中对此进行了相应的讨论. 下面对设计通用的 NMPC 算法应该关注的几个问题进行总结:

(1) 建立生产装置的 DAE 模型以后严格讲还要检验非线性模型的稳定性,是否会产生分叉及混沌现象及其避免方法等. 这些工作基本上是由过程工程学科的专家、学者来完成的. 在建模工作中还必须保证系统的 index 是 1.

(2) 用有限元正交配置方法直接离散化 DAE 系统:差分方程必须满足相容性、收敛性与数值稳定性(A-稳定).

(3) 构造预测控制的最优化命题:要确保全局最优解(或唯一解).

(4) 调用非线性规划(NLP)适当的最优化算法进行求解,得到一组最优控制序列.最优化算法的收敛性、收敛速度的研究由数值计算数学家来完成.

(5) 研究闭环系统的控制品质及研究系统的稳定性和鲁棒性:一个 DAE 开环系统的解并不能保证组成闭环后系统仍然是稳定的,更不要说会满足闭环系统的品质指标.

(6) 完成工业用通用 NMPC 控制算法的设计与实现:构造两层(稳态与动态)最优化算法结构,实现"胖"、"瘦"系统的自动转换与消耗掉多余的自由度.

以上六个问题基本上概括了使 NMPC 在工程中推广应用需要做的基础工作.而整个 DAE 系统的优化计算核心是 DAE 系统的模拟,也就是基于 DAE 及 ODE 的数值计算.为此我们引入了第一篇,供希望更多地了解 DAE 系统的数值求解的读者参考.了解 NMPC 算法的读者可以跳过它.本书的第三篇介绍了 NLP 算法,也是为了使读者更好地了解第二篇的内容并供希望更多地了解核心算法——非线性最优化的读者参考.三篇内容分别对应于要建立通用 NMPC 软件必须要涉及的动态系统模拟、控制与寻优的理论与方法,其中第一和第三篇分别是第二篇的数学基础和数学工具,其架构和内容为第二篇预测控制内容的辅助和补充.

本书的第一篇是由钱积新编译完成;第二篇的第 5 章、第 6 章、第 8 章及第 9 章由钱积新、陈杨(宁波大学科学技术学院)完成,第 7 章由宋春跃、王可心完成,第 10 章由万娇娜完成;第三篇由王可心、钱积新完成.全书由宋春跃、王可心整理修订.本书在写作过程中还得到游江洪、吴兵等研究生的协助,在此一并谢过.本书得到国家自然科学基金(61273085、60974023)及国家 973 课题"基于过程模型的生产全流程在线动态运行优化理论和方法研究"(2009CB320603)的资助,特此感谢!

由于作者学识有限,而本书又涉及众多学科领域,书中不当之处一定不少,敬请读者谅解,并期待广大读者和专家、学者的批评与校正.

钱积新

2013 年 6 月 30 日于求是园

目　　录

第二篇 非线性预测控制理论与方法

第三篇 非线性规划基础理论与方法

第一篇

常微分方程和微分-代数方程的数值计算方法①

① 本篇内容来自于本篇参考文献[1]. 由于这部分内容为经典教材,我们编译了与本书所涉内容直接有关的章节,即基本概念、稳定性、一步法及有关DAE的数值求解. 这部分内容是第二篇的基础.

第 1 章　常微分方程及微分-代数方程

当科学、工程、经济等现象用数学模型来描述时，常利用常微分方程(ordinary differential equation, ODE)和微分-代数方程(differential algebraic equation, DAE)进行刻画. 在大多数情况下，由于模型太复杂，我们无法求解到一个精确解，甚至找到一个近似解也不容易. 鉴于此，为寻求方程的解，有效的、可靠的计算机仿真方法成为必需.

从数学以及计算上看，ODE 问题最重要的分类与这些方程相关的附加条件或边界条件有关. 考察如下一个简单的例子

$$u''(t)+u(t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant b$$

其中，t 是独立变量(t 一般被认为是时间变量，当然也可以被认为是长度或其他的独立变量)，$u=u(t)$是未知的因变量. 在本书中，我们采用以下符号：

$$u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\quad u''=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$

等. 通常我们省略 t 而将 $u(t)$简写为 u.

该微分方程的通解为含两个参数 α 和 β 的形式：

$$u(t)=\alpha\sin(t+\beta)$$

上例微分方程对于不同的边界条件会有不同的情形，如下：

(1) **初值问题**(initial value problem, IVP)：给定初值条件 $u(0)=c_1$ 及 $u'(0)=c_2$，则有

$$\begin{cases}\alpha\sin\beta=u(0)=c_1\\ \alpha\cos\beta=u'(0)=c_2\end{cases}$$

对于该方程组，可以唯一地解出 $\beta=\arctan(c_1/c_2)$(或 $\beta=\operatorname{arccot}(c_2/c_1)$)及 $\alpha=c_1/\sin\beta$(或 $\alpha=c_2/\cos\beta$)(注：这两个表达式中至少有一个是良定的(well-defined)). 对任意初值$(c_1,c_2)^{\mathrm{T}}$，该初值问题有唯一解. 当 $c_1=1$ 和不同的 c_2 取值时，其解如图 1.1 所示。

(2) **边值问题**(boundary value problem, BVP)：给定 $u(0)=c_1$ 及 $u(b)=c_2$，从图 1.1 中可以看出，对于 $b=2$ 来说，如果选取恰当的 c_1 和 c_2，那么就会存在一条经过它们的唯一曲线，正如前面初值问题的情况. 然而，当 $b=\pi$ 时，不同的 $u'(0)$值在该点都可得到同样的值，即 $u(\pi)=-u(0)$(图 1.1). 则如果给定 $u(b)=c_2=-c_1$，那么 u 将会有无穷多个解；相反，如果此时 $c_2\neq-c_1$，则无解.

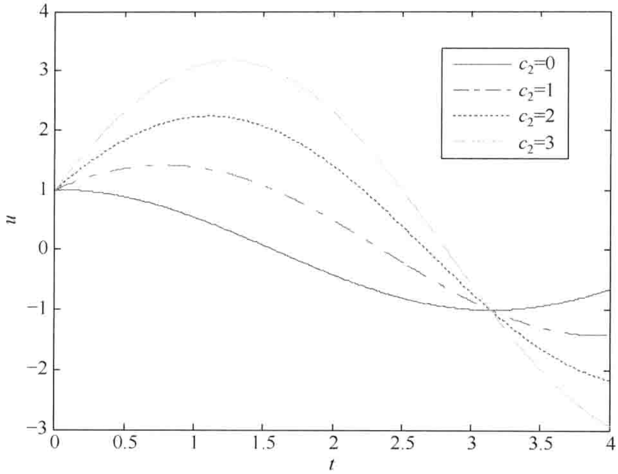

图 1.1　$u(0)=1$ 及不同 $u'(0)$时的 $u(t)$轨迹图

这个简单的例子已经指出了某些重要的且具有一般意义的结果：对于初值问题，从初始点出发，它带着解的全部信息，随着时间行进，过程逐点演化，是局部(local)地形成解的过程；而对于边值问题，解的信息在每个时间点上并不完全知道(例如，对于一个二阶微分方程而言，解的信息应该包括 u 和 u')，是在时间域上全局(global)地构造一个解的过程. 因此我们可以预料求解边值问题比求解初值问题要困难得多.

1.1　初 值 问 题

这里讨论微分方程初值问题(IVP)的一般形式如下：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}), \quad 0\leqslant t\leqslant b \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{c}\ (\text{给定}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{f}$ 是 t 和 $\boldsymbol{y}$ 的非线性函数. $\boldsymbol{f}$ 不显含 t 时，称之为自治(autonomous)系统. 当描述通用的数值方法时，我们通常假设系统是自治的以减少描述问题的符号. 本章开始时所引入的例子如果按式(1.1)表示可描述为：$m=2$，$\boldsymbol{y}=(u,u')^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=(u',-u)^{\mathrm{T}}$.

为简化起见，在方程(1.1)中，我们假设系统的演化是从 $t=0$ 开始的，但书中所述方法可以很容易地推广到 $t\in[a,b]$情形.

首先举例来说明微分方程的应用.

例 1.1 (单摆运动)　考虑质量为 1 的小球刚性地连接在一个质量忽略不计、长度为 1 的杆的一端，杆的另一端固定在平面坐标系的原点，如图 1.2 所示.

θ 为摆与垂直方向 y 轴的夹角，则单摆的无摩擦运动可由如下微分方程描述(请对比例 1.3)：

$$\theta''=-g\sin\theta \tag{1.2}$$

其中，g 为重力加速度，是一常值. 这是一个简单的关于 θ 的非线性 ODE 系统，其初始位置和速度分别为 $\theta(0)$ 及 $\theta'(0)$. 当 θ 值在一个小范围内变化时，可对方程(1.2)进行线性化近似，从而转化为线性方程.

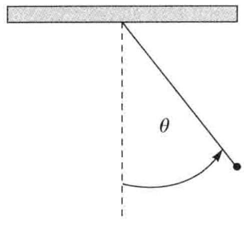

图 1.2　单摆系统

■

以上摆方程(1.2)是一个二阶标量微分方程. 很多求解初值问题的算法软件都要求初值问题写成形如方程(1.1)所示的一阶形式. 对于一个 m 阶的标量微分方程，可进行如下变换从而转化为形如方程(1.1)所示的一阶系统形式：

$$u^{(m)}=g(t,u,u',\cdots,u^{(m-1)})$$

对每阶导数引入新的变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$，并令 $y_1=u$，有

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=y_3 \\ \quad\vdots \\ y_{m-1}'=y_m \\ y_m'=g(t,y_1,y_2,\cdots,y_m) \end{cases} \tag{1.3}$$

让我们再返回到一般形式，方程(1.1)的微分方程初值问题. 数值求解该微分方程会涉及很多理论问题，为突出数值求解这个主题，我们这里会略去很多基本理论，而只保留与本书议题直接相关的一些基础的重要的定理. 首先给出如下定理.

定理 1.1　令 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})$为定义域 $D=\{0\leqslant t\leqslant b,|\boldsymbol{y}|<\infty\}$上关于全部$(t,\boldsymbol{y})$的连续函数. 此外，若该函数对于 $\boldsymbol{y}$ 是 Lipschitz 连续的，即存在一个常数 L，使得对所有$(t,\boldsymbol{y})$和$(t,\hat{\boldsymbol{y}})$，在域 D 上都有下式成立：

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(t,\hat{\boldsymbol{y}})|\leqslant L|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{y}}| \tag{1.4}$$

则

(1) 对任意 $\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^m$，初值问题(1.1)在$[0,b]$上存在唯一解 $\boldsymbol{y}(t)$，且该解是可微的.

(2) 该解 $\boldsymbol{y}(t)$是初值的连续函数，即如果 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 也满足微分方程(1.1)(与解 $\boldsymbol{y}$ 具有不同的初值)，那么

$$|\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t)|\leqslant e^{Lt}|\boldsymbol{y}(0)-\hat{\boldsymbol{y}}(0)| \tag{1.5}$$

(3) 更一般地，如果 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 满足如下摄动微分方程

$$\hat{\boldsymbol{y}}'=\boldsymbol{f}(t,\hat{\boldsymbol{y}})+\boldsymbol{r}(t,\hat{\boldsymbol{y}})$$

其中，$\boldsymbol{r}$ 在 D 上有界，$\|\boldsymbol{r}\|\leqslant M$，则有

$$|\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t)|\leqslant e^{Lt}|\boldsymbol{y}(0)-\hat{\boldsymbol{y}}(0)|+\frac{M}{L}(e^{Lt}-1) \tag{1.6}$$

如果微分方程(1.1)满足以上定理的条件,那么我们就称这个方程是良定的,即存在解且唯一,且解是初值的连续函数.

1.2 边值问题

边值问题(BVP)的一般形式如下:

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) \tag{1.7a}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(0),\boldsymbol{y}(b))=0 \tag{1.7b}$$

该边值问题由 m 个一阶非线性微分方程及 m 个独立的边界条件(一般也为非线性的)组成.边值问题已在前面谈及,其解的信息在积分区间的两端给出(或更一般地在时间域内的多个时间点上给出).对于此类边值问题解的存在性及唯一性问题,不像初值问题有定理 1.1 那样的一般性定理来保证.无论是求解边值问题的解析解还是数值解,都必须全局构造,因而边值问题的求解会比初值问题困难.当前求解边值问题的软件在先进性和鲁棒性方面远不如解初值问题的软件那么有效.

当然,良定的边值问题在许多情况下确实存在.

例 1.2(弹簧振动问题) 当弹簧形变较小时,弹簧形变位移 u 满足如下线性方程(该方程可描述很多物理现象随时间的演化):

$$-(p(t)u')'+q(t)u=r(t)$$

其中,$p(t)>0,q(t)\geqslant 0,0\leqslant t\leqslant b$.如果此弹簧一端固定,而另一端可自由振动,那么其边界条件为

$$u(0)=0,\quad u'(b)=0$$

如果令 $\boldsymbol{y}=(u,u')^{\mathrm{T}}$,可把上述弹簧振动方程写成式(1.7)的形式.更简洁的表示可令

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}u\\pu'\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}p^{-1}y_2\\qy_1-r\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}y_1(0)\\y_2(b)\end{bmatrix}$$

该边值问题有唯一解(该解给出了弹簧能量的最小值).它的唯一解问题在很多书中用有限元方法都讨论过,可参见 Strang 和 Fix[2].

■

关于一般性边值问题(1.7)解的存在性和唯一性.我们有什么结论呢?我们可以先考虑求解式(1.7)所对应的初值问题,把初值 $\boldsymbol{c}$ 看作一个待确定的参数矢量.