

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计 简明教程 辅导练习册

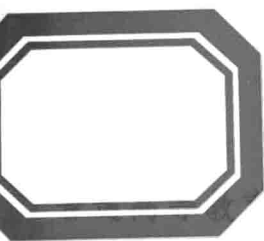
GAILULUN YU SHULI TONGJI
JIANMING JIAOCHENG FUDAO LIANXICE



© 左 东 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



“十二五”规划教材

概率论与数理统计简明教程辅导练习册

主 编 左 东

参 编 马丽琼 薛玉娟 马 骁

本书是《概率论与数理统计简明教程》配套的辅导练习册,每章分为基本知识点、基本要求、典型例题分析和作业四个部分,最后还附有三套模拟试题,便于学生课后练习和期末自测。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计简明教程辅导练习册/左东主编. —北京:
机械工业出版社, 2014. 8

ISBN 978 - 7 - 111 - 47506 - 4

I. ①概… II. ①左… III. ①概率论—高等学校—习题集
②数理统计—高等学校—习题集 IV. ①O21 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 169972 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:舒 雯 责任编辑:舒 雯

责任印制:杨 曦 责任校对:张 征 封面设计:张 静

涿州市京南印刷厂印刷

2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·5.5 印张·129 千字

0001—3500 册

标准书号:ISBN 978 - 7 - 111 - 47506 - 4

定价:14.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

社服务中心:(010)88361066

销售一部:(010)68326294

销售二部:(010)88379649

读者购书热线:(010)88379203

策划编辑:(010)88379733

网络服务

教材网:<http://www.cmpedu.com>

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

封面无防伪标均为盗版

前 言

概率论与数理统计已经发展成为一门具有广泛应用的学科,成为各高等院校理工科以及金融、医药、管理等各专业学生的必修课程。

本书是专门为高等院校的理工科学生编写的《概率论与数理统计简明教程》配套的练习册,每章分为基本知识点、基本要求、典型例题分析和作业四个部分,最后还附有三套模拟试题,便于学生课后练习和期末自测。

本书的编写还参照了全国硕士研究生入学考试数学考试大纲,内容覆盖了大纲的所有要求,可以作为研究生入学考试的复习习题册。

作为主审,徐昌贵副教授和熊学副教授仔细审阅了全书初稿,并提出了许多宝贵的修改意见。

本书的编写得到了西南交通大学峨眉校区教材建设项目的资助,得到了西南交通大学峨眉校区教务处的大力支持和帮助。在编写过程中,还一直得到了数学教研室全体同仁的关心、鼓励和帮助,在此我们一并表示由衷的感谢!

在本书的编写过程中,我们参阅了许多专著和教材,并采用了其中的部分内容、例题与习题,也在此表示感谢。

由于编者水平有限,书中难免出现疏漏和不当之处,恳请读者批评指正。

编者

2014年3月于峨眉

目 录

前言	1
第 1 章 随机事件及其概率	1
1.1. 基本知识点	1
1.2 基本要求	2
1.3 典型例题分析	2
作业 1	5
作业 2	7
第 2 章 随机变量及其分布	9
2.1 基本知识点	9
2.2 基本要求	11
2.3 典型例题分析	11
作业 1	17
作业 2	19
作业 3	21
第 3 章 二维随机变量及其分布	23
3.1 基本知识点	23
3.2 基本要求	24
3.3. 典型例题分析	24
作业 1	27
作业 2	29
作业 3	31
第 4 章 随机变量的数字特征	33
4.1 基本知识点	33
4.2 基本要求	34
4.3 典型例题分析	35
作业 1	37
作业 2	39

第 5 章 大数定理与中心极限定理	41
5.1 基本知识点	41
5.2 基本要求	43
5.3 典型例题分析	43
作业	45
第 6 章 数理统计的基础知识	47
6.1 基本知识点	47
6.2 基本要求	49
6.3 典型例题分析	49
作业	51
第 7 章 参数估计	53
7.1 基本知识点	53
7.2 基本要求	54
7.3 典型例题分析	54
作业	57
第 8 章 假设检验	59
8.1 基本知识点	59
8.2 基本要求	60
8.3 典型例题分析	60
作业	63
第 9 章 回归分析	65
9.1 基本知识点	65
9.2 基本要求	66
作业	67
模拟试题一	69
模拟试题二	73
模拟试题三	77

第 1 章 随机事件及其概率

1.1 基本知识点

1. 事件的关系与运算

(1) 三种运算

①积事件： $A \cap B$ ；②和事件： $A \cup B$ ；③差事件： $A - B = A \bar{B}$ 。

(2) 三种关系

①包含关系： $A \subset B$ ；②互斥关系： $AB = \emptyset$ ；③对立关系： $A + B = \Omega$ 。

(3) 运算规则

① $\overline{\bar{A}} = A, A \bar{A} = \emptyset, A + \bar{A} = \Omega$ 。

②交换律： $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ 。

③结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。

④分配律： $A \cap (\bigcup_{i=1}^n B_i) = \bigcup_{i=1}^n AB_i, A \cup (\bigcap_{i=1}^n B_i) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i)$ 。

⑤对偶律： $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ 。

2. 古典概型

设随机试验的样本空间 Ω 含有样本点的个数为 N 个，且每个样本点发生的机会均等，事件 A 所含的样本点数为 M ，则随机事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点数}}{\Omega \text{ 所含样本点总数}} = \frac{M}{N}$$

3. 几何概型

设随机试验的样本空间 Ω 含有样本点的个数为不可数无穷多，其几何度量为 $\mu(\Omega)$ ，且每个样本点发生的机会均等，事件 A 的几何度量为 $\mu(A)$ ，则随机事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

4. 加法公式

对于 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

若 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容，则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

5. 条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

6. 乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

7. 全概率公式

设 B_1, B_2, \dots, B_n 构成一个互不相容的完备事件组, A 是样本空间的一个子集, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

8. 贝叶斯公式

设 B_1, B_2, \dots, B_n 构成一个互不相容的完备事件组, A 是样本空间的一个子集, 则

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

9. 独立性

若 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$, 则

事件 A 与事件 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

10. 二项分布

若在 n 重伯努利试验中事件 A 发生的概率为 p ($0 < p < 1$), 则在 n 次试验中事件 A 恰发生 m 次的概率为

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad m=0, 1, \dots, n$$

其中 $q = 1 - p$.

1.2 基本要求

- 1) 理解随机事件的概念, 了解样本空间的概念, 掌握事件之间的关系与运算。
- 2) 了解概率的定义, 掌握概率的基本性质, 并会应用这些性质进行概率的计算。
- 3) 理解条件概率的概念, 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式, 以及用公式进行概率的计算。
- 4) 理解事件的独立性概念, 掌握应用事件独立性进行概率计算, 掌握二项分布及其相关计算。

1.3 典型例题分析

例 1 (蒲丰 (Buffon) 问题): 平面上画着一些平行线, 它们之间的距离都等于 a , 向此平面投一长度为 l ($l < a$) 的针, 如图 1-1 所示, 求此针与任一平行线相交的概率。

解: 设 x 表示针的中点到最近的一条平行线的距离, φ 表

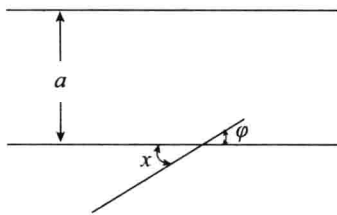


图 1-1 蒲丰问题

示针向上的方向与平行线正向(向右)的夹角,则

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

设事件 A 表示针与平行线相交,为使事件 A 发生, x 与 φ 必须满足: $x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi$

因此, Ω 与 A 的关系如图 1-2 所示,由几何概型可得

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi}{\frac{a}{2} \pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

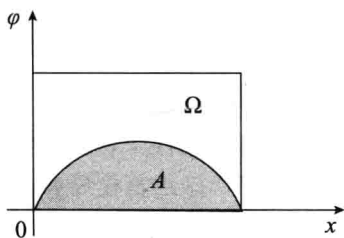


图 1-2 Ω 与 A 的关系

例 2 设机械系一年级有 100 名学生,他们政治、高数、英语、物理四门课程得优等成绩的人数分别为 85, 75, 70, 80。试证:这四门课成绩全优的学生至少有 10 人。

证: 设事件 A, B, C, D 分别表示从这 100 名学生中任抽取一名学生,其政治、高数、英语、物理成绩为优等,则

$$P(A) = \frac{85}{100} \quad P(B) = \frac{75}{100} \quad P(C) = \frac{70}{100} \quad P(D) = \frac{80}{100}$$

由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 知 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

又由 $P(A \cup B) \leq 1$ 可得 $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

同理 $P(CD) \geq P(C) + P(D) - 1$, 所以有

$$P(ABCD) \geq P(AB) + P(CD) - 1 \geq P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - 3 = \frac{10}{100}$$

即这四门课成绩全优的学生至少有 10 人。

例 3 对事件 A, B , 已知 $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{3}{7}$, $P(\bar{A} \cup B) = 0.45$, $P(B) = 0.3$, 求 $P(AB)$ 。

解答: $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = 0.45 \Rightarrow P(\bar{A}) - P(\bar{A}B) = 0.45 - 0.3 = 0.15$

$\Rightarrow P(\bar{A}\bar{B}) = 0.15$; 而 $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{3}{7} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{7}{3}P(\bar{A}\bar{B}) = 0.35$, 从而可得

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}\bar{B}) = 0.35 - 0.15 = 0.2$$

所以

$$P(AB) = P(B) - P(\bar{A}B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

例 4 将一枚硬币独立地掷两次, 设事件 $A_1 = \{\text{第一次出现正面}\}$, $A_2 = \{\text{第二次出现正面}\}$, $A_3 = \{\text{正、反面各出现一次}\}$, $A_4 = \{\text{正面出现两次}\}$, 则事件()

- (A) A_1, A_2, A_3 相互独立 (B) A_2, A_3, A_4 相互独立
(C) A_1, A_2, A_3 两两独立 (D) A_2, A_3, A_4 两两独立

解: 设 ω_{00} 表示第一次出现反面第二次出现反面, ω_{01} 表示第一次出现反面第二次出现正面, ω_{10} 表示第一次出现正面第二次出现反面, ω_{11} 表示第一次出现正面第二次出现正面。则

样本空间为 $\Omega = \{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11}\}$, 且 $P(\omega_{00}) = P(\omega_{01}) = P(\omega_{10}) = P(\omega_{11}) = \frac{1}{4}$ 。而

$$A_1 = \{\omega_{10}, \omega_{11}\} \quad A_2 = \{\omega_{01}, \omega_{11}\} \quad A_3 = \{\omega_{01}, \omega_{10}\} \quad A_4 = \{\omega_{11}\}$$

所以有

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

从而可得

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) \quad P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3) \quad P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

所以 A_1, A_2, A_3 两两相互独立, 故选 C。

例 5 已知每枚导弹击中敌机的概率为 0.9, 问需要发射多少枚导弹才能保证至少有一枚导弹击中敌机的概率不低于 0.999?

解: 设需要发射 n 枚导弹, n 枚导弹中击中敌机的导弹为 m 枚, 由于每枚导弹能否击中敌机是相互独立的, 故 n 枚导弹中至少有一枚击中敌机的概率为

$$P(m \geq 1) = 1 - (m=0) = 1 - C_n^0 0.9^0 0.1^n = 1 - 0.1^n$$

要使

$$P(m \geq 1) = 1 - 0.1^n \geq 0.999$$

即要使

$$0.1^n \leq 0.001$$

不等式两边取对数得

$$n \geq \frac{\ln 0.001}{\ln 0.1} = 3$$

所以最少需要发射 3 枚导弹才能保证至少有一枚导弹击中敌机的概率大于 0.999。

姓名 _____

学号 _____

班级 _____

第 1 章 随机事件及其概率 作业 1

1. 已知 A, B, C 为三个随机事件, 试用 A, B, C 表示下列事件:

- (1) A, B, C 都发生 _____ ; (2) A, B, C 都不发生 _____ ;
(3) A, B, C 不都发生 _____ ; (4) A, B, C 至少发生一件 _____ ;
(5) A, B, C 最多发生一件 _____ 。

2. 已知样本空间为 $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 记事件 $A = \{x | 1 < x \leq 2\}$, 事件 $B = \{x | 1.5 \leq x < 2.5\}$, 试写出下列事件:

- (1) $\overline{AB} =$ _____ ; (2) $A \cup \overline{B} =$ _____ ;
(3) $\overline{A\overline{B}} =$ _____ ; (4) $\overline{A \cup B} =$ _____ 。

3. 袋子中装有 6 个白球和 4 个黑球, 从中任取两球, 求这两个球一个是白球一个是黑球的概率。

4. 把三封不同的信件放到五个空着的信箱中去, 求三封信件在不同信箱中的概率。

5. 把长度为 a 的木棒任意折成两段, 求它们的长度之差不超过 $\frac{a}{2}$ 的概率。

6. 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头,它们在一昼夜内到达的时间是等可能的。如果甲船的停泊时间是一小时,乙船的停泊时间是两小时,求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率。

7. 在 1~50 共 50 个数中任取一个数,求这个数能被 2 或 3 或 5 整除的概率。

8. 随机掷两粒骰子,求点数之和不超过 5 的概率。

姓名 _____

学号 _____

班级 _____

第 1 章 随机事件及其概率 作业 2

1. 袋中装有 3 个白球和 2 个黑球, 从中一个一个将球取出, 取出后不放回, 求第三次才取到黑球的概率。
2. 某工厂有三台机器同时生产日光灯, 已知第二台机器的产量是第一台机器产量的 3 倍, 第三台机器的产量是第一台机器产量的 4 倍, 而第一、二、三台机器产品次品率分别为 0.05, 0.04, 0.03, 现在从三台机器生产的日光灯中任取一只, 求它是次品的概率。
3. 甲盒中有 3 个白球和 3 个黑球, 乙盒中有 3 个白球。从甲盒中任取 2 个球放入乙盒中, 再从乙盒中任取 2 个球, 求从乙盒中取到的 2 个球中恰有一个是黑球的概率。
4. 临床诊断记录表明, 利用某种试验检查癌症具有如下效果: 对癌症患者进行试验结果呈阳性反应者占 95%, 对非癌症患者进行试验结果呈阴性反应者占 96%。现在用这种试验对某城市居民进行癌症普查, 如果该市癌症患者数约占居民总数的 4%, 求: (1) 试验结果呈阳性反应的被检查者确实患有癌症的概率; (2) 试验结果呈阴性反应的被检查者确实未患有癌症的概率。

5. 甲乙两人独立地对同一目标进行射击各一次, 击中的概率分别为 0.6 和 0.8, 现在已知目标被击中, 求它是甲击中的概率。

6. 生产某种工艺品需要三道工序, 设第一、二、三道工序成为次品的概率分别为 0.03, 0.02, 0.05。假定各道工序是互不影响的, 求生产出来的工艺品是次品的概率。

7. 如图 1-3 所示, 构成系统的电子元件的可靠性都是 $p(0 < p < 1)$, 且各个元件能否正常工作是相互独立的, 求下列两个系统的可靠性:

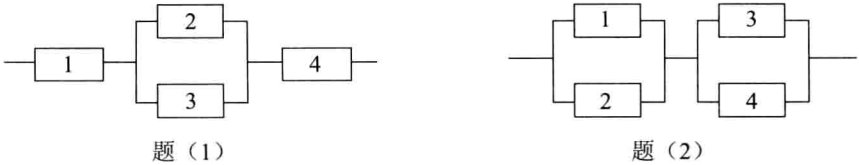


图 1-3 电子元件的可靠性

8. 某射手对同一目标进行五次独立射击, 每次击中的概率为 0.8, 求至少击中两次的概率。

第 2 章 随机变量及其分布

2.1 基本知识点

1. 随机变量的概念与分类

(1) 概念 随机变量 $X = X(\omega)$ 是样本点 ω 的实值函数, 其定义域是样本空间 Ω , 值域为实数集 \mathbf{R} 。

(2) 分类

- 1) 离散型随机变量: 随机变量的取值为有限或可数无穷多。
- 2) 非离散型随机变量: 不是离散型的随机变量。

2. 分布函数

(1) 定义 随机变量 X 的分布函数定义为: $F(x) = P(X \leq x)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$ 。

(2) 性质

- 1) 有界性: $0 \leq F(x) \leq 1$, 且 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ 。
- 2) 单调性: 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $F(x_1) \leq F(x_2)$ 。
- 3) 右连续性: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ 。

(3) 利用分布函数求事件的概率

- 1) $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ 。
- 2) $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$ 。

3. 离散型随机变量的概率分布

(1) 概率函数

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

(2) 概率分布表

X	x_1	x_2	\dots	x_n	\dots
$p(x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n	\dots

(3) 性质

- 1) 有界性: $0 \leq p(x_i) \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ 。
- 2) 归一性: $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$ 。

4. 连续型随机变量的概率密度函数

(1) 定义

1) 定义 1: 随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 若存在非负可积函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

则称 X 为连续型随机变量, 函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称为概率密度。

2) 定义 2: 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ 存在, 则称该极限为随机变量 X 在 x 点处的概率密度, 记为 $f(x)$, 即

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

(2) 性质

1) 非负性: $f(x) \geq 0$ 。

2) 归一性: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ 。

(3) 利用概率密度函数求事件的概率

1) $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ 。

2) $P(X = x_0) = 0$ 。

(4) 分布函数与概率密度函数的关系

1) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ 。

2) 若 $F(x)$ 在 x 点处可导, 则 $f(x) = F'(x)$; 若 $F(x)$ 在 x 点处不可导, 习惯上定义其在 x 点处的导数值为零。

5. 常用分布

(1) 几何分布 若随机变量 $X \sim G(p)$, 则其概率函数为

$$p(x) = P(X=x) = p(1-p)^{x-1} \quad x=1, 2, \dots, n, \text{ 其中 } 0 < p < 1$$

(2) 超几何分布 若随机变量 $X \sim H(n, M, N)$, 则其概率函数为

$$p(x) = P(X=x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \quad x=0, 1, \dots, n$$

(3) 二项分布 若随机变量 $X \sim B(n, p)$, 则其概率函数为

$$p(x) = P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x=0, 1, \dots, n, \text{ 其中 } 0 < p < 1$$

(4) 泊松分布 若随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 则其概率函数为

$$p(x) = P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x=0, 1, 2, \dots, n, \text{ 其中 } \lambda > 0 \text{ 为常数}$$

(5) 均匀分布 若随机变量 $X \sim U(a, b)$, 则其概率密度函数和分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a \text{ 或 } x > b \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

(6) 指数分布 若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 则其概率密度函数和分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{其中 } \lambda > 0 \text{ 为常数}$$

(7) 正态分布 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则其概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbf{R}$$

并且有

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

6. 随机变量函数的分布

(1) 离散型随机变量函数的分布 若 $Y = g(X)$, 则在 X 的概率分布表上方添加一行, 在该行计算出 Y 的取值如下

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$...	$g(x_n)$...
X	x_1	x_2	...	x_n	...
$p_X(x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	...

然后将函数值 $g(x_i)$ 相同的进行合并, 并将其相应概率相加即可。

(2) 连续型随机变量函数的分布

1) 一般情况 若 $Y = g(X)$, 则 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) \leq y] = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$$

从而可得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

2) 若 $y = g(x)$ 为单调函数, 其反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导函数, 则 $Y = g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] | [g^{-1}(y)]' |$$

3) 重要结论

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则随机变量 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ 。

2.2 基本要求

1) 理解随机变量的概念, 掌握随机变量分布函数 $[F(x) = P(X \leq x)]$ 的概念及性质, 会用分布函数计算相关事件的概率。

2) 掌握离散型随机变量的分布律及其性质, 会用分布律计算相关事件的概率。

3) 掌握连续型随机变量的概率密度函数及其性质, 会用概率分布计算相关事件的概率。

4) 掌握几何分布、超几何分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布。

5) 会求简单一维随机变量函数的概率分布。

2.3 典型例题分析

例 1 从 1, 2, 3, 4 中任取两个数, 设取到的最小号码为 X , 求 (1) X 的概率分布; (2) X 的分布函数; (3) $Y = 2X^2 - 1$ 的概率分布。

解: (1) 由题意可知 X 的可能取值为 1, 2, 3, 而

$$P(X=1) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_4^2} = \frac{1}{2} \quad P(X=2) = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{1}{3} \quad P(X=3) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$$