



探真题之本源 传应考之方略

考研数学 真题王

考点大全+16年真题详解
(数学三)

全国硕士研究生入学统一考试命题研究中心 编著

考点全覆盖

——◆ 82 个知识要点深入剖析，重点难点疑点完全解读

命题全解密

——◆ 79 种必考题型独家梳理，易错易混知识完全解剖

考场大练兵

——◆ 16 年全套真卷实战演练，解题技巧倾囊相授

赠 考研数学复习大全

(囊括：应试指南、考点清单、题型精讲、真题详解……)

下载地址: [http://www.eduexam.cn/RuanJian/Math2015\(3\).exe](http://www.eduexam.cn/RuanJian/Math2015(3).exe)

 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

2018 年全国硕士研究生招生考试

考研数学

真题王

数学一、二、三

（第2版）

中国海洋大学出版社

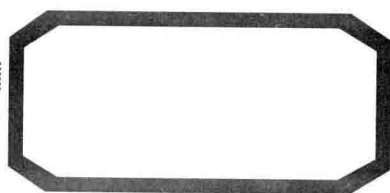
本书收录了2001年至2017年全国硕士研究生招生考试数学一、二、三真题，旨在帮助考生了解考试命题规律，掌握解题方法，提高应试能力。本书可作为考生备考的参考用书，也可作为教师的教学参考书。



中国海洋大学出版社



探 真



传 应 考 之 方 略

考研数学 真题王

考点大全+16年真题详解
(数学三)

全国硕士研究生入学统一考试命题研究中心 编著

人 民 邮 电 出 版 社

北 京

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题王: 考点大全+16年真题详解. 数学三/
全国硕士研究生入学统一考试命题研究中心编著. — 北
京: 人民邮电出版社, 2014. 8
ISBN 978-7-115-35886-8

I. ①考… II. ①全… III. ①高等数学—研究生—入
学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第125717号

内 容 提 要

为了帮助广大考生有效备考实战, 全国硕士研究生入学统一考试命题研究中心组织来自国内九所高校的命题研究
人员, 精心策划、编写了本书。

本书共分上、下两篇。上篇为考点知识归纳及真题透析, 主要分为三部分: 第一部分为微积分, 第二部分为线性
代数, 第三部分为概率论与数理统计。每一部分都包含考情分析、大纲考点串讲与归纳、历年真题分类详解与演练三
大模块。“考情分析”模块以章节为出发点, 逐一分析各章节知识点在历年真题中考核的平均概率、考核题型和分布数
量以及重点考查的知识点, 并附有近 16 年考点重要程度分级表; “大纲考点串讲与归纳”模块重点提取教材中主要涉
及的大纲考点, 供考生及时复习与巩固; “历年真题分类详解与演练”模块把所有真题按照考试大纲的顺序分题型归纳总
结, 每道题的解题步骤都有重要知识点注释, 便于考生理解试题解析、把握考查重点, 从而让考生在复习时明确目标,
做到心中有数。此外, 每类题型基本皆归纳了该题分析思路、方法与技巧, 并附有强化练习。

下篇为 16 年真题套卷, 即罗列了 1999~2014 年考研数学三的真考试卷, 并提供了相应参考答案及详细解析。

本书最后附有强化练习的详细参考答案, 供考生参考。

-
- ◆ 编 著 全国硕士研究生入学统一考试命题研究中心
责任编辑 李 莎
责任印制 杨林杰
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
三河市海波印务有限公司印刷
 - ◆ 开本: 880×1230 1/16
印张: 25.75 2014 年 8 月第 1 版
字数: 766 千字 2014 年 8 月河北第 1 次印刷
-

定价: 49.00 元

读者服务热线: (010)81055410 印装质量热线: (010)81055316
反盗版热线: (010)81055315

本书编委会



排名不分先后,以姓氏笔画为序

王文强	湘潭大学数学与计算科学学院	教授/硕士生导师
田波平	哈尔滨工业大学理学院数学系	教授/博士生导师
卢慧芳	上海财经大学数学学院	副教授/硕士生导师
运怀立	天津财经大学珠江学院	教授
杨益民	北京工商大学理学院数学系	教授
罗振东	华北电力大学数理学院	教授/博士生导师
徐守军	兰州大学数学与统计学院	副教授
高旅端	北京工业大学应用数理学院	教授
彭名书	北京交通大学理学院数学系	教授/博士生导师

考研数学真题是考研复习过程中的重要复习资料,蕴含着指导考研数学复习的重要信息,历来备受辅导专家的推崇和考生的重视,是任何练习题、模拟题都无法比拟的。

历年来,硕士研究生入学考试数学各科目考点基本没有什么大的变化,重难点比重分配也较稳定。只要牢牢把握好这些重难点,反复推敲,勤于琢磨,就会事半功倍。真题便是考生最好的“老师”,它最能够暴露复习缺点和不足之处,也能提供便捷有效的复习思路。



真题编写特点

1. 全面性

真题是涵盖大纲指定内容最全面的试卷。一份试卷,看上去内容不多,但是大纲要求重点考查的内容基本都有包含。

2. 方向性

真题是考研复习的风向标,考点的比重和考核要点都有很强的延续性,是研究出题角度和出题思路最佳的参考资料。

3. 接近性

考研数学试题难度要求以中等偏上为主,考试及格率控制在 30%~40%,真题的难度控制是任何模拟题都无法比拟的。

4. 权威性

真题是许多专家精心设计的,每道题目都是经过专家深思熟虑、反复论证才最终呈现在考生面前。

从题目质量看,相信没有任何的辅导书或者模拟题在权威性上能够超越真题。

本书汇集了 1999~2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题,而且对所有试题均给出了详细解答,并尽量做出一题多解,有不少解法独到精辟,可大大节省考生的宝贵时间。

同时,在每道真题后给出了分析、评注与名师指导,使考生能举一反三,触类旁通。



本书内容特色

1. 命题分析与复习指南

本模块主要以考试简介、命题趋势、考点分析与点拨、解题技巧、本书导读、真题解析中的考点知识链接六大要点对考试中考生可能关心的种种情形做了详细的讲解,目的是使考生清楚考试情况以及如何以最优效率解决答题中的各种难点、疑点。

2. 上篇 考点知识归纳及真题透析

此篇主要分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分,每一部分的每一章节主要由考情分析、大纲考点串讲与归纳、历年真题分类详解与演练三个模块组成,不仅对每一章节的考点情况进行了详细分析,对大纲中涉及的知识点也做了系统的概述,以巩固考生对知识点的记忆,加深理解,从而为更好地解析真题打下基础。而后,便是真题的分类解析与强化练习。

3. 下篇 16 年真题套卷

此篇是 1999~2014 年 16 年真题套卷,并附有参考答案速解;2013、2014 年真题单独列出,并且配有详细的答案解析。

此外,本书最后配有强化练习的详细解答,以供考生参考。

■ 本书使用建议 ■

建议考生在使用本书时,不要一蹴而就或就题论题,而应该先阅读一遍相关知识点,然后自己动手做题,勤思考,多动脑,总结在做题过程中的种种技巧与方法,而后再与本书的各种解法做比较。对于答错的题目,可以做上标记,反复琢磨或与老师、同学进行研讨。建议考生将本书全部真题做2~3遍,直到能够见到每一题型,就可立刻在脑海中回忆起它的解题思路,并能够正确的解答。

本书由王文强、田波平、卢慧芳、运怀立、杨益民、罗振东、徐守军、高旅端和彭名书等著名理工科高等院校教授联合编写而成。在编写的过程中,诸位教授付出了辛勤的汗水,亦对书稿后期完善工作给予了莫大的支持与指导,在此我们表示衷心的感谢。

本书在编写过程中,难免会有许多不足之处,敬请广大读者和专家同行批评指正。本书责任编辑的电子邮箱为:lisha@ptpress.com.cn。

最后祝芸芸考生复习顺利,考研成功!

编者

2014年5月

命题分析与复习指南

众所周知,考研数学真题是考研复习过程中的重要复习资料,历来备受考研辅导专家的推崇和考研学子的重视,蕴含着指导考研数学复习的重要信息。为此我们组织十余位考研数学权威专家,对每一道考研数学历年真题进行深入分析、挖掘,总结出每一道真题考查的知识点,通过分类统计汇总出权威科学的考研数学真题分析数据。下面将结合分析数据系统介绍考研数学三的命题思路,以及如何结合本书的内容进行高效、系统的复习。

一、考试简介

根据工学、经济学、管理学各学科、专业对硕士研究生入学所应具备数学知识和能力的不同要求,硕士研究生入学统考数学试卷分为3种,其中针对工学门类的为数学一、数学二,针对经济学和管理学门类的为数学三。

考研数学三主要分为微积分、线性代数和概率论与数理统计三个科目,历年考试时间基本在1月7日左右,考试题型主要以填空题、选择题和解答题三个模块呈现。

二、命题趋势

2014年考研数学三微积分考试比例占54.67%,线性代数占22.67%,概率论与数理统计占22.66%,与2013年相同,依旧没有变化。

事实上考研数学主要是考基础,包括基本概念、基本公式、基本定理以及解题基本方法。从近10年考研数学真题来看,试卷中80%的题目都是基础题,真正需要冥思苦想的偏题、难题只是少数。下面分别予以介绍:

1. 微积分。微积分是考查的重点,正所谓“得微分者得天下”。复习微积分主要从三点出发:第一,夯实基础,把握重点;第二,勤动脑,多动手,保证做题量;第三,重视总结、归纳解题思路、方法和技巧。考生着眼点要放在极限、导数、不定积分这三方面,当然还有定积分、一元函数微积分学的应用、中值定理等,这些内容可以看成是前三部分内容的應用。

2. 线性代数。相对微积分来说,线性代数是比較简单的学科,但是考生的得分不是很理想。这主要是没有掌握住线性代数的特点:内容抽象;概念多,性质多;内容纵横交错,前后联系紧密,相互渗透。针对线性代数的这些特点,建议2015年的考生在复习中综合掌握一条主线、两种运算、三个工具。这条主线就是解线性方程组。线性方程组是线性代数的主线,也是考试的重点。在求解线性方程组时主要涉及两种运算:求行列式、矩阵的初等行(列)变换。要把握行列式与矩阵之间的区别和联系,在进行运算的过程中保证计算的准确和速度。三个工具就是行列式、矩阵、向量,它们贯穿整个线性代数的始终。

3. 概率论与数理统计可分为概率和数理统计两部分。在考研中,概率的重点考查对象在于随机变量及其分布和随机变量的数字特征。在学习时要明确重点,对于不太重要的内容,如古典概型与几何概型,只要掌握一些简单的概率计算即可,不需要投入太多精力。数理统计考查的重点则在于与抽样分布相关的统计量的分布及其数字特征。从历年试题看,概率论与数理统计这部分内容考查单一知识点比较少,大多数试题是考查考生的理解能力和综合应用能力,考生要能够灵活地运用所学的知识,建立起正确的概率模型。

三、考点分析与点拨

1. 科目分析是分析考研数学历年真题中微积分、线性代数和概率论与数理统计三个科目试题所占的分值比例(见下表)。从表中分析数据中不难看出,这三个科目在考研数学三中所占的分值比例大致稳定,近几年微积分所占的分值比例有所上升。通过数据汇总,希望为考生在三个科目中合理分配复习时



续表

年 份	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	平均值
4.5 二元函数极值	2.40%	3.00%	0.00%	0.00%	7.20%	0.00%	0.00%	1.60%	0.00%	0.00%	3.60%	3.33%	4.00%	1.33%	4.00%	1.33%	1.99%
4.6 二重积分	8.00%	4.80%	4.80%	3.00%	6.13%	4.27%	5.73%	3.73%	7.07%	10.13%	5.33%	5.33%	6.67%	9.33%	6.67%	9.33%	6.27%
第5章 无穷级数	3.00%	4.20%	4.90%	7.90%	3.87%	6.87%	8.07%	9.33%	6.67%	5.33%	2.67%	0.00%	2.67%	2.67%	2.67%	2.67%	4.60%
5.1 无穷级数概念性质	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.80%	0.80%	0.80%	1.60%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.67%	0.00%	2.67%	0.00%	0.59%
5.2 正项级数及敛散性判别	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.87%	1.87%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.87%	0.00%	1.87%	0.47%
5.3 交错级数及敛散性判别	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.67%	2.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.13%
5.4 任意项级数及其他绝对收敛	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.87%	0.00%	0.00%	1.07%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.80%	0.00%	0.80%	0.29%
5.5 幂级数	3.00%	4.20%	4.90%	7.90%	1.20%	4.20%	5.40%	4.00%	4.00%	5.33%	2.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.92%
第6章 常微分方程与差分方程	3.60%	4.80%	5.10%	2.10%	4.80%	1.80%	2.13%	6.40%	2.67%	4.00%	5.33%	3.47%	0.00%	3.33%	0.00%	3.33%	3.31%
6.1 常微分方程概念	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
6.2 一阶微分方程类型及其解法	3.60%	0.00%	2.10%	0.00%	4.80%	1.80%	2.13%	6.40%	2.67%	2.67%	5.33%	3.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.19%
6.3 二阶线性微分方程	0.00%	4.80%	0.00%	2.10%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.33%	0.00%	3.33%	0.85%
6.4 差分方程基本概念	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.27%
6.5 一阶常系数差分方程	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

首先是函数与极限,求极限是一个基本计算题型,每年必考,考生一定要对各种常考极限的求解方法熟练掌握和运用。此部分无穷小的阶也是一个常考点,考生要特别重视。另外,还有一个高频考点:函数间断点及其类型,此考点在出题时有一定的固定套路,考生要会总结。

对于一元函数微积分,首要的一个考点便是导数的定义,近几年选择题必然考一道利用导数定义求解的题。大家还需要特别注意复合函数在某一点的导数求法。微分中值定理就可以结合闭区间上连续函数的性质出证明题,考生需要掌握几种常规解题思路。一元函数积分学有一个重要考点是变限积分,它的连续性、可导性,考生需要研究透彻。还有定积分应用,求平面图形的面积,求旋转体的体积等。

然后是多元函数微积分部分,考生要重点掌握多元函数的连续性,多元函数求偏导数,多元函数可微的判断,以及三者之间的三角关系。多元函数极值的求法也非常重要。对于多元函数积分部分,数学三的考生只需要掌握二重积分,特别是分段函数的二重积分是一个重难点。

最后是微分方程与级数,考生需要重点掌握几类常见微分方程的解法,并注意与其他知识点出综合题的可能性。对于无穷级数部分,考生要重点复习数项级数的收敛与发散判别法,还有幂级数的收敛区间、收敛域的求法,另外,幂级数的求和与展开是一个难点。

表3 线性代数考点分值比例分析表

年 份	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	平均值
第1章 行列式	3.60%	0.30%	1.80%	0.00%	1.13%	2.00%	2.13%	1.93%	0.53%	2.93%	2.20%	4.60%	0.00%	3.27%	0.00%	3.27%	1.86%
1.1 行列式的定义与性质	1.80%	0.00%	0.90%	0.00%	0.27%	0.87%	0.00%	0.00%	0.27%	1.60%	0.73%	0.73%	0.00%	1.07%	0.00%	1.07%	0.58%
1.2 行列式的展开定理	1.80%	0.00%	0.90%	0.00%	0.87%	0.87%	2.13%	1.40%	0.27%	1.07%	1.47%	1.73%	0.00%	2.20%	0.00%	2.20%	1.06%
1.3 几种特殊行列式的值	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
1.4 有关行列式若干个重要公式	0.00%	0.30%	0.00%	0.00%	0.00%	0.27%	0.00%	0.53%	0.00%	0.27%	0.00%	2.13%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.22%
第2章 矩阵	5.60%	2.00%	8.50%	4.00%	5.90%	4.00%	9.07%	9.47%	0.80%	5.07%	0.60%	1.00%	8.53%	7.20%	8.53%	7.20%	5.46%
2.1 矩阵的概念与线性运算	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2.2 矩阵的其他运算	5.60%	1.20%	3.40%	2.40%	2.67%	0.00%	1.33%	6.07%	2.07%	3.87%	4.47%	0.27%	0.73%	4.27%	0.73%	4.27%	2.71%
2.3 矩阵的秩	0.00%	0.00%	1.80%	0.60%	1.87%	1.60%	0.00%	0.00%	1.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.20%	0.00%	2.20%	0.72%
2.4 分块矩阵	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	5.20%	0.00%	0.00%	0.00%	1.60%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.43%
2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵	0.00%	0.80%	3.30%	1.60%	1.40%	2.73%	2.53%	3.40%	3.53%	0.00%	0.73%	0.73%	7.80%	0.73%	7.80%	0.73%	2.36%
第3章 n 维向量与向量空间	3.00%	4.00%	0.00%	2.70%	2.67%	3.47%	3.20%	7.87%	1.33%	2.87%	2.20%	2.67%	1.47%	2.13%	1.47%	2.13%	2.70%
3.1 n 维向量的概念及其运算	3.00%	1.60%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.27%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.80%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.36%
3.2 向量组的线性相关性	0.00%	2.40%	0.00%	2.70%	2.67%	3.47%	2.13%	4.40%	1.33%	2.67%	2.20%	1.87%	1.47%	2.13%	1.47%	2.13%	2.06%
3.3 极大无关组与向量组的秩	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.80%	3.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.27%
3.4 内积与施密特正交定理	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
第4章 线性方程组	0.00%	11.60%	4.80%	8.80%	6.93%	7.07%	6.93%	0.00%	5.67%	5.60%	2.20%	5.67%	2.67%	4.40%	2.67%	4.40%	4.97%
4.1 线性方程组的四种表现形式	0.00%	0.00%	0.60%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.04%
4.2 线性方程组有解判别条件	0.00%	6.40%	4.20%	5.60%	3.47%	5.13%	5.20%	0.00%	0.00%	5.60%	0.00%	3.67%	0.00%	1.47%	0.00%	1.47%	2.64%
4.3 线性齐次方程组解的结构	0.00%	2.70%	0.00%	3.20%	3.47%	1.93%	1.73%	0.00%	5.87%	0.00%	1.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.28%
4.4 线性非齐次方程组 $AX=b$ 解的结构	0.00%	2.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.73%	2.20%	2.67%	2.93%	2.67%	2.93%	2.93%	1.04%
第5章 矩阵特征值与特征向量	10.00%	2.70%	4.50%	5.70%	4.33%	6.07%	0.53%	6.07%	6.93%	6.00%	5.60%	8.53%	7.33%	2.20%	7.33%	2.20%	5.37%
5.1 特征值与特征向量	7.60%	0.90%	0.90%	1.90%	4.33%	3.47%	0.53%	2.60%	2.93%	5.47%	4.53%	2.80%	3.67%	2.20%	3.67%	2.20%	3.33%
5.2 矩阵的相似	1.20%	1.20%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.07%	0.00%	0.53%	0.80%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.30%
5.3 矩阵的相似对角化问题	1.20%	0.60%	0.00%	0.00%	0.00%	1.73%	0.00%	0.00%	0.00%	0.27%	0.53%	1.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.36%



续表

年 份	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	平均值
3.4 二项常见分布	0.00%	0.00%	1.60%	0.00%	0.00%	0.00%	0.87%	0.27%	0.80%	0.00%	0.00%	1.47%	1.27%	1.07%	1.27%	1.07%	0.61%
3.5 函数的分布	2.10%	0.00%	2.40%	0.00%	0.00%	0.00%	1.40%	0.80%	1.47%	1.07%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.58%
第4章 随机变量的数字特征	9.30%	11.20%	7.40%	11.30%	3.07%	3.67%	5.47%	7.07%	6.87%	4.67%	0.60%	7.80%	7.47%	8.07%	7.47%	8.07%	6.84%
4.1 数学期望与函数期望	2.40%	5.10%	0.30%	3.30%	0.00%	0.00%	0.00%	4.00%	0.73%	0.73%	0.53%	3.80%	2.53%	3.67%	2.53%	3.67%	2.09%
4.2 方差、协方差和矩	5.10%	6.10%	2.90%	7.70%	0.93%	3.67%	5.47%	2.53%	6.13%	2.00%	0.27%	4.00%	3.07%	4.40%	3.07%	4.40%	3.86%
4.3 相关系数	1.80%	0.00%	2.40%	0.30%	2.13%	0.00%	0.00%	0.53%	0.00%	2.13%	0.00%	0.00%	1.87%	0.00%	1.87%	0.00%	0.82%
4.4 切比雪夫不等式	0.00%	0.00%	1.80%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.11%
第5章 大数定律与中心极限定理	0.00%	0.00%	6.40%	0.00%	2.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.52%
5.1 基本概念	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
5.2 大数定律	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.12%
5.3 中心极限定理	0.00%	0.00%	6.40%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.40%
第6章 数理统计	3.50%	0.00%	1.80%	1.80%	0.00%	1.87%	2.13%	1.07%	0.00%	3.67%	1.33%	0.00%	0.00%	1.60%	0.00%	1.60%	1.27%
6.1 基本概念	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.09%
6.2 统计分布与抽样分布定理	3.50%	0.00%	1.80%	1.80%	0.00%	1.87%	2.13%	1.07%	0.00%	3.67%	0.00%	0.00%	0.00%	1.60%	0.00%	1.60%	1.13%
第7章 参数估计	0.00%	3.20%	0.00%	1.80%	0.00%	0.93%	2.60%	6.93%	0.73%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.02%
7.1 矩估计法	0.00%	0.00%	0.00%	1.80%	0.00%	3.47%	2.60%	3.47%	0.73%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.75%
7.2 最大似然估计法	0.00%	3.20%	0.00%	0.00%	0.00%	3.47%	0.00%	3.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.63%

第1章、第2章是基础,很少单独命题,常结合后面章节进行考查,即使如此,这两章内容也要深刻了解,以便后面内容更容易把握。

多维随机变量及其分布要重点掌握二维随机变量的概率分布、边缘分布、条件分布、独立性等概念,要把定义和对应计算公式掌握得很熟练。难点是多维随机变量的函数的分布,此考点最近每年必考,并且主要以大题的形式出现,虽是难点,但是方法还是较为固定,要牢固掌握每种题型的解题方法。

对于数字特征章节,要重点复习数学期望,方差,协方差,相关系数等数字特征的概念及计算公式,这几个概念每年必考,并且主要以计算为主。

大数定律和中心极限定理不是考试的重点,考纲的要求是了解,所以掌握定理的条件和结论即可。

统计部分的内容是考生复习的难点,一直以来得分率不高,实际上这部分内容相对题型很固定,皆是基本定义和定理的推导,复习的重点是弄清三大分布的典型模式,几个统计量的分布。点估计是重点难点,经常会考解答题。统计量的评选标准中的无偏估计要重点复习,有效性和相合性了解即可。区间估计和假设检验常年考的较少,了解一下即可。

四、解题技巧

2014年全国硕士研究生入学统一考试数学试卷题型及分值分布:选择题8个,每个4分,共32分;填空题6个,每个4分,共24分;解答题9个,共94分。满分150分。下面就各种题型分别予以介绍。

对于四选一的选择题,其中三个都是干扰项,只有一个是正确选项。选择题有多种解题方法,常用的方法如下。①推演法:从题设条件出发,按惯常思维运用有关的概念、性质、定理等,经过直接的推理、演算,得出正确结论。②图示法:是指根据条件作出所研究问题的几何图形,然后借助几何图形的直观性,“看”出正确选项。③赋值法:是指用满足条件的“特殊值”,包括数值、矩阵、函数以及几何图形,通过推理演算,得出正确选项。④排除法:从题设条件出发,或利用推演法排错,或利用赋值法排错,从而得出正确结论。⑤逆推法:将备选项依次代入题设条件的方法。如果各种方法都不奏效,鼓励考生猜测选项。选择题属客观题,答案是唯一正确的。对于考生来说,会做的题目靠扎实的知识得分,不会做的只能靠自身的运气。选择题的难度一般适中,以2014年试卷为例,其中的选择题都是中等难度,没有特别难的题目,也没有一眼就能看出答案的题目。选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解,要求考生能进行简单的推理、判定、计算和比较。这一部分的32分需要考生在复习的时候深入思考,并要不完全依赖臆想,而要思考与动手相结合才能稳拿。

填空题的答案是确定和唯一的,只填出最终结果,不需给出推导计算过程,答对得满分,答错得0分。这部分题目一般需要进行有一定技巧的计算,但不会有太复杂的计算题。题目难度与选择题不相上下,即难度适中。方法只有一个:认真审题,高效率计算。填空题总共只有6个,微积分(4个)、线性代数(1



命题分析与复习指南

- 一、考试简介 / I
- 二、命题趋势 / I
- 三、考点分析与点拨 / I
- 四、解题技巧 / V
- 五、本书导读 / VI

上篇 考点知识归纳及真题透析

第一部分 微积分

第1章 函数、极限、连续 / 1

考情分析 / 1

大纲考点串讲与归纳 / 2

- 一、函数 / 2
- 二、极限 / 4
- 三、无穷小与无穷大 / 6
- 四、连续 / 7

历年真题分类详解与演练 / 8

- 题型一 函数性质的理解 / 8
- 题型二 无穷小比较 / 9
- 题型三 数列的极限 / 11
- 题型四 函数的极限 / 13
- 题型五 极限逆问题 / 21
- 题型六 连续逆问题 / 23
- 题型七 讨论函数间断点与间断点的类型 / 24
- 题型八 闭区间上连续函数命题的证明 / 25

第2章 一元函数微分学 / 27

考情分析 / 27

大纲考点串讲与归纳 / 28

- 一、导数 / 28
- 二、微分 / 29
- 三、微分中值定理 / 30
- 四、洛必达法则 / 32
- 五、函数及其性态的研究 / 32
- 六、导数在经济中的应用 / 35

历年真题分类详解与演练 / 35

- 题型一 导数与微分概念的理解 / 35
- 题型二 求隐函数的导数与微分 / 38
- 题型三 求高阶导数 / 39
- 题型四 导数几何意义的应用 / 40
- 题型五 函数形态的研究 / 41
- 题型六 有关中值定理命题的证明 / 47
- 题型七 证明代数不等式 / 53
- 题型八 导数在经济中的应用 / 54

第3章 一元函数积分学 / 57

考情分析 / 57

大纲考点串讲与归纳 / 57

一、不定积分 / 57

二、定积分 / 60

三、反常积分 / 64

历年真题分类详解与演练 / 65

- 题型一 概念、性质的理解 / 65
- 题型二 求不定积分 / 67
- 题型三 定积分的计算 / 69
- 题型四 变限积分的讨论 / 71
- 题型五 积分等式的证明 / 72
- 题型六 积分不等式的证明 / 73
- 题型七 定积分的应用 / 75
- 题型八 反常积分的计算 / 78

第4章 多元函数微积分学 / 80

考情分析 / 80

大纲考点串讲与归纳 / 81

- 一、多元函数的概念、极限与连续 / 81
- 二、偏导数 / 81
- 三、全微分 / 82
- 四、多元函数微分法 / 83
- 五、二元函数极值 / 84
- 六、二重积分 / 85

历年真题分类详解与演练 / 87

- 题型一 多元函数的偏导数与全微分 / 87
- 题型二 多元函数极值 / 94
- 题型三 交换积分次序 / 99
- 题型四 计算二重积分 / 100

第5章 无穷级数 / 116

考情分析 / 116

大纲考点串讲与归纳 / 116

- 一、无穷级数的概念及其性质 / 116
- 二、正项级数及其收敛性的判别法 / 117
- 三、任意项级数的绝对收敛与条件收敛 / 118
- 四、交错级数与莱布尼茨定理 / 119
- 五、幂级数 / 119

历年真题分类详解与演练 / 121

- 题型一 数项级数敛散性的判定 / 121
- 题型二 收敛半径、收敛区间、收敛域 / 124
- 题型三 幂级数求和 / 126
- 题型四 函数展开成幂级数 / 132

第6章 常微分方程与差分方程 / 133

考情分析 / 133

大纲考点串讲与归纳 / 133

- 一、常微分方程的基本概念 / 133
- 二、一阶微分方程的类型及其解法 / 134
- 三、二阶线性微分方程 / 134
- 四、差分与差分方程的基本概念 / 135
- 五、一阶常系数线性差分方程 / 136

历年真题分类详解与演练 / 137	
题型一 求解一阶微分方程 / 137	
题型二 一阶微分方程综合题 / 139	
题型三 线性微分方程解的结构定理 / 139	
题型四 二阶常系数线性微分方程 / 140	
题型五 微分方程的应用 / 142	
第二部分 线性代数	
第1章 行列式 / 145	
考情分析 / 145	
大纲考点串讲与归纳 / 145	
一、行列式的概念和基本性质 / 145	
二、行列式按行(列)展开定理 / 146	
三、有关行列式的若干个重要公式 / 147	
历年真题分类详解与演练 / 147	
题型 抽象行列式的计算 / 147	
第2章 矩阵 / 150	
考情分析 / 150	
大纲考点串讲与归纳 / 151	
一、矩阵的概念 / 151	
二、矩阵的运算 / 152	
三、矩阵的初等变换与初等矩阵 / 154	
四、矩阵的秩 / 156	
五、分块矩阵 / 157	
历年真题分类详解与演练 / 158	
题型一 有关逆矩阵的计算与证明题 / 158	
题型二 三阶数字矩阵的高次幂运算 / 159	
题型三 有关矩阵秩的命题 / 160	
题型四 初等变换与初等矩阵 / 162	
题型五 与伴随矩阵 A^* 有关的命题 / 164	
题型六 分块矩阵 / 165	
第3章 n 维向量与向量空间 / 167	
考情分析 / 167	
大纲考点串讲与归纳 / 167	
一、向量的概念及其线性运算 / 167	
二、向量的线性组合与线性表示 / 168	
三、向量组的线性相关性 / 168	
四、向量组的极大线性无关组与秩 / 169	
五、向量的内积与线性无关向量组的正交规范化 / 170	
历年真题分类详解与演练 / 171	
题型一 关于线性组合与线性表示的命题 / 171	
题型二 关于向量组的相关性的命题 / 175	
题型三 求向量组的秩与极大无关组 / 181	
第4章 线性方程组 / 183	
考情分析 / 183	
大纲考点串讲与归纳 / 183	
一、线性方程组的表示形式 / 183	
二、克拉默法则 / 184	
三、线性方程组有解判别条件 / 185	
四、线性齐次方程组解的结构 / 185	
五、线性非齐次方程组解的结构 / 186	
六、用初等行变换求解线性方程组 / 186	
历年真题分类详解与演练 / 187	
题型一 有关解的概念、性质、判别条件 / 187	
题型二 基础解系与通解 / 189	

题型三 公共解与同解 / 196	
题型四 综合解 / 198	
第5章 矩阵的特征值与特征向量 / 204	
考情分析 / 204	
大纲考点串讲与归纳 / 204	
一、特征值与特征向量 / 204	
二、相似矩阵 / 206	
三、矩阵的相似对角化 / 206	
四、实对称矩阵 / 207	
历年真题分类详解与演练 / 208	
题型一 求矩阵的特征值与特征向量 / 208	
题型二 关于相似及相似对角化问题 / 210	
题型三 求 A 中参数或反求 A / 211	
题型四 实对称矩阵 / 212	
第6章 二次型 / 221	
考情分析 / 221	
大纲考点串讲与归纳 / 221	
一、二次型及其矩阵表示 / 221	
二、合同变换与合同矩阵 / 222	
三、二次型标准与规范形 / 222	
四、二次型及其矩阵的正定性 / 224	
历年真题分类详解与演练 / 224	
题型一 二次型的基本概念与合同关系 / 224	
题型二 化二次型为标准型与惯性定理 / 228	
题型三 关于正定二次型 / 230	
题型四 综合解 / 233	
第三部分 概率论与数理统计	
第1章 随机事件与概率 / 236	
考情分析 / 236	
大纲考点串讲与归纳 / 237	
一、随机事件与样本空间 / 237	
二、概率及其基本性质 / 238	
三、概型 / 238	
四、条件概率 / 238	
五、事件的独立性 / 239	
历年真题分类详解与演练 / 240	
题型一 事件的关系、运算及等可能概型 / 240	
题型二 概率的基本性质 / 241	
题型三 关于条件概率的问题 / 242	
题型四 关于事件独立性的问题 / 243	
第2章 随机变量及其分布 / 245	
考情分析 / 245	
大纲考点串讲与归纳 / 245	
一、随机变量与分布函数 / 245	
二、离散型随机变量及其概率分布 / 246	
三、连续型随机变量及其概率密度 / 248	
四、随机变量函数的分布 / 249	
历年真题分类详解与演练 / 249	
题型一 分布列、密度函数、分布函数及概率计算 / 249	
题型二 常见分布 / 251	
题型三 随机变量函数的分布 / 253	
第3章 多维随机变量及其分布 / 257	
考情分析 / 257	
大纲考点串讲与归纳 / 257	



- 一、二维随机变量及其分布函数 / 257
- 二、二维离散型随机变量 / 258
- 三、二维连续型随机变量 / 259
- 四、随机变量的独立性和不相关性 / 260
- 五、常见二维随机变量的分布 / 260
- 六、二个随机变量的函数的分布 / 261

历年真题分类详解与演练 / 262

- 题型一 概率计算与独立性 / 262
- 题型二 联合分布与边缘分布 / 263
- 题型三 关于条件分布问题 / 266
- 题型四 关于函数分布问题 / 272
- 题型五 随机的函数分布 / 278

第4章 随机变量的数字特征 / 281

考情分析 / 281

大纲考点串讲与归纳 / 281

- 一、随机变量的数字特征 / 281
- 二、随机变量函数的数学期望 / 283
- 三、切比雪夫不等式 / 283

历年真题分类详解与演练 / 283

- 题型一 数学期望与函数期望的计算 / 283
- 题型二 方差与协差的计算 / 284
- 题型三 相关性与独立性 / 291
- 题型四 切比雪夫不等式 / 294

第5章 大数定律与中心极限定理 / 295

考情分析 / 295

大纲考点串讲与归纳 / 295

- 一、大数定律 / 295
- 二、中心极限定理 / 296

历年真题分类详解与演练 / 296

- 题型一 大数定律 / 296
- 题型二 中心极限定理 / 297

第6章 数理统计 / 299

考情分析 / 299

大纲考点串讲与归纳 / 299

- 一、基本概念 / 299
- 二、抽样分布 / 300
- 三、正态总体的常用抽样分布 / 301

历年真题分类详解与演练 / 302

- 题型 抽样分布 / 302

第7章 参数估计 / 306

考情分析 / 306

大纲考点串讲与归纳 / 306

- 一、基本概念 / 306
- 二、距估计法 / 306
- 三、最大似然估计法 / 306

历年真题分类详解与演练 / 307

- 题型 参数估计 / 307

下篇 16年真题套卷

1999年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 313

参考答案 / 315

2000年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 316

参考答案 / 318

2001年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 319

参考答案 / 321

2002年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 322

参考答案 / 324

2003年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 325

参考答案 / 327

2004年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 328

参考答案 / 331

2005年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 332

参考答案 / 334

2006年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 335

参考答案 / 337

2007年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 338

参考答案 / 340

2008年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 341

参考答案 / 343

2009年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 344

参考答案 / 347

2010年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 348

参考答案 / 350

2011年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 351

参考答案 / 353

2012年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 354

参考答案 / 356

2013年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 357

参考答案 / 359

2014年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题 / 364

参考答案 / 366

附录

强化练习参考答案及解析 / 371

上篇

考点知识归纳及真题透析

第一部分 微积分

Chapter 第1章

1 函数、极限、连续

■ 考情分析 ■

本章在微积分中历年平均值约占 15%，考题大致分布是：选择题 1～2 题、填空题约 1 题、解答题约 1 题。考点基本都是属于基础或中等难度题，考查的主要题型分别是函数性质的理解、无穷小、函数的极限（主要是 $0/0$ 型）、连续函数的证明或讨论、函数间断点的讨论与判定、极限逆问题等。考生只要牢固掌握基础知识点，吃透基本定义、性质、理论，把握重点，学会灵活应用，便可较容易拿下考分。

■ 考点重要程度分级表(根据近 16 年真题所涉考点统计)

一、函数	重要程度
(一) 函数的概念及表示法	★★★
(二) 函数的性质	★★★
(三) 复合函数、反函数、分段函数、隐函数和初等函数	★
二、极限	重要程度
(一) 极限的概念	★★
(二) 极限的性质	★★★
(三) 极限的运算法则	★★★★★
(四) 极限存在的两个准则	★★★
(五) 两个重要极限	★★★★★
三、无穷小与无穷大	重要程度
(一) 无穷小与无穷大的定义	★
(二) 无穷大与无穷小的关系	★
(三) 无穷小的性质	★★
(四) 无穷小与极限的关系	★★
(五) 无穷小的比较	★★★
(六) 等价无穷小的替换定理	★★★★★
四、连续	重要程度
(一) 函数的连续性	★★★★
(二) 连续函数的性质与初等函数的连续性	★★★

(三) 间断点及其分类	★★★★
(四) 闭区间上连续函数的性质	★★★★★

■ 大纲考点串讲与归纳 ■

一、函数

(一) 函数的概念及表示法

定义 1 设在某个过程中, 有两个变量 x 和 y , 对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值, 变量 y 按照某一个确定的规则总有相应的值与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 记为 $y = f(x)$ 。

表示函数的主要方法有三种: 解析法(公式法)、表格法、图形法。

(二) 函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在数 K , 使得 $f(x) \leq (\geq) K$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上(下)界, 而 K 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个上(下)界; 如果存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界。如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

名师点拨	(1) 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界。
	(2) 闭区间上的连续函数必定为有界函数。
	(3) 若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 存在极限, 则存在该点的一个去心邻域 $\dot{U}$, 在该邻域内 $f(x)$ 有界; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 任一个邻域内无界, 反之不成立。

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 内, 如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < (>) f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加(减少)。

名师点拨	判定函数 $f(x)$ 单调性的方法为: ① 简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定; ② 复杂的初等函数或可导的抽象函数, 用微分学的单调性判定定理来判定。
------	---

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个正数 T , 使得对任意的 $x \in D$, 有 $(x \pm T) \in D$, 且 $f(x + T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期。使得上式成立的最小正数 T , 称为 $f(x)$ 的最小正周期。

名师点拨	(1) 可导周期函数的导函数是同周期函数。
	(2) 连续周期函数的原函数不一定是周期函数。
	(3) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx.$

4. 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称, 如果对于任一 $x \in I$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数;



如果对于任一 $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数。

名师点拨	(1) 在直角坐标系中, 偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图形关于原点对称。
	(2) 可导奇函数的导函数是偶函数, 可导偶函数的导函数是奇函数, 且 $f'(0) = 0$ 。
	(3) 连续奇函数的原函数是偶函数, 连续偶函数的原函数仅有一个是奇函数。
	(4) 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$

(三) 复合函数、反函数、分段函数、隐函数和初等函数

1. 复合函数

定义 2 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 $\tilde{D}$, 值域为 $\tilde{R}$, 且 $\tilde{R} \subset D$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数, 它的定义域为 $\tilde{D}$, 变量 u 称为中间变量。

名师点拨	假设有关式 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知, 有以下两种情况。
	(1) 已知 f , 求 g : 相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}[\varphi(x)]$ 。
	(2) 已知 g , 求 f : 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$, 于是有 $f(u) = \varphi[g^{-1}(u)]$, 再根据函数关系与变量字母无关, 得 $f(x) = \varphi[g^{-1}(x)]$ 。

2. 反函数

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R 。若任意 $y \in R$, 有唯一确定的 $x \in D$, 使得 $y = f(x)$, 则记为 $x = f^{-1}(y)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数。

名师点拨	(1) 在同一直角坐标系中, $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合, $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。
	(2) 若函数 $y = f(x)$ 在 D 上单调, 值域为 R , 则在 R 上 $y = f(x)$ 存在单调的反函数。

3. 分段函数

定义 4 在定义域内的不同范围用不同表达式表示的函数叫分段函数。

名师点拨	常见的分段函数有:
	(1) 绝对值函数 $ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
	(2) 取整函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。
	(3) 符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

4. 隐函数

定义 5 如果在方程 $F(x, y) = 0$ 中, 当 x 取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这一方程的唯一的 y 值存在, 那么就说方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y = y(x)$ 。

5. 初等函数

定义 6 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数。

五类基本初等函数为:

$$\begin{aligned} y &= x^a; \\ y &= a^x (a > 0, a \neq 1); \\ y &= \log_a x (a > 0, a \neq 1); \\ y &= \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x; \\ y &= \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x. \end{aligned}$$

二、极限

(一) 极限的概念

定义 1 设 $\{x_n\}$ 为一数列, 如果存在常数 a , 对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立, 那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ 。

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ 。

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$ 。

(1) 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 中, $x \rightarrow x_0$ 指 x 从 x_0 左右两侧趋于 x_0 。如果 x 从 x_0 左侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^-$), 函数 $f(x)$ 与常数 A 无限接近, 则称 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 。同样, 如果 x 从 x_0 右侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^+$), 函数 $f(x)$ 与常数 A 无限接近, 则称 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 。

(2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 存在极限的充要条件是其左右极限都存在且相等。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = A$ 。

(二) 极限的性质

1. 唯一性

定理 1 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这个极限唯一。

2. 局部有界性

定理 2 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$ 。

3. 局部保号性

定理 3 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > (<) 0$, 则存在 x_0 的一个去心邻域, 在该邻域内恒有 $f(x) > (<) 0$ 。

推论 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq (\leq) 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq (\leq) 0$ 。

