数学模型与实验

主　编　王　涛　常思浩
副主编　薛　峰　章向明　陈代国

清华大学出版社

数学模型与实验

主　编　王　涛　常思浩
副主编　薛　峰　章向明　陈代国

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书详细介绍了数学建模的基本概念，以及各类数学模型的建立及求解方法。书中以微积分、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计为知识背景，用实际问题为载体，以数学软件为工具，将数学知识、数学建模与计算机应用三者有机结合，设计了初等模型与实验、微分方程模型与实验、最优化问题、概率统计模型、计算机模拟、军事数学建模精品案例、数学建模综合练习、MATLAB 入门、LINGO 软件及应用共 9 部分内容。每部分都配有相应的实验内容，旨在培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。本书选题典型，由浅入深，层次分明，结构严谨，叙述清晰，具有改革新意；同时，本书通俗易懂，趣味性强，便于自学。

本书可作为工科院校本科一、二年级学生的教材，也可供其他专业人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型与实验/王涛，常思浩主编.--北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-35911-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①王… ②常… Ⅲ.①数学模型—研究 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 061891 号

责任编辑：王剑乔
封面设计：傅瑞学
责任校对：袁 芳
责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：19 **字 数**：432 千字
版 次：2015 年 1 月第 1 版 **印 次**：2015 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～2000
定 价：38.00 元

产品编号：057743-01

本书编写人员

主　　编：王　涛　常思浩

副 主 编：薛　峰　章向明　陈代国

参编人员：王　涛　常思浩　薛　峰　章向明
陈代国　刘忠敏　叶奇睿　张建新

前言

FOREWORD

数学教育在整个人才培养过程中的重要性是人所共知的。从小学到大学，数学一直是一门主课，讲的、练的、考的往往是定义、定理、公式计算，不妨统称为“算数学”。对于将来要以数学为工具解决各种实际问题的学生来说，需要准确、快捷的计算和严密的逻辑推理，即要学好“算数学”。但是，面对一个实际问题时，在计算、推理之前，首先要用数学语言描述它，建立数学模型；在得到模型的解之后，要结合实际进行分析、检验、修正。我们将这些工作称为“用数学”。传统的数学教学体系和内容侧重于前者，对于后者的训练远远不够。学生在毕业后解决实际工作中的问题时，对复杂的研究对象不知如何简化，不知如何将研究对象抽象成一个简单的数学模型来反映客观现实；想象力差，分析问题、解决问题的能力比较低。因此，大学生毕业后适应社会需要好几年的时间。这种情况与当今社会的发展是极不适应的，应该尽快改变这种局面。

在清华大学萧树铁教授的倡导下，从1983年开始，在全国有关高校陆续开设了“数学模型”课程，并于1992年起每年在全国大学生中举行一次数学建模竞赛。本书编者积极响应萧树铁教授的倡导，于1994年起在学生中开设数学建模课程，在长达十多年的数学建模教学和对参加数学建模竞赛学生的培训中，对培养学生的想象力，增强学生观察问题、分析问题、解决问题的综合能力，做了不少尝试和探索，取得了一些经验和教训。

长期以来，内容多、负担重、枯燥无味、学生积极性不高一直困扰着大学数学教育，与此形成鲜明对照的是受大环境支配的“计算机热”。我们一直在尝试由学生自己动手，用他们熟悉、喜欢“玩”的计算机解决几个经过简化的实际问题，让他们亲身感受到用所学的数学知识解决实际问题的酸甜苦辣。“做，然后知不足”，在培养学生独立解决问题的同时，激发他们进一步学好数学的愿望，促成数学教学的良性循环。这就需要一部与之相适应的教材。目前我国的同类教材中，虽然精品不少，但大多是相对独立的，即数学模型是数学模型，数学实验是数学实验，较少有将两个方面结合起来的教材，这不能不说是一个遗憾。这不妨看做是我们编写这部教材的动机。

本教材是一个统一的整体，各部分之间又有相对的独立性，可以独立讲授。在内容方面，它详细而生动地介绍了许多领域的精彩应用实例。所涉及的领域有物理学、力学、工程学、生物学、医学、经济学、军事科学等。这些实例对于理、工、农、医、经济、管理等专业的学生和工程技术人员运用数学知识描述和解决各种实际问题，建立数学模型并求解，都是很有启发和帮助的。书中的数学模型可以作为数学建模选修课内容讲授，数学实验、综合案例及数学软件部分可以作为参加大学生数学建模竞赛的培训用书。全部内容安排 60 学时左右。如果减掉一些实验内容，30~40 学时也是可以的，由教师灵活掌握。

学习本书只需要一般的高等数学、工程数学、计算机语言等方面的知识。有些模型要用到其他方面的知识，我们尽可能先作简要介绍，帮助读者理解书中内容。凡涉及太深奥的数学知识的模型，本书不予采用。一本可用的教材，往往有两种写法：尽量多写一点，以便教师选择；或尽量少写一点，以便教师发挥。这本教材更偏于前者。原因在于这是一次尝试，对习惯于讲授传统“高等数学”的教师来说，需要有一个适应过程。

本书由王涛、常思浩任主编，薛峰、章向明、陈代国任副主编，参加编写的人员还有刘忠敏、叶奇睿、张建新。在本书编写过程中，参考和借鉴了许多专家和同行的相关著作和学术观点，引用了许多国内外典型数学模型和实验工具，由于篇幅所限，未能一一注明，在此特向有关作者表示感谢，遗漏之处，敬请谅解。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，盼望广大读者在使用过程中提出宝贵意见，以便在修订中改进和完善。

编　者

2014 年 10 月

CONTENTS

目录

CHAPTER 1

第1章

初等模型与实验

本章讨论用初等方法建立的几个数学模型。为解决实际问题而建立数学模型，可以采用各种各样的数学方法和工具，但应尽可能地采用简单的数学模型，着重于解决问题，方法应简单明了，容易被更多的人理解、接受和采用，这才更有价值。

1.1 公平的席位分配

某校有3个系共200名学生，其中甲系100名，乙系60名，丙系40名。若学代会设20个席位，公平而简单的办法是按学生人数的比例分配，三系分别占有10、6、4个席位。

现在丙系有6名学生各转入甲、乙两系3名，各系人数如表1-1第2列所示。按比例分配席位时，出现了小数(见表中第4列)。在将取得整数的19席分配完毕后，剩下的1席按照惯例分给余数最大的丙系，于是3个系仍分别占有10、6、4个席位，如表1-1所示。

表1-1 20个席位的分配结果

系别	学生人数	所占比例/%	按比例分配的席位	按惯例分配的席位
甲	103	51.5	10.3	10
乙	63	31.5	6.3	6
丙	34	17.0	3.4	4
总和	200	100.0	20.0	20

因为20个席位在表决时有可能出现10∶10的情况，学代会决定自下一届起增至21个席位，于是按照上述惯例重新分配席位。结果令人吃惊：总席位增加1席，丙系反而减少1席，如表1-2所示。

表1-2 21个席位的分配结果

系别	学生人数	所占比例/%	按比例分配的席位	按惯例分配的席位
甲	103	51.5	10.815	11
乙	63	31.5	6.615	7
丙	34	17.0	3.570	3
总和	200	100.0	21.0	21

要解决这个问题，必须舍弃所谓的“惯例”，找到衡量公平分配席位的指标，并由此建立新的分配方法。

1.1.1 建立数量指标

讨论 A、B 两方公平分配席位的情况。

设两方人数分别为 P_1 和 P_2，占有席位分别是 n_1 和 n_2，则两方每个席位代表的人数分别为 P_1/n_1 和 P_2/n_2。显然，仅当 $P_1/n_1=P_2/n_2$ 时，分配才是公平的。但是因为人数和席位都是整数，所以通常 $P_1/n_1\neq P_2/n_2$，这时席位分配不公平，并且 $P_i/n_i(i=1,2)$ 数值较大的一方吃亏，或者说，对这一方不公平。

不妨设 $P_1/n_1>P_2/n_2$，不公平程度可用 $P_1/n_1-P_2/n_2$ 衡量。如设 $P_1=120$，$P_2=100$，$n_1=n_2=10$，则 $P_1/n_1-P_2/n_2=12-10=2$。它衡量的是不公平的绝对程度，常常无法区分两种程度明显不同的不公平情况。例如，双方人数增加为 $P_1=1020$ 和 $P_2=1000$，而席位 n_1、n_2 不变，即 $n_1=n_2=10$，则 $P_1/n_1-P_2/n_2=12-10=2$，即绝对不公平程度不变。但是常识告诉我们，后面这种情况的不公平程度比起前面来已经大为改善。

为了改进上述绝对标准，自然想到引进相对标准。仍记 P_1 和 P_2 为两方的固定人数，n_1 和 n_2 为两方分配的席位数(可变)。若 $P_1/n_1>P_2/n_2$，定义

$$r_A(n_1,n_2)=\frac{P_1/n_1-P_2/n_2}{P_2/n_2} \tag{1-1}$$

为对 A 的相对不公平值。

若 $P_2/n_2>P_1/n_1$，定义

$$r_B(n_1,n_2)=\frac{P_2/n_2-P_1/n_1}{P_1/n_1} \tag{1-2}$$

为对 B 的相对不公平值。

这样，建立了衡量分配不公平程度的数量指标 r_A 和 r_B。制定席位分配方案的原则是使它们尽可能小。

1.1.2 确定分配方案

假设 A、B 两方已分别占有 n_1 和 n_2 席。利用相对不公平值 r_A 和 r_B 讨论：当总席位增加 1 席时，应该分配给 A 还是 B?

不失一般性，设 $P_1/n_1>P_2/n_2$，即对 A 不公平。当再分配 1 个席位时，关于 $P_i/n_i(i=1,2)$ 的不等式可能有如下 3 种情况。

(1) $P_1/(n_1+1)>P_2/n_2$，说明即使 A 方增加 1 席，仍对 A 方不公平，所以应分给 A 方。

(2) $P_1/(n_1+1)<P_2/n_2$，说明 A 方增加 1 席时，将变为对 B 方不公平，由式(1-2)计算出对 B 的相对不公平值为

$$r_B(n_1+1,n_2)=\frac{P_2/n_2-P_1/(n_1+1)}{P_1/(n_1+1)}=\frac{P_2(n_1+1)}{P_1n_2}-1 \tag{1-3}$$

(3) $P_1/n_1>P_2/(n_2+1)$，说明 B 方增加 1 席时，将变为对 A 方不公平。由式(1-2)计

算出对 A 的相对不公平值为

$$r_A(n_1, n_2+1) = \frac{P_1(n_2+1)}{P_2 n_1} - 1 \tag{1-4}$$

$P_1/n_1 < P_2/(n_2+1)$不可能出现(因为 $P_1/n_1 > P_2/n_2 > P_2/(n_2+1)$)。

由于公平分配席位的原则是使得相对不公平值尽可能小,所以,如果

$$r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1) \tag{1-5}$$

则这 1 席分给 A 方;反之,给 B 方。

由式(1-3)和式(1-4)可知,式(1-5)等价于

$$\frac{P_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{P_1^2}{n_1(n_1+1)} \tag{1-6}$$

(1) 第一种情况:

$$P_1/(n_1+1) > P_2/n_2, \quad P_1/n_1 > P_2/(n_2+1)$$

所以

$$\frac{P_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{P_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

与式(1-6)等价。

结论:当式(1-6)成立时,增加的 1 席应分给 A 方;反之,分给 B 方。

(2) 若记 $Q_i = P_i^2/n_i(n_i+1)$,$i=1,2$,则增加的 1 席应分给 Q 值较大的一方。

推广到有 m 方分配席位的情况:设第 i 方人数为 P_i,已占有 n_i 个席位,$i=1,2,\cdots$。当总席位增加 1 席时,计算 $Q_i = P_i^2/n_i(n_i+1)$,$i=1,2,\cdots$,应将这一席分给 Q 值最大的一方。用 Q 值法分配第 20 席和第 21 席如下所述。

对于第 20 席,有

$$Q_1 = \frac{103^2}{10\times 11} = 96.4, \quad Q_2 = \frac{63^2}{6\times 7} = 94.5, \quad Q_3 = \frac{34^2}{3\times 4} = 96.3$$

Q_1最大,所以第 20 席分给甲系。

对于第 21 席,有

$$Q_1 = \frac{103^2}{11\times 12} = 80.4, \quad Q_2 \text{ 和 } Q_3 \text{ 同上}$$

Q_3最大,所以第 21 席分给丙系。

这样,21 个席位的分配结果是三系分别占有 11、6、4 席,丙系保住了险些丧失的 1 席。

评注:席位分配应该对各方公平是人人同意的,问题的关键在于建立衡量公平程度的既合理又简明的数量指标。这个模型提出的指标是相对不公平值 r_A 和 r_B,它是确定分配方案的前提。在这个前提下导出的分配方案——分给 Q 值最大的一方,无疑是公平的。

1.2 椅子问题

本节讨论的问题来源于日常生活中一件普通的事实:把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳。然而,只需挪动几次,就可以使四只脚同时着地,放稳了。

这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言来表述,并用数学工具证实吗?让我们试试看。

问题:四条腿长度相等的椅子放在不平的地面上,四条腿能否一定同时着地?

假设椅子中心不动,每条腿的着地点视为几何学上的点,用 A、B、C、D 表示;把转动椅子看作坐标轴旋转,如图 1-1 所示。θ 表示对角线 AC 转动后与初始位置 x 轴的夹角,$g(\theta)$表示 A、C 两腿与地面距离之和,$f(\theta)$表示 B、D 两腿与地面距离之和。

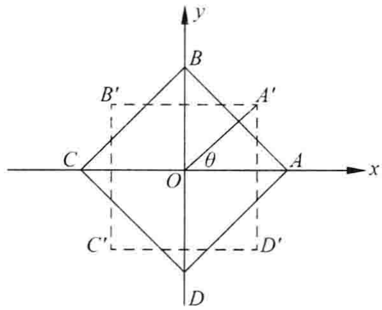

图 1-1 椅子问题图形

当地面光滑时,$f(\theta)$、$g(\theta)$皆为连续函数,因三条腿总能同时着地(因为三点确定一个平面),所以有 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$。

设初始位置 $\theta=0$ 时,$g(0)=0$,$f(0)>0$,椅子问题抽象成如下问题:

已知 $f(\theta)$、$g(\theta)$为连续函数,$g(0)=0$,$f(0)>0$,且对任意的 θ,都有 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$。

求证:存在 θ_0,使 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$,$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$。

证明:令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$,则 $h(0)=f(0)-g(0)=f(0)>0$。

将椅子转动$\frac{\pi}{2}$,对角线互换,由 $g(0)=0$ 和 $f(0)>0$,有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 和 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$,从而 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$。而 $h(\theta)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续,由介值定理,必存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $h(\theta_0)=0$,即 $g(\theta_0)=f(\theta_0)$。

由于对任意的 θ,都有 $f(\theta)g(\theta)=0$,所以

$$\left.\begin{aligned} g(\theta_0)f(\theta_0) &= 0 \\ g(\theta_0) &= f(\theta_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$$

即存在 θ_0 方向,四条腿能同时着地,所以,椅子问题的答案是:如果地面为光滑曲面,四条腿一定可以同时着地。

评注:椅子问题的解决抓住了问题的本质,在合理的假设下(椅子中心不动,对角线看成坐标轴),将椅子转动与坐标轴旋转联系起来,将腿与地面的距离用 θ 的连续函数表示,由三点确定一个平面,得 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$;又根据连续函数介值定理,使这一问题解决得非常巧妙而简单。

1.3 市场经济中的蛛网模型

在自由贸易的集市上常会出现这样的现象:一个时期以来,某种消费品如猪肉的上市量远大于需求。由于销售不畅,致使价格下跌。生产者发现养猪赔钱,于是转而经营其他农副产品。过一段时间,猪肉上市量大减,供不应求将导致价格上涨。生产者看到有利可图,又重操旧业。这样,下一个时期会重现供过于求、价格下跌的局面。如果没有外来

的干预,这种现象将如此循环下去。

上面描述的现象在自由竞争的市场经济中常常是不可避免的。商品在市场上的数量和价格出现反复振荡,是由消费者的需求关系和生产者的供应关系决定的。一方面,这一时期的价格取决于上市量,上市量越多,价格越低;另一方面,下一时期的上市数量取决于这一时期的价格,价格越低,上市量越少。进一步的观察可以发现,商品数量和价格的振荡有两种完全不同的形式,一种是振幅逐渐减小,趋向平稳;另一种是振幅越来越大,如果没有外界如政府的干预,将导致经济崩溃。

下面先用图形方法分析上述现象,建立所谓的"蛛网模型",研究市场经济趋向平稳的条件,再建立方程模型,对结果进行解释,并讨论当经济趋向不稳定时政府可能采取的干预方式。

1.3.1 蛛网模型

记商品第 k 时段的上市数量为 x_k,价格是 y_k。这里把时间离散化为时段,1 个时段相当于 1 个生产周期,如水果可以是 1 年,肉类是 1 个牲畜饲养周期,蔬菜是 1 个种植周期。

按照经济规律,价格 y_k 取决于数量 x_k,记作

$$y_k = f(x_k) \tag{1-7}$$

它反映消费者的需求关系,称为需求函数,在图 1-2 中用需求曲线表示。因为上市量越多,价格越低,所以 f 是一条下降曲线。

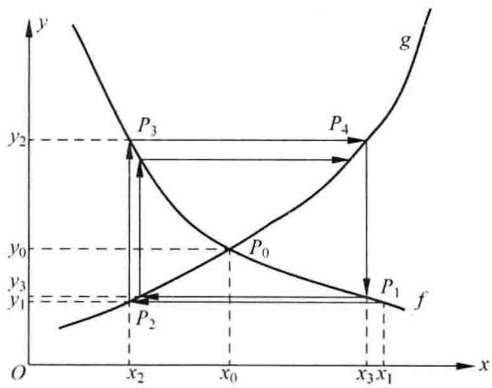

图 1-2 蛛网模型(P_0 稳定)

下一时段的上市量 x_{k+1} 由上一时段的价格 y_k 决定,记作

$$x_{k+1} = h(y_k) \quad 或 \quad y_k = g(x_{k+1}) \tag{1-8}$$

g 是 h 的反函数,反映生产者的供应关系,称为供应函数。

图 1-2 中,g 是供应曲线。因为价格越高,生产量(即下一时段上市量)越大,所以这是一条上升曲线。

图 1-2 中,两条曲线相交于 $P_0(x_0, y_0)$点。P_0 称为平衡点,意思是一旦在某一时段 k 的上市量 $x_k = x_0$,则由需求函数 f 和供应函数 g 可知,

$$y_k = y_0, \quad x_{k+1} = x_0, \quad y_{k+1} = y_0, \quad \cdots$$