线性代数

张 玲　王 烨　侯冬梅◇编

Linear Algebra

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

线性代数

张 玲　王 烨　侯冬梅◇编

Linear Algebra

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 张玲，王烨，侯冬梅编. -- 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社 ; 北京 : 北京大学出版社，2014.9

ISBN 978-7-81129-753-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… ②王… ③侯… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 115611 号

线性代数

XIANXING DAISHU

张 玲 王 烨 侯冬梅 编

责任编辑 陈 欣

出版发行 北京大学出版社 黑龙江大学出版社

地 址 北京市海淀区成府路 205 号 哈尔滨市南岗区学府路 74 号

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 720×1000 1/16

印 张 13

字 数 255 千

版 次 2014 年 9 月第 1 版

印 次 2014 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-81129-753-9

定 价 24.00 元

内容简介

本书是由三所地方本科高校教师依据理工类、经管类本科线性代数课程教学基本要求编写而成的. 此次编写参照了近年来线性代数课程及教材建设的经验与成果, 对原来使用的线性代数教材进行了重新编写. 重新编写的基本思想是在满足教学基本要求的前提下, 适当地降低理论推导的要求, 增加运用理论解决问题的方法内容, 注重提高学生应用数学的能力. 对线性代数的知识进行了全面的审视与修改, 并按照由易到难, 由简到繁的思想安排了适合学生学习的例题和课后习题.

本书的内容分为矩阵、矩阵的行列式、向量空间与线性方程组、相似矩阵与二次型. 各章均配有一定数量的习题, 书末附有习题参考答案.

本书可作为高等院校理工类、经管类 (非数学类) 及相关专业的教材, 也可作为教师、学生和工程技术人员的参考书.

前 言

线性代数是数学学科的一个分支，它的研究对象是向量、向量空间、线性变换和有限维的线性方程组. 向量空间是现代数学的一个重要课题，因而线性代数被广泛地应用于抽象代数和泛函分析中，通过解析几何，线性代数得以被具体表示，线性代数的理论已被泛化为算子理论. 由于科学研究中的非线性模型通常可以被近似为线性模型，因此线性代数被广泛地应用于自然科学和社会科学中. 线性代数是理工类、经管类数学课程的重要内容.

编写本书的主要目的是为理工科本科生提供一本比较系统完整的线性代数教材. 作者一方面汇总了国内外同类教材的主要优点，另一方面融合了众多教师长期讲授该门课程的经验体会，力求使本书思路清晰、推证简洁且可读性强，从而满足广大师生的教、学需求.

本书在每章节给出了相应例题与课后习题，并在书后给出相应的参考答案，帮助读者对所学的内容进行检验，培养读者独立思考、分析解决问题能力. 全书的习题经过教学实践的不断积累与更新，其内容涵盖了全书主要讲授内容的基本概念、基本理论和基本方法，既有一般的基础习题，也有难度较大的提高题. 书后除给出了习题的答案外，还给出部分习题的解答提示，其目的在于帮助读者尽快掌握本书所教授的内容.

本书的第 1 章内容由张玲编写，约 5.6 万字；第 2 章与第 4 章内容由王烨编写，约 10 万字；第 3 章内容及课后习题参考答案由侯冬梅编写，约 8.4 万字.

由于作者水平有限，同时编写时间也比较仓促，因此教材中难免存在不足之处，敬请广大读者批评与指正，以便进一步改善.

作 者

2014 年 6 月

目　录

第 1 章　矩阵

矩阵是一个重要的数学工具，它在工程技术、物理学、控制论及经济学等许多领域中有着广泛的应用，也是线性代数研究的主要对象之一. 本章将介绍矩阵的概念及其运算，然后讨论矩阵初等变换和初等矩阵等相关知识.

1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵的定义

在生产实践中经常会遇到各种各样的数表. 例如，某企业有三种产品，需要运往四个销地，其调运方案如下表：

单位：吨

产量 销地 产品	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5
产品 1	3	4	6	5	7
产品 2	1	1	3	2	5
产品 3	2	2	7	4	6

如果在上表中隐去产品、产量、销地，上述调运方案可简化成如下数表

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

又例如，对于线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 6, \end{cases}$$

我们隐去三个方程中的未知量 x_1，x_2，x_3，x_4 及 $=, +$，分离出未知量的系数及常数项，上述方程组也可简化成数表 (1.1.1).

由上面的讨论可知，数表可以简化实际问题的表示方法，而同一个数表可以表示不同的实际问题. 通常数表 (1.1.1) 中的横排称为行，竖排称为列，数表 (1.1.1) 称为 3 行 5 列矩阵. 一般地，我们有如下定义.

定义 1.1.1 由 $m\times n$ 个元素 a_{ij} $(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots n)$ 排成的 m 行 n 列的元素表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 m 行 n 列的矩阵，简称为 $m\times n$ (阶) 矩阵.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本教材所涉及的矩阵，除特别说明外均指实矩阵. 通常用大写黑斜体英文字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵，例如，定义 1.1.1 中的矩阵可记为 $\boldsymbol{A}$, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

也简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有时也记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 此时， $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的位于 (i,j) 位置的元素， a_{ij} 的下标 i, j 分别称为 a_{ij} 的行标和列标.

1.1.2 几种特殊形式的矩阵

1. 行数与列数都等于 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

此时，称 a_{11}, $a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为主对角线元素，它们所在的对角线称为主对角线.

2. 主对角线以上的元素全为零的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为下三角矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

主对角线以下的元素全为零的方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为上三角矩阵，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. 主对角线以外的元素全为零的方阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 称为对角矩阵，即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

也简记为 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时，称 $\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda,\ \lambda,\cdots,\lambda}_{n})$ 为数量矩阵，即

$$\operatorname{diag}(\lambda,\ \lambda,\cdots,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}.$$

特别地，称 $\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ 1,\cdots,1}_{n})$ 为单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$, 即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

4. $1\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为行矩阵， $m\times 1$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为列矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n),\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}.$$

为了不致混淆，行矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记为 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 特别地， 1 阶方阵，即 1×1 矩阵 (a_1) 也用数 a_1 表示，即 $(a_1)=a_1$.

5. 元素都是零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$. 通常在不致混淆的情况下，也简记为 $\boldsymbol{O}$.

例 1.1.1 对于一般情形的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

方程组的系数可表示为一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称其为线性方程组的系数矩阵. 方程组中的未知量和常数项可表示为 $n \times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和 $m \times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

方程组的系数与常数项可表示为一个 $m \times (n+1)$ 矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为线性方程组的增广矩阵, 记为 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$.

习题 1.1

1.1.1 已知某公司有甲、乙、丙 3 个销售点, 销售 4 个产地 A 、 B 、 C 、 D 的纯净水. 甲销售点每天销售量 (单位: 桶) 分别为 890, 780, 350, 610, 乙销售点每天销售量分别为 140, 480, 750, 310, 丙销售点每天销售量分别为 590, 570, 450, 460, 试用矩阵表示该公司每天的销售量, 并计算出甲、乙、丙每天销售纯净水的总量.

1.1.2 写出方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

的系数矩阵及常数项矩阵, 并求解.

1.2 矩阵的运算

矩阵的意义不仅在于将大量的数据清晰地排成一个数表, 而且由于对它定义了一些具有理论意义及实际意义的运算法则, 因此它成为进行理论研究及解决实际问题的有力工具.

1.2.1 矩阵的线性运算

定义 1.2.1 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵. 如果同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素都相等，即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1,\ 2, \cdots, m;\ j = 1,\ 2, \cdots, n),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

定义 1.2.2 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, λ 是一个数. 称矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};$$

称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵, 记为 $-\boldsymbol{A}$, 规定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 的意义为 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$; 称 $(\lambda a_{ij})_{m\times n}$ 为数 λ 与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$, 即

$$\lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

规定 $\boldsymbol{A}\lambda$ 与 $\lambda\boldsymbol{A}$ 相等.

由定义 1.2.2 可知，只有同型矩阵才可以相加. 矩阵的加法运算和数乘运算统称为线性运算，容易验证矩阵的线性运算满足下列运算规则:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$; (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$; (4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$;

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$; (6) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$; (8) $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

以上 (1)—(8) 是矩阵线性运算的基本运算规则，由定义 1.2.2 还可以验证:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow$[①] $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$;

(2) $\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \Longleftrightarrow \lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

如果一个矩阵的 (i,j) 位置元素为 1, 其余位置是 0, 则称该矩阵为矩阵单位，通常用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 来表示，其行数和列数通常可由上下文得知，一个矩阵总可以用矩阵单位的线性运算来表示.

①符号 $\Longleftrightarrow$ 表示“当且仅当”或“充分必要条件”.

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}.$$

为了说明线性运算在实际问题中的意义，举例如下.

例 1.2.1 设某企业有三种产品 (单位为吨)，需两次运往四个销地，并且第一次调运方案可以表示为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{销地 1} & \text{销地 2} & \text{销地 3} & \text{销地 4} \end{array} \\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3,} \end{array} \end{array}$$

第二次调运方案可以表示为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{销地 1} & \text{销地 2} & \text{销地 3} & \text{销地 4} \end{array} \\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3,} \end{array} \end{array}$$

则两次运往各销地的产品总量为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{销地 1} & \text{销地 2} & \text{销地 3} & \text{销地 4} \end{array} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3,} \end{array} \end{array}$$

且第一次比第二次多运 (正值) 或少运 (负值) 三种产品的数量为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{销地 1} & \text{销地 2} & \text{销地 3} & \text{销地 4} \end{array} \\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 6 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3.} \end{array} \end{array}$$

如果两次运往各销地的运费为 λ 元 / 吨，则两次运往各销地的总运费为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{销地 1} & \text{销地 2} & \text{销地 3} & \text{销地 4} \end{array} \\ \lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 6\lambda & 3\lambda & 6\lambda & 6\lambda \\ 2\lambda & 8\lambda & 4\lambda & 6\lambda \\ 7\lambda & 3\lambda & 3\lambda & 7\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3.} \end{array} \end{array}$$

例 1.2.2 问当 x, y 取何值时，有

$$x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-y\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 由线性运算定义可知，所给矩阵等式可写为

$$\begin{pmatrix} x-y & -x-3y \\ 0 & 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

从而由矩阵相等定义可知， x, y 应满足方程组

$$\begin{cases} x-y=3, \\ -x-3y=5, \\ 3x+2y=-1, \end{cases}$$

解此方程组得 $x=1$, $y=-2$, 即当 $x=1$, $y=-2$ 时，所给矩阵等式成立.

1.2.2 矩阵的乘法运算

为了定义矩阵的乘法，我们来看下面的例子.

对于给定的一组变量 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 如果令

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n, \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ y_s = b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n, \end{cases}$$

我们可以得到一组新的变量 y_1, y_2, $\cdots$, y_s. 如果再令

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1s}y_s, \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2s}y_s, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ z_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{ms}y_s, \end{cases}$$

我们又可以得到一组新的变量 z_1, z_2, $\cdots$, z_m.

另一方面，将第 1 个方程组的 y_i, $(i=1,2,\cdots,s)$ 代入第 2 个方程组的 z_i, 得

$$\begin{aligned} z_i &= a_{i1}\sum_{j=1}^{n} b_{1j}x_j + a_{i2}\sum_{j=1}^{n} b_{2j}x_j + \cdots + a_{is}\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{k1}\right)x_1 + \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{k2}\right)x_2 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kn}\right)x_n, \end{aligned}$$

从而可以直接从变量 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 得到变量 z_1, z_2, $\cdots$, z_m, 即

$$\begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n, \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ z_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n, \end{cases}$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.$$

我们类似地定义矩阵的乘法.

定义 1.2.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},\quad 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

在定义 1.2.3 中, 只有 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义, 且乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 位置元素恰好为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和, 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行数与列数是由 $\boldsymbol{A}$ 的行数与 $\boldsymbol{B}$ 的列数决定的.

如果记

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_s\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_m\end{pmatrix},$$

上面方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 则上述变换分别表示为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX},\quad \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{AY},\quad \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{ABX}.$$

例 1.2.3 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&0\\5&-1&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 3×2 矩阵可知, $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数, 从而由定义 1.2.3 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&0\\5&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\times1+0\times2+(-2)\times3 & 2\times3+0\times0+(-2)\times1\\1\times1+3\times2+0\times3 & 1\times3+3\times0+0\times1\\5\times1+(-1)\times2+4\times3 & 5\times3+(-1)\times0+4\times1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-4&4\\7&3\\15&19\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数可知, $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 1.2.4 求矩阵 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$、$\boldsymbol{AC}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2&3\\2&-3\end{pmatrix}.$$

解 由矩阵乘积的定义，得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

通过例 1.2.4 可以看出：

(1) 矩阵的乘法不满足交换律，即一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 因此，在做矩阵乘法运算时一定要注意乘积的顺序. 通常称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 称 $\boldsymbol{BA}$ 为 A 右乘 $\boldsymbol{B}$. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换矩阵.

(2) 矩阵的乘法不满足消去律, 即一般情况下, 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(3) 一般情况下，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

虽然矩阵的乘法不满足交换律，但仍满足下列运算规律：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

(4) $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

上述的式 (4) 说明，单位矩阵在矩阵乘法运算中的作用，类似于数 1 在实数乘法中的作用.

例 1.2.5 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 且 λ 是一个实数，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AB}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型对角矩阵，所以

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1&0&\cdots&0\\0&b_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&b_n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_1+b_1&0&\cdots&0\\0&a_2+b_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_n+b_n\end{pmatrix}.$$