经济管理定量分析方法

微积分

李木桂　主　编　　丘作良　副主编

中央廣播電視大學出版社

经济管理定量分析方法

微积分

李木桂 主编 丘作良 副主编

中央广播电视大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 李木桂主编. —北京：中央广播电视大学出版社，2013. 11

（经济管理定量分析方法）

ISBN 978-7-304-06372-6

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①微积分　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 277485 号

经济管理定量分析方法

微积分

WEIJIFEN

李木桂　主　编

丘作良　副主编

出版·发行：中央广播电视大学出版社

电话：营销中心 010-58840200　　总编室 010-68182524

网址：http://www.crtvup.com.cn

地址：北京市海淀区西四环中路 45 号　　**邮编**：100039

经销：新华书店北京发行所

策划编辑：袁玉明　王吴超　　**版式设计**：赵　洋

责任编辑：王　可　　**责任校对**：王　亚

责任印制：赵联生

印刷：北京博图彩色印刷有限公司　　**印数**：0001-2000

版本：2013 年 11 月第 1 版　　2013 年 11 月第 1 次印刷

开本：185 mm×230 mm　　**印张**：7.75　　**字数**：151 千字

书号：ISBN 978-7-304-06372-6

定价：19.00 元

前言 PREFACE

随着数学在经济管理中的应用不断扩大，在数学教学中对经济管理类学生数学应用能力培养的紧迫性就愈加凸显出来。我们认为，大学经济管理类专业中数学教学的任务就是通过数学教学活动，让学生能够掌握数学的思想和方法，并会应用所学的数学知识解决经济管理中的实际问题。信息技术与计算机技术的飞速发展和广泛应用，为改革当前经济管理类大学数学教学中存在的弊端、加强学生数学应用能力的培养提供了新的思路和有效的工具。在上述背景下，深圳广播电视大学数学教学改革课程组经过多年对《物流管理定量分析方法》[获“2008 年度国家精品课程（网络教育）”，遴选入围 2012 年度国家资源共享课] 教材的改革实践和思索，形成了《经济管理定量分析方法——微积分》的编写思想。

本教材具有如下显著特点：

第一，建立以解决经济管理问题为目标的微积分教学体系。本教材将数学真正地融合到实际问题中，以解决经济管理中的应用问题为主线，建立相应的微积分教学体系。

第二，将计算实验引入教学内容中。我们认为，经济管理类专业中的数学教学应该“以思想传授为主，以计算与证明为辅”。本教材除介绍培养学生数学思维需要的简单运算以外，还引入了国际上最有影响力的、界面友好、易学易用的 MATLAB 7.10 计算软件，使数学计算手段现代化，有助于学生掌握复杂的数学计算，真正提高学生解决实际问题的能力。

本课程的文字教材有《经济管理定量分析方法——矩阵代数》和《经济管理定量分析方法——微积分》两本。《经济管理定量分析方法——微积分》课程建设小组由深圳广播电视大学孟香惠副教授担任组长，负责该课程多种媒体资源的开发工作；由广东开放大学李木桂担任主编并统稿，广东梅州广播电视大学丘作良任副主编，参加编写的人员还有广东开放大学谭志明和深圳广播电视大学孟香惠、赵凯。胡新生教授和华中科技大学数学与统计学院副院长施保昌博导、教授任主审。

在编写过程中，本教材得到了国家开放大学、深圳广播电视大学、广东开放大学有关领导的关心和大力支持，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，谨请广大读者批评指正。

编　者

2013 年 9 月 18 日

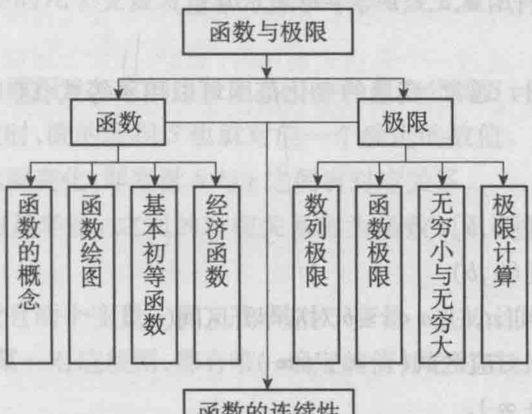
于深圳广播电视大学

目 录 CONTENTS

第1章

函数与极限

知识结构框图



学习目标要求

1. 重点掌握函数的概念，掌握基本初等函数，掌握用 MATLAB 软件绘制函数图形.
2. 重点掌握需求、成本、平均成本、收入、利润等经济函数.
3. 重点掌握极限的概念，掌握用 MATLAB 软件计算极限.
4. 重点掌握无穷小与无穷大的概念，了解函数的连续性.

函数是微积分研究的主要对象,极限则是微积分的主要思想方法. 本章先来介绍一下函数和极限的基本概念.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念与绘图

在观察各种自然现象时,我们常常会遇到两种不同的量:一种量在某一过程中保持不变;另一种量在该过程中不断变化,可以取不同的值. 例如,在货运汽车由始发站开往终点站的过程中,汽车的速度是变化的,油箱中储存的油量也是变化的,而汽车上的货物质量是不变的.

一般地,在某一过程中可以取不同数值的量称为**变量**,保持同一数值的量称为**常量**. 在上面的例子中,汽车的速度是变量,汽车上的货物质量是常量. 一般地,用 x,y,z,t 等字母表示变量;用 a,b,c,k 等字母表示常量.

1. 变量的变化范围

任何变量都有一定的变化范围. 通常,变量的变化范围可以用不等式、区间、绝对值和邻域等表示.

(1)不等式与区间.

① 不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 对应闭区间$[a,b]$.

② 不等式 $a<x<b$ 对应开区间(a,b).

③ 不等式 $a\leqslant x<b$ 对应半开区间$[a,b)$,$a<x\leqslant b$ 对应半开区间$(a,b]$.

④ 全体实数为 $-\infty<x<+\infty$,对应区间$(-\infty,+\infty)$.

⑤ 不等式 $x\geqslant a$ 对应区间$[a,+\infty)$.

⑥ 不等式 $x>a$ 对应区间$(a,+\infty)$.

⑦ 不等式 $x\leqslant b$ 对应区间$(-\infty,b]$.

⑧ 不等式 $x<b$ 对应区间$(-\infty,b)$.

注意: $-\infty$ 左边与 $+\infty$ 右边总是圆括号.

(2)绝对值. **绝对值**$|x|$是一个非负变量,即

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

例如,$|5|=5$,$|-8|=8$,$|0|=0$.

$|x|$ 的几何意义是数轴上的点 x 到原点的距离. 设 $a>0$,则

① $|x| \leqslant a$ 表示 $-a \leqslant x \leqslant a$.

② $|x| < a$ 表示 $-a < x < a$.

③ $|x| \geqslant a$ 表示 $x \leqslant -a$ 或 $x \geqslant a$.

④ $|x| > a$ 表示 $x < -a$ 或 $x > a$.

(3)邻域. 设 a 为实数,δ 为正数,满足不等式 $|x-a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$. 点 a 称为该邻域的**中心**,δ 称为该邻域的**半径**. 显然,以点 a 为中心的 δ 邻域就是长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$,即

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$$

满足不等式 $0 < |x-a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为 a 的**空心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

2. 函数的概念

在同一过程中的几个变量常是相互关联的,某些变量之间可能存在对应关系.

例 1.1　圆的面积 S 与它的半径 r 之间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 给定. 当半径 r 取定某一正数时,圆的面积 S 也就对应一个确定的数值. 显然,面积 S 的大小随着 r 的变化而变化,即变量 S 与 r 之间有对应关系.

将圆面积 S 与其半径 r 之间的对应关系称为函数. 下面给出函数的确切定义.

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y,如果对于变量 x 在允许取值范围内的每个值,变量 y 按照某一对应规则,都有唯一确定的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记作

$$y = f(x)$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或**函数**,f 表示**对应规则**.

自变量 x 允许取值的范围称为函数的**定义域**. 如果 x_0 是定义域内的点,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**有定义**.

当自变量 x 在定义域内取某一定值 x_0 时,因变量相应的值称为当 $x=x_0$ 时的**函数值**,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍定义域中的每个值时,所有函数值的全体称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

例 1.2　设 $f(x) = 2x^2-5$,求 $f(1)$,$f(-3)$,$f(x^2)$,$f(x-1)$.

解
$$f(1)=2\times 1^2-5=-3$$
$$f(-3)=2\times(-3)^2-5=13$$
$$f(x^2)=2(x^2)^2-5=2x^4-5$$
$$f(x-1)=2(x-1)^2-5=2x^2-4x-3$$

例 1.3 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(0)$,$f(-x)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解
$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$$
$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

对于函数的概念,我们做如下说明:

(1)函数定义域的确定.除在解决实际问题时,根据变量的实际变化范围来确定定义域以外,当函数 $y=f(x)$ 通过一个表达式表示时,规定:其定义域就是使该式有意义的自变量取值的全体.因此,在确定函数的定义域时必须注意下面几点:

思考:怎样求函数的定义域?

① 如果函数式中含有分母,则分母不能为0.

② 如果函数式中含有偶次根式,则被开方表达式必须大于或等于0.

③ 如果函数式中含有对数,则真数必须大于0.

例 1.4 求函数 $y=\log_2(x-1)$ 的定义域.

解 为了使对数式有意义,必须 $x-1>0$,从而 $x>1$,于是所求函数的定义域为 $(1,+\infty)$.

例 1.5 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln x}+\sqrt{5-x}$ 的定义域.

注意:$\ln x$ 表示以 $e\approx 2.72$ 为底的自然对数.

解 对于 $\ln x$,要求 $x>0$;对于 $\dfrac{1}{\ln x}$,因为 $\ln x$ 是分母,所以要求 $\ln x\neq 0$,于是 $x\neq 1$;对于 $\sqrt{5-x}$,要求 $5-x\geqslant 0$,即 $x\leqslant 5$.因此,所求函数的定义域为 $(0,1)\cup(1,5]$.

注意:$\ln 1=0$.

思考:能否把定义域、值域看成确定函数的两个要素?

(2)确定函数的两个要素.函数的概念反映了自变量和因变量之间的对应关系,涉及定义域、对应规则和值域.但是,只要定义域和对应规则确定了,

值域也就随之确定了．因此，定义域和对应规则是确定函数的**两个要素**，只要两个函数的定义域和对应规则都相同，则这两个函数就相同；只要定义域或对应规则有一个不相同，则这两个函数就不相同．

在这里还应当指出，在函数的定义中并未规定自变量与因变量用什么字母表示．只要定义域与对应规则相同，不管自变量与因变量用什么字母表示，我们都认为这些函数是相同的函数．例如，$S=\pi r^2$，$u=\pi r^2$，$y=\pi x^2$ 等都是相同的函数．由此可见，函数与表示其变量的符号无关．

思考：两个函数相等与代表变量的字母有关吗？

例 1.6　下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$；

(2) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$；

(3) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(4) $y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$.

思考：使用对数公式的前提条件是什么？

解　(1) 因为前者的定义域是 $x\neq1$，而后者的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，两者的定义域不同，所以它们是不同的函数．

(2) 这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，前者的对应规则是 $y=|x|$，后者则是 $y=x$，两者的对应规则不同，所以它们也是不同的函数．

(3) 因为前者的定义域是 $x\neq0$，而后者的定义域是 $x>0$，两者的定义域不同，所以它们也是不同的函数．

(4) 因为两者的定义域都是 $x>0$，而且由对数公式可知，两者的对应规则也相同，所以它们是相同的函数．

(3) 函数的图形．对于任意一个确定的函数 $y=f(x)$，定义域内的每个 x 值与函数值都可以构成数对 (x,y)．当 x 取遍它的定义域时，这些数对 (x,y) 在平面直角坐标系中所对应的点集称为该函数的**图形**．我们将在后面介绍用 MATLAB 软件绘制函数图形的相关内容．

(4) 函数的单值性．定义 1.1 中规定：对于每个 x 值，都有唯一的 y 值与之对应．符合这个定义的函数称为**单值函数**．若对某个 x 值，有多个 y 值与之对应，则称这样的函数为**多值函数**．例如，$y^2=x+1$ 就是一个多值函数．本书只讨论单值函数．

(5) 关于函数的表示．定义 1.1 中对表示函数的方式并未加任何限制，它不一定要用公式表示，也可以通过表格、图示或其他方式来表示．即使用公式

表示,也并没有规定只用一个式子表示.

根据实际问题,变量之间的对应关系有时需要用几个式子来表示,这类函数称为**分段函数**.

注意:求分段函数的函数值时,需注意选择函数在不同区间上的表达式。

例 1.7 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & -2<x\leqslant 1,\\ 5-x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(-1)$,$f(2)$ 及函数的定义域.

解 $$f(-1)=(-1)^2+2=3$$

$$f(2)=5-2=3$$

函数的定义域为 $(-2,+\infty)$.

注意 分段函数的定义域为各段表达式定义范围的并集.

3. 用 MATLAB 软件绘制函数图形

MATLAB 软件,除具有强大的数值分析功能以外,还具有非常强大的绘图功能. MATLAB 软件一向重视数据的图形表示,并不断地采用新技术改进和完善其可视化功能. 下面将介绍 MATLAB 软件的一些绘制函数图形的命令,并学习函数的二维图形绘制方法.

MATLAB 软件内建了许多数值运算的函数,本书常用的函数如表 1-1 所示.

表 1-1 本书常用的函数

函数	功能
abs(x)	绝对值函数 $\|x\|$
log(x)	以 e 为底的自然对数函数 $\ln x$
log10(x)	以 10 为底的常用对数函数 $\lg x$
sqrt(x)	开平方函数 $\sqrt{x}$
exp(x)	以 e 为底的指数函数 e^x
fplot(x)	绘制函数的二维图形
solve( )	求方程或方程组的解
fminbnd( )	求函数的最小值
syms	定义符号型变量
limit( )	求极限
diff( )	求导数
int( )	求不定积分或定积分的符号解

利用常用函数和运算符在 MATLAB 软件中的表述方式,可以在 MATLAB 软件中输入函数表达式. 例如,函数

$$\frac{x^4}{2}+x^2-1,\quad x^2e^{-x^2},\quad \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

在 MATLAB 软件中表述分别如下：

```
x^4/2+x^2-1
x^2*exp(-x^2)
log(x+sqrt(1+x^2))
```

函数的图形对于我们了解函数的性质非常有帮助．我们能正确绘出函数的图形,也就能对它的单调性、奇偶性、极值(最值)等情况做出正确的判断．

在 MATLAB 软件中,可以调用函数 fplot( ) 来绘制函数的图形,其具体的格式如下：

```
fplot(fun,lims)
```

其中,fun 为字符串型表达式(要用单引号括起来)；lims 用来声明绘图的区间．我们可以用

```
lims=[Xmin, Xmax]
```

来设定自变量 x 的区间,即

```
Xmin≤x≤Xmax
```

lims 还可以同时设定横坐标 x 和纵坐标 y 的区间：

```
lims=[Xmin,Xmax Ymin,Ymax]
```

例 1.8 绘出下列函数的图形：

(1) $f(x)=2^{-\sqrt{|x|}}$；

(2) $g(x)=x\ln(1+x^2)$.

解 (1)根据已知函数,写出由 MATLAB 软件提供的算术运算符组成的表达式：

注意：括号是成对出现的.

```
f(x)=2^(-sqrt(abs(x)))
g(x)=x*log(1+x^2)
```

(2)根据函数的定义域,声明绘图区间为

```
lims=[-5,5]
```

(3)在 Command Window 中调用函数 fplot ( ),并输入上述表达式,如图 1-1所示.

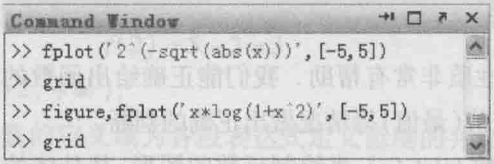


图 1-1 绘制函数图形命令输入界面

绘出这两个函数的图形,分别如图 1-2 和图 1-3 所示.

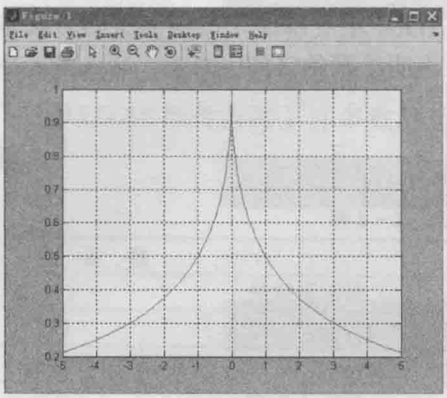


图 1-2 函数 $f(x)=2^{-\sqrt{|x|}}$ 的图形

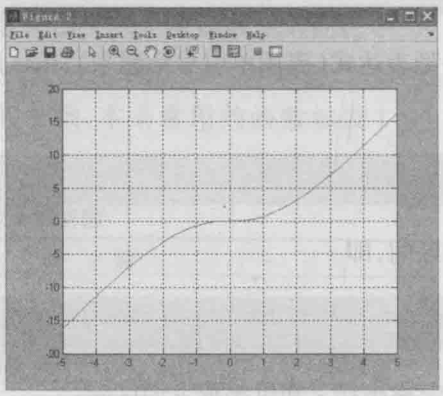


图 1-3 函数 $g(x)=x\ln(1+x^2)$ 的图形

说明 (1)因为函数 fplot (fun, lims) 中的 fun 为字符串型表达式,所以这两个函数表达式要用单引号“'”括起来.

(2)命令 grid 是对图形加网格.

(3)命令 figure 是强制生成一个新的绘图窗口.如果不加这个命令,则后一次绘出的函数图形会覆盖前一次绘出的图形.

1.1.2 基本初等函数

1. 幂函数

函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)称为**幂函数**.下面给出几个典型的幂函数.

(1)当 $\alpha=0$ 时，$y=1$. 它的图形是一条水平直线．将其推广到一般情形，称 $y=c$(c 为常数)为**常数函数**.

(2)当 $\alpha=1$ 时，$y=x$. 它的图形是一条平分第一象限和第三象限的直线.

(3)当 $\alpha=2$ 时，$y=x^2$. 它的图形是一条开口向上的抛物线，如图 1－4 所示.

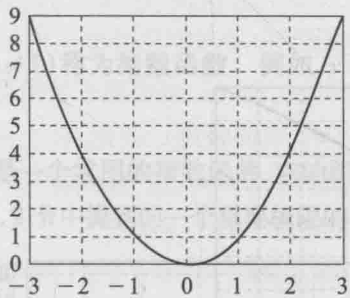


图 1－4　函数 $y=x^2$ 的图形

图 1－4 中的图形关于 y 轴(横坐标 0 处)对称，称函数 $y=x^2$ 为偶函数. 偶函数的定义如下：

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$，若对于定义域内的任意点 x，都有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**.

例如，常数函数 $y=c$ 和 $f(x)=2^{-\sqrt{|x|}}$ 都是偶函数.

(4)当 $\alpha=3$ 时，$y=x^3$. 它的图形如图 1－5 所示.

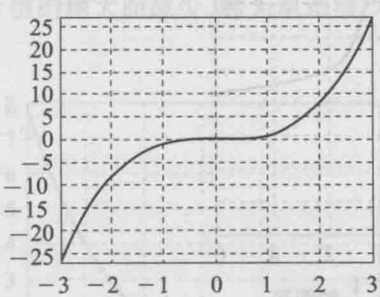


图 1－5　函数 $y=x^3$ 的图形

图 1－5 中的图形关于原点对称(绕原点旋转 180°后，图形重叠)，称函数 $y=x^3$ 为奇函数．奇函数的定义如下：

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$,若对于定义域内的任意点 x,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

例如,函数 $y=x$ 与 $f(x)=x\ln(1+x^2)$ 都是奇函数.

(5)当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,$y=\sqrt{x}$. 它的图形是开口向右的抛物线的上半支,如图 1-6所示.

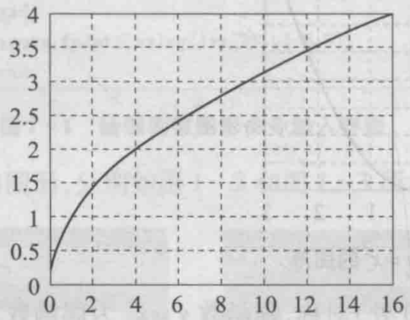


图 1-6　函数 $y=\sqrt{x}$的图形

类似地,任一根式函数都可以看成幂函数,如

$$y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$$

(6)当 $\alpha=-1$ 时,$y=\frac{1}{x}$. 它的图形是双曲线,如图 1-7 所示.

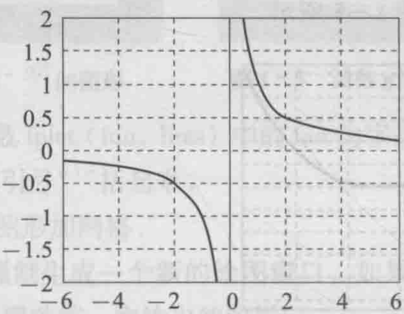


图 1-7　函数 $y=\frac{1}{x}$的图形

类似地,分子是常数、分母是幂函数的函数可以看成幂函数的推广. 例如,

$$y=\frac{2}{x^3}=2x^{-3},\quad y=\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}=5x^{-\frac{2}{3}}$$

(7) 多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$（$n$ 为自然数）也可以看成幂函数的推广，如

$$y=2x^3+4x^2-3$$

2. 指数函数

函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$）称为**指数函数**．例如，$y=2^x$，$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 等都是指数函数．

特别地，函数 $y=e^x$ 是一个常用的指数函数，它的图形如图 1－8 所示．其中，$e=2.718\ 28\cdots$是将要在 1.2 节中提到的一个重要极限的值，它是一个无理数．

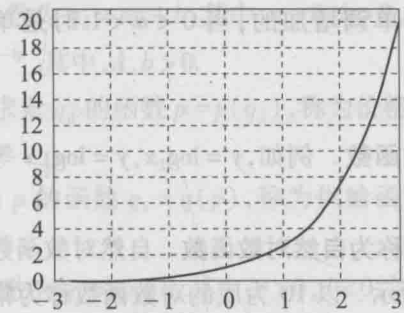


图 1－8　函数 $y=e^x$ 的图形

对于图 1－8 中的图形，y 值随 x 值的增大而增大，称为单调增加；对于图 1－9中的图形，y 值随 x 值的增大而减少，称为单调减少．两者统称为单调性，其定义如下：

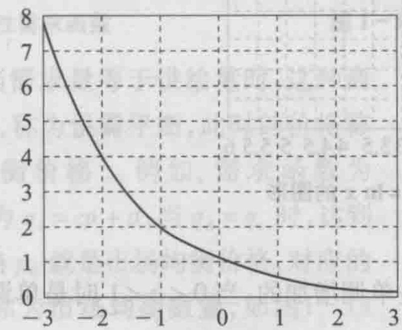


图 1－9　函数 $y=2^{-x}$ 的图形