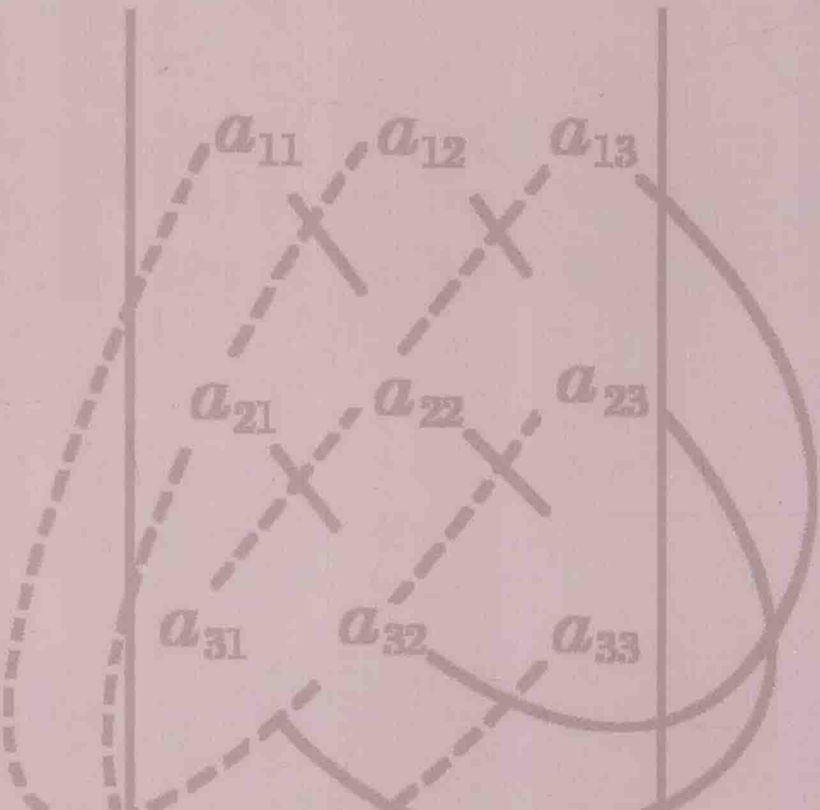
高职高专系列教材

线性代数

梅家斌 袁子厚 唐 强 主编



中山大学出版社

线性代数

高职高专系列教材

线性代数

梅家斌 袁子厚 唐强 主编

中山大学出版社

XIANXING DAISHU

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/梅家斌，袁子厚，唐强主编．—广州：中山大学出版社，2004.6
(高职高专系列教材)
ISBN 7－306－02302－0
Ⅰ．线… Ⅱ．①梅…　②袁…　③唐…　Ⅲ．线性代数－高等学校：技术学校－教材
Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 053849 号

选题策划：曾纪川
责任编辑：李文　李立鹏
封面设计：朱霭华
责任校对：李春梅
责任技编：黄少伟
出版发行：中山大学出版社
编辑部电话(020)84111996，84113349
发行部电话(020)84111998，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传真：(020)84036565
印 刷 者：江门市新教彩印有限公司印刷
经 销 者：广东新华发行集团
规　　格：787mm×1092mm　1/16　11.375 印张　278 千字
版次印次：2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：19.00 元　　印数：1－3000 册

内容简介

本书是根据高职、高专教育专业培养目标，高职、高专教育基础课程教学基本要求，针对理工科、财经管理类专业编写的.

全书内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、特征值与相似矩阵、二次型等共八章. 前四章是所有专业都必学的基本内容. 五、六两章可根据所学专业需要适当进行取舍. 第七章介绍了线性代数数值计算的有关内容，相关知识都附有算法，是专供计算机、自动化等专业编写的. 第八章介绍了与线性代数有关的数学模型与应用，供教师和学生参考. 另有两个附录，分别介绍了一些特殊的矩阵的常见性质及 MATLAB 软件，以供读者计算时参考.

本书每章之后从基本概念、基本理论、基本方法等方面进行总结，每节后有习题，每章后有综合练习题，书末有全部习题的答案.

本书力求结构合理、重点突出、强调问题的引入、注重方法的归纳与总结，同时，也注重培养学生运用知识和解决实际问题的兴趣与能力.

本书除特别适合高职、高专理工科、财经、经济管理等专业线性代数教材外，也可用作其他专业、自考人员及“专升本”学生与有关工程技术人员参考.

目 录

第一章　行列式

内容提要

- 行列式的定义
- 行列式的性质与计算
- 利用行列式解线性方程组的 Cramer 法则

第一节　行列式的定义

行列式是矩阵的重要的数值特征之一，在线性代数的很多问题中都要用行列式来进行计算，例如解线性方程组，求矩阵与向量组的秩、求矩阵的特征值等.行列式最初是解线性方程组而引进的. 下面，我们从解二元及三元线性方程组出发逐步给出行列式的定义.

一、二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

将(1.1)式的第一式乘 a_{22}减去第二式乘 a_{12}即可消去未知数 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

用类似的方法消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得方程组(1.1)的惟一解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

为了记忆的方便，有人先将(1.2)式中的分母表示为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即将方程组(1.1)中未知数的系数保留原来的位置不变，两边各添一竖线得到. 由观察不难发现(1.2)式的分母正好是上述二阶行列式中从左上角到右下角两元素之乘积减去左下角到右上角两元素的乘积，即定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

(1.3)式的左端称为二阶行列式. 我们将横排称为行，竖排称为列，它共有两行、两列. 在二阶行列式中四个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}都称为元素，每个元素都用两个脚标表示，其中第一脚标称为行标，表示该元素所在的行，第二脚标称为列标，表示该元素所在的列. 例如，a_{12}表第一行第二列的元素，a_{21}表第二行第一列的元素，等等. 二阶行列式中第 i 行第 j 列的元素记为 $a_{ij}(i,j=$

1,2)．二阶行列式中用实线相连的位置称为主对角线，用虚线相连的位置称为副对角线．二阶行列式的值等于主对角线上两元素乘积减去副对角线两元素的乘积，如(1.3)式所示．这称为二阶行列式的**对角线法则**．利用对角线法则，可将(1.3)式中两分子分别用二阶行列式记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

于是得到如下的二元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则：

二元线性方程组(1.1)当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2)$ 为将常数项 b_1,b_2 替换系数行列式 D 中第 j 列所得的行列式．

例 1.1 用 Cramer 法则解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=1 \\ x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-(-1)\times 1=5, D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$

故
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{5},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{5}$$

2．三阶行列式

下面考虑解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

我们仍可用消元法求解．其作法是先由任两方程消去一个未知数，得到一个仅含两个未知数的二元线性方程组，再由消元法即可求得其解．由于三元线性方程组解的过程及表示都比较复杂．故人们引入三阶行列式来求解．

三阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

在上述三阶行列式中，连接元素 a_{11},a_{22},a_{33} 的连线称为主对角线(图中实线部分)．连接元素 a_{13},a_{22},a_{31} 的连线称为副对角线(图中虚线部分)．上面三阶行列式的定义规则，也称三阶行列式的对角线法则．对角线法则也可表示为

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

例 1.2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

解 由对角线法则,该行列式的值为

$$2\times0\times4+1\times1\times1+(-1)\times(-2)\times3-1\times0\times3-(-2)\times1\times2-(-1)\times1\times4$$
$$=0+1+6-0-(-4)-(-4)=15$$

注意 三阶行列的定义实际上和二阶行列式一样,也是借助于三元线性方程组的解而引入的. 只是因解的过程及结果比较复杂,我们省略了. 借助三阶行列式的定义可得到类似于二元 Cramer 法则的解三元线性方程组的 Cramer 法则:

三元线性方程组(1.4)当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$ 时,有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中 D_j 是将常数项 b_1,b_2,b_3 替换系数行列式 D 中第 j 列($j=1,2,3$)所得到的行列式.

例 1.3 用 Cramer 法则求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+x_2-5x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-6,\quad D_1=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-6$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-12,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-6$$

故
$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

3. 二阶行列式与三阶行列式的关系

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

我们看到,三阶行列被展开成三个带系数的二阶行列式的代数和. 其系数分别是第一行的

三个元素，而二阶行列式分别为去掉第一行中的元素所在行与所在列后剩下元素所组成的行列式．该式称为行列式按第一行展开式．大家也可写出按第二、三行的相应展开式．因此，任何一个三阶行列式都可按任一行展开成三个二阶行列式的代数和．为了给出一般展开式的规律，我们引入以下概念：

定义 1.1 （余子式，代数余子式）

给定三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，其任一元素 a_{ij}，去掉该元素所在的第 i 行，第 j 列，由剩下的元素保持其原有位置所组成的二阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 $M_{ij}(i,j=1,2,3)$．而将 M_{ij} 乘以符号 $(-1)^{i+j}$，则称 a_{ij} 的代数余子式，记 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$．

例如 $M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}$，$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=M_{33}$ 等．行列式的每个元素都对应有一个余子式及代数余子式．

利用代数余子式的概念，即可得到三阶行列式的展开规则：

三阶行列式等于其任一行或任一列各元素与其相应的代数余子式乘积之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} \quad i=1,2,3 \quad \text{（按行展开）}$$

上述结论可直接验证．

例如按第一行展开得 $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$，

例如 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 分别按第一行，第二行展开得

$$\begin{aligned} D &=1\times A_{11}+2\times A_{12}+3A_{13}=1\cdot(-1)^{1+1}M_{11}+2\cdot(-1)^{1+2}M_{12}+3\cdot(-1)^{1+3}M_{13}. \\ &=M_{11}-2M_{12}+3M_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &=0-2\times(-1)+3\times 1=3+2=5 \end{aligned}$$

$$D=-1\times A_{21}+0\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}=(-1)\cdot(-1)^{2+1}M_{21}=M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2+3=5$$

我们看到选取零元素较多的行或列展开，将使行列式的计算大大简化．

二、n 阶行列式的定义

利用三阶行列式的展开法则，给出一般任意 n 阶行列式的定义如下：

定义 1.2 由任意 n 行、n 列元素排成的表，左右各加一条竖线，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为一个 n 阶行列式．其值定义为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, i=1,2,\cdots,n$$

其中 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 为 D 的第 i 行各元素，$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 为它们对应的代数余子式，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式，它是去掉 a_{ij} 所在的行和列后由剩下元素组成的 $n-1$ 阶行列式.

例如 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$，写出元素 a_{34} 的余子式与代数余子式.

解 $a_{34}=1$. 其余子式为去掉它所在行，列后剩下的行列式即 $M_{34}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，其代数余子式为 $A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-M_{34}$.

注 1° 上述定义也称行列式按任一行展开. 它是一个递归的定义. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，当 $n=2$ 时，二阶行列式就是对角线法则，由展开定理，利用二阶行列式即可计算三阶行列式的值. 利用三阶行列式又可计算四阶行列式的值，如此等等，可计算任意阶行列式的值.

2° 由该定义可证(参第二节行列式性质 2)行列式也可按任一列展开，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},j=1,2,\cdots,n$$

其中 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 是 D 中第 j 列元素，$A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 是其对应的代数余子式.

例 1.4 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

解 第一行有两个零，选择第一行展开得

$$\begin{aligned} D_4 &=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}+a_{14}(-1)^{1+4}M_{14} \\ &=3M_{11}+0(-M_{12})-2M_{13}+0\cdot M_{14}=3M_{11}-2M_{13} \\ &=3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}=3\times(28+20)-2(-80+30-4)=144+108=252 \end{aligned}$$

习　　题 1-1

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$.

2. 写出下面行列式中元素 a_{23} 的余子式与代数余子式：

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & -5 & 4 \\ 9 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. 由定义计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

4. 解三元线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1-x_2+3x_3=-1 \end{cases}$

5. 解方程组$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & -9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

第二节　行列式的性质与计算

在上一节，我们给出了行列式的定义，一般来说当 n 很大时，利用定义来计算行列式是很麻烦的．因此，我们应该研究行列式的性质，并利用性质来计算行列式．

一、行列式的性质

将行列式 D 的行列互换所得的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}，如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad \text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与其转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

以二阶为例，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，故 $D=D^{\mathrm{T}}$.

对于 n 阶行列式，可利用数学归纳法加以证明(略)．

由性质 1 知，行列式的行与列有相同的功效，一般行列式对行成立的性质，对列依然成立，反之亦然．

例 1.5　计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　由性质 1

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\xlongequal[\text{行展开}]{\text{按第一}}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行展开得}]{\text{再按第一}} a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{34} & a_{44} & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{3n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上三角形行列式的特点是:**主对角线以下元素全为** 0.

类似可得下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角形行列式的特点是:**主对角线以上元素全为** 0.

作为上(下)三角形的特例,有对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角形行列式的特点是:**除主对角线元素外,其余元素全为** 0,**通常记**

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

即

$$\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

一般三角形或对角形元素只写出非零元素.

性质 2 n 阶行列式等于任一行(列)所有元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$\begin{aligned} D_n &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad i=1,2,\cdots,n \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad j=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{1.6}$$

按行展开定义,由性质 1,即可得按列展开性质.

例如 $D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$,按第二列展开,得

$$D=2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开得}]{\text{按第三列}} -2\times5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -10\times(-3-1)=40$$

性质 3 互换行列式的任两行(列),行列式的值改变符号.

以二阶行列式为例,互换两列后变成

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-D$$

对于 n 阶行列式可用数学归纳法证明.

推论 如果行列式两行(列)对应元素相同,则行列式的值为 0.

证　设行列式 i,j 两行元素相同．交换 i,j 两行后，一方面由性质 2，行列式反号，D 变成 $-D$，另一方面交换后行列式的值不变，即 $D=-D$，从而 $D=0$．

性质 4　n 阶行列式中任一行(列)与另一行(列)元素对应代数余子式的乘积为 0．

以三阶行列式为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行展开}]{\text{按第一}} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

在上式两边中将 a_{11},a_{12},a_{13} 分别换成 a_{21},a_{22},a_{23}，得

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$$

即 D 中第二行与第一行对应元素之代数余子式乘积之和等于 0．对一般情况有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$$

综合性质 2 与 4 得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \tag{1.7}$$

性质 5　用数 k 乘行列式某行(列)所有元素，等于用数 k 乘该行列式．

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 5 还可表述为：行列式某一行(列)的公因子可以提到行列式外面来．

推论　行列式中有两行(列)对应元素成比例，则行列式的值为 0．

证　设行列式第 j 行元素与第 i 行元素对应成比例，比例因子为 k，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 5}} k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 3 的推论}} k\cdot 0=0$$

性质 6　如果行列式某行(列)中各元素均为两元素之和，则行列式可写成两行列式之和．

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$