

高等学校教材

数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠 方企勤 李正元 廖可人 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠 方企勤 李正元 廖可人 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本习题集是北京大学数学系同志合编《数学分析》(共三册)一书的配套教材。习题集的章节与教材的章节对应,两者顺序是一致的。所收习题主要依据北京大学数学系数学分析习题课资料编撰,也吸收了其他课中遇到的数学分析问题以及1983年前的历届研究生考试的部分试题。比曾广泛采用的吉米多维奇《数学分析习题集》增加了 m 维空间中微积分的相应题目和微分形式的题目。本书可供数学专业类学生数学分析习题课使用。

未经我社和编者同意,任何单位和个人不得编写出版本书的习题解答。否则将予以追究。

本书于1986年出版,恰逢高等教育出版社建社60周年,甲午重印,以飨读者。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题集 / 林源渠等编. -- 北京:高等教育出版社, 2015. 1

ISBN 978-7-04-040360-2

I. ①数… II. ①林… III. ①数学分析-高等学校-习题集 IV. ①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第136194号

策划编辑 李蕊 责任编辑 张晓丽 封面设计 杨立新 版式设计 于婕
插图绘制 宗小梅 责任校对 张小镝 责任印制 田甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
刷 印	三河市吉祥印务有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	850mm × 1168mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
印 张	10	版 次	2015年1月第1版
字 数	260千字	印 次	2015年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	21.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 40360-00

出版说明

1954年5月,高等教育出版社正式成立。60年来,在教育部领导的关怀下,在数学教育工作者的支持下,高教社出版了众多数学教材,可谓群贤毕至,精品迭出,伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因,部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学(初稿)》;教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》;西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学(基础部分)》;清华大学程紫明主编的《高等数学(基础部分)》;还有项武义先生的《微积分大意》,谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》,吴大任先生的《微分几何讲义》(修订版),北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材,不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累,也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶,更是各个时期数学教学改革成果的代表,它们呈现了数学教材建设的真实历史,深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早,但从数学学科的发展和教学改革趋势来看,它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁,更好地传承数学的教学思想、教学方法,促进当前数学教学改革,提高教学质量,我们遴选了60年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版,牵动各方专家的关注,凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中,西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助,胡乃同、徐刚编审提供了部分资料和样书,王睢老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计,使得这套教材不仅保持了原有的风貌,更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中,我们克服了重重困难,本着古建筑修复中“整旧如旧”的原则,尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了,我们仍然保留了这些部分,以求保持经典教材的原汁原味,仅做了规范方面的微小改动。重温经典,不仅让老专家、老前辈们抚今追昔,也让我们倍感自豪和使命感,我们还会进一步增加重版的品种,奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成,虽竭尽全力,疏漏之处在所难免,恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014年4月

编者的话

由于教材内容不断更新,特别,我们编的《数学分析》教材中的多元微积分是直接 m 维欧氏空间中讨论的,这就要求习题也应增加相应的内容.而原来广泛采用的吉米多维奇习题集没有这部分内容的题,加之因该书题解的出现,在一定程度上失去了它的训练价值.鉴于此,我们编撰了这本适合数学专业类使用的习题集.

本集中的习题主要是根据我系(北京大学数学系)习题课资料编撰的.如一元函数部分中让读者自己去判断是非的证明题,就是针对学生经常出现的一些错误而编写的.习题集也吸收了1983年以前历届研究生考试的部分试题,以及专门化课中遇到的数学分析的问题.习题中有些内容也是对教材内容的进一步补充,如除原点外泰勒级数处处发散的反例,洛必达法则的反问题,等等.

本习题集是我系编写的《数学分析》一书的配套教材.除书中个别节无习题外,习题集的章节与书的章节对应,两者顺序是一致的.为了查找方便,习题的题号用三个数字表示,第一个数字表示书中的章号,第二个数字表示书中的节号,第三个数字表示习题的题号.每章习题分基本题与难题两类,两者用星号隔开.基本题中计算题与概念题的数量,对初学者来说稍多些,但基本上可以全做;证明题的数量较多,对于我们认为难的题都给出了提示,这部分题,初学者不必全做,能做一半也就可以了.

习题集中第0章至第十四章习题由林源渠和方企勤两同志编写,其中定积分与级数的一部分题目是沈燮昌同志编的.第十五章

至第十九章习题由李正元同志编写,第二十章至第二十四章习题由廖可人同志编写.我系担任过数学分析习题课的同志曾使用本习题集初稿进行教学,并提出宝贵意见,欧阳光中副教授、董延闾教授审阅书稿时对习题集提出了不少宝贵意见,高等教育出版社的文小西同志在书稿通读加工中也提出不少宝贵意见,在此向他们表示深深的谢意.

编 者

一九八五年六月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目录

第〇章 预备知识	(1)
归纳法	(1)
绝对值与不等式	(2)
第一章 函数	(4)
函数概念	(4)
函数的几种特性	(6)
复合函数与反函数	(8)
第二章 极限	(11)
序列极限定义	(11)
序列极限的性质与运算	(13)
确界与单调有界序列	(15)
函数极限	(18)
函数极限概念的推广	(19)
两个重要极限	(21)
无穷小量的阶及无穷大量的阶的比较	(22)
用肯定语气叙述极限不存在	(23)
第三章 连续	(25)
连续与间断	(25)
连续函数的运算	(26)
中间值性质	(27)
初等函数的连续性	(28)
最大、最小值	(28)
一致连续性	(29)
第四章 导数与微分	(34)

导数概念	(34)
导数的几何意义与极值	(35)
导数的四则运算	(36)
复合函数求导	(38)
反函数与参数表示的函数求导	(41)
微分	(43)
高阶导数与高阶微分	(44)
第五章 利用导数研究函数	(50)
罗尔中值定理	(50)
拉格朗日中值定理	(51)
柯西中值定理	(53)
洛必达法则	(54)
皮亚诺余项的泰勒公式	(56)
拉格朗日余项的泰勒公式	(58)
函数的升降与极值	(61)
函数的凹凸与拐点	(64)
函数作图	(66)
方程求根	(67)
第六章 不定积分	(70)
原函数与不定积分	(70)
不定积分的线性性质	(70)
第一换元法	(71)
第二换元法	(73)
分部积分法	(74)
有理函数的积分	(75)
三角函数有理式的积分	(76)
无理函数的积分	(77)
第七章 定积分	(79)
定积分概念	(79)
微积分基本定理	(80)
可积函数	(82)

定积分性质	(84)
变限定积分	(88)
换元法	(90)
分部积分法	(92)
积分第二中值定理	(95)
近似计算	(97)
第八章 定积分应用	(104)
平面图形的面积	(104)
由截平面的面积求体积	(105)
平面曲线的弧长与曲率	(106)
旋转体侧面积	(108)
物理应用	(108)
第九章 实数空间	(112)
实数与极限	(112)
确界与区间套	(113)
紧性定理	(115)
完备性定理	(116)
连续函数的性质	(117)
压缩映象原理	(118)
上极限与下极限	(120)
第十章 反常积分	(126)
无穷积分的概念	(126)
无穷积分收敛性判别法	(127)
瑕积分的概念	(129)
瑕积分收敛性判别法	(130)
第十一章 数值级数	(134)
数值级数的基本概念与性质	(134)
正项级数	(135)
任意项级数	(138)
收敛级数的性质	(142)
第十二章 函数项级数	(148)

函数序列及函数级数的一致收敛性	(148)
一致收敛判别法	(150)
一致收敛的函数序列与函数级数的性质	(152)
第十三章 幂级数	(158)
幂级数的收敛半径与收敛区间	(158)
幂级数的性质	(160)
初等函数的泰勒级数展开	(161)
斯特林公式	(164)
第十四章 傅里叶级数	(167)
基本三角函数系	(167)
周期函数的傅里叶级数	(168)
傅里叶级数的收敛性	(170)
任意区间上的傅里叶级数	(173)
傅里叶级数的平均收敛性	(174)
第十五章 欧氏空间与多元函数	(178)
m 维欧氏空间	(178)
欧氏空间中的点集	(179)
m 维欧氏空间的性质	(181)
多元向量函数	(182)
多元函数的极限	(184)
多元函数的连续性	(186)
第十六章 多元数值函数微分学	(191)
偏导数	(191)
全微分与可微性	(193)
复合函数的偏导数与可微性	(197)
方向导数	(200)
高阶偏导数和高阶全微分	(203)
泰勒公式	(208)
由一个方程确定的隐函数及其微分法	(209)
第十七章 多元向量函数微分学	(214)
线性变换	(214)

向量函数的可微性与导数	(215)
反函数及其微分法	(218)
由方程组确定的隐函数及其微分法	(220)
函数相关性	(224)
第十八章 多元函数微分学的应用——几何应用与	
极值问题	(228)
曲线的表示法和它的切线	(228)
空间曲面的表示法和它的切平面	(229)
简单极值问题	(231)
条件极值问题	(234)
最小二乘法	(237)
第十九章 含参变量的积分	(241)
含参变量的定积分	(241)
含参变量的反常积分	(243)
计算含参变量积分的几个例子	(246)
欧拉积分——B 函数与 Γ 函数	(248)
第二十章 重积分	(252)
$\mathbf{R}^n$ 空间图形的若尔当测度	(252)
在 $\mathbf{R}^n$ 上的黎曼积分	(253)
化重积分为累次积分	(255)
重积分的变量替换	(261)
重积分的变量替换(续)	(265)
重积分在力学上的应用	(268)
第二十一章 曲线积分	(277)
与曲线有关的一些概念	(277)
第一型曲线积分	(279)
第二型曲线积分	(280)
平面上的第二型曲线积分与格林公式	(282)
第二十二章 曲面积分	(289)
曲面概念与曲面面积	(289)
第一型曲面积分	(290)

曲面的侧	(291)
第二型曲面积分	(292)
第二十三章 场论	(294)
向量场的通量、散度和高斯公式	(294)
向量场的环量和旋度	(298)
保守场与势函数	(300)
第二十四章 微分形式与斯托克斯公式	(304)
微分形式的定义	(304)
外微分	(304)
微分形式的变量替换	(305)

第○章

预备知识

归纳法

0.1 用数学归纳法证明下列各题:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$(3) |\sin nx| \leq n |\sin x|;$$

$$(4) \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cdots \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha} (\alpha \neq k\pi, k \text{ 为整数}).$$

0.2 求证:如果论断

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$$

对 $n=k$ 是成立的,则这个论断对 $n=k+1$ 也是成立的. 解释这个论断不是对任意 n 成立.

0.3 $\forall x > -1, x \neq 0, n \geq 2$, 求证:

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

0.4 求证:

$$(1) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n=2, 3, \cdots);$$

$$(2) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=2, 3, \dots);$$

$$(3) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \quad (n=1, 2, \dots).$$

0.5 $\forall n \geq 1$, 求证:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

绝对值与不等式

0.6 求证 $|a-b| \leq |a| + |b|$. 问下面证法是否正确?

$$|a-b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|.$$

0.7 求证: $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k|.$

0.8 解下列不等式:

$$(1) |x-1| < 3; \quad (2) |3-2x| < 1;$$

$$(3) |1+2x| \leq 1; \quad (4) \left| 5 - \frac{1}{x} \right| < 1;$$

$$(5) |x-1| > 2; \quad (6) |x+2| > 5;$$

$$(7) |x^2-2| \leq 1; \quad (8) |x-5| < |x+1|.$$

0.9 设 $a < c < b$, 求证:

$$|c| \leq \max(|a|, |b|).$$

0.10 求证:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

0.11 求证:

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2},$$

$$\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

并解释其几何意义.

0.12 求证:

$$|a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \quad (p > 0).$$

0.13 设 $a, b > 0$. 求证:

$$(1) (a+b)^p \geq a^p + b^p \quad (p > 1);$$

$$(2) (a+b)^p \leq a^p + b^p \quad (0 < p < 1).$$

0.14 求证: 对任意实数 a, b , 有

$$\max(|a+b|, |a-b|, |1-b|) \geq \frac{1}{2}.$$

0.15 求证:

$$\frac{1}{4n} < \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^2 < \frac{1}{2n}.$$

0.16 令 $A_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, $B_n = \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|)$, 求证:

$$|A_n - 1| \leq B_n - 1.$$