

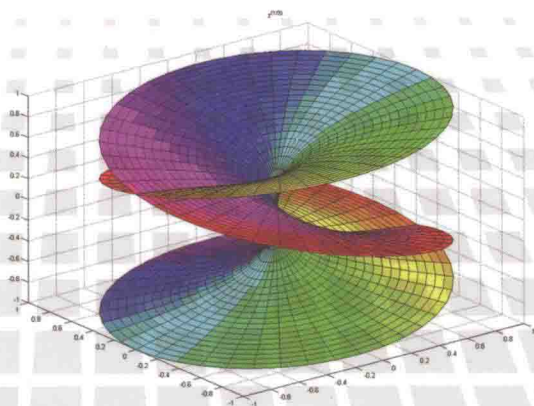


普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

下册

丁巍 冯艳 卢立才 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

下册

主 编 丁 巍 冯 艳 卢立才

副主编 耿玉霞 耿 莹

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材包括《高等数学》上、下册,《线性代数》。编者根据多年的教学改革和教学实践经验,结合普通高等学校理工类、经管类专业对高等数学的基本要求,参照教育部最新颁布的研究生入学考试的数学考试大纲编写。

本书为《高等数学》下册,包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。本书各章配有本章小结,配有习题和自测题及参考答案。内容安排由浅入深,既有基本理论和方法的论述,又有应用背景的介绍;为适合理科学生的知识结构和具体需要,教材编写中进行了一些新的尝试,力求内容涵盖面广,富有启发性、应用性和趣味性。

本书适用于高等院校理工、管理等专业,也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 丁巍, 冯艳, 卢立才主编. —北京: 中国铁道出版社, 2013. 8
普通高等学校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-113-16881-0

I. ①高… II. ①丁… ②冯… ③卢… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 173806 号

书 名: 高等数学·下册
作 者: 丁 巍 冯 艳 卢立才 主编

策 划: 李小军 读者热线: 400-668-0820
责任编辑: 李小军 徐盼欣
封面设计: 付 巍
封面制作: 白 雪
责任印制: 李 佳

出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)
网 址: <http://www.51eds.com>
印 刷: 三河市兴达印务有限公司
版 次: 2013年8月第1版 2013年8月第1次印刷
开 本: 720mm×960mm 1/16 印张: 13.25 字数: 264千
书 号: ISBN 978-7-113-16881-0
定 价: 26.00元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书,如有印制质量问题,请与本社教材图书营销部联系调换。电话:(010)63550836
打击盗版举报电话:(010)63549504

前 言

为适应 21 世纪高等院校学生对数学的要求,多年来我校在数学教学改革方面进行了不懈的探索。编者根据多年的教学实践经验,结合理工、管理等专业对高等数学课程的基本要求,再参照教育部最新颁布的研究生入学考试的数学考试大纲,我校组织编写了《高等数学》上、下册,《线性代数》系列教材。本册为《高等数学》下册。本书在编写过程中,着重介绍高等数学的基本概念、基本理论和基本方法。且尽量体现以下特点:

1. 对基本概念、基本理论和重要定理注重其实际意义的解释说明,力保知识的系统性和连贯性,注重对解题方法的归纳,注重定理的实际应用。

2. 书中的例题和习题尽量体现专业特色,由浅入深,循序渐进。对一些有代表性的典型例题进行着重分析,归纳出该类习题的解题方法和技巧,使学生在以后的练习中“有法可依”。

3. 结构清晰,每章均配有本章小结,将本章的主要知识点、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳,并附有知识体系图,以便更好地帮助学生复习巩固整章的内容。

4. 每章配有习题,体现了教学的基本要求,供学生平时练习和巩固;每章配有自测题,供学生进行一章的复习与检验。书末给出了各章习题与自测题的参考答案,供学生参考。

本书内容包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。

本书由沈阳师范大学丁巍、冯艳、卢立才担任主编,由耿玉霞、耿莹担任副主编。由丁巍统稿并对全书进行了认真仔细的修改、校订。本书在编写过程中,参考了众多的国内外教材,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中难免存在错误和不妥之处,恳请同行与广大读者不吝赐教。

编 者

2013 年 6 月

目 录

第 7 章 空间解析几何	1
§ 7.1 向量及其线性运算	1
7.1.1 向量的概念(1)	7.1.2 向量的线性运算(2)
7.1.3 空间直角坐标系(3)	7.1.4 向量的坐标(5)
7.1.5 向量的模与方向余弦(6)	
§ 7.2 向量的数量积和向量积	7
7.2.1 向量的数量积(7)	7.2.2 向量的向量积(8)
§ 7.3 平面及其方程	11
7.3.1 平面的点法式方程(11)	7.3.2 平面的一般式方程(12)
7.3.3 两平面的位置关系(14)	
§ 7.4 空间直线及其方程	15
7.4.1 空间直线的方程(15)	7.4.2 两直线间的位置关系(17)
7.4.3 直线与平面间的位置关系(18)	
§ 7.5 空间曲面和曲线	18
7.5.1 曲面方程的概念(19)	7.5.2 常见的曲面方程及其图形(19)
7.5.3 空间曲线(25)	
本章小结	26
习题 7	27
自测题 7	31
第 8 章 多元函数微分学	34
§ 8.1 多元函数的概念	34
8.1.1 点集知识简介(34)	8.1.2 多元函数的概念(35)
8.1.3 多元函数的极限(37)	8.1.4 多元函数的连续性(39)
§ 8.2 偏导数	41
8.2.1 偏导数的概念(41)	8.2.2 高阶偏导数(43)
§ 8.3 全微分	45
8.3.1 全微分的定义(46)	
* 8.3.2 全微分在近似计算中的应用(48)	
§ 8.4 多元复合函数的求导法则	49

8.4.1 多元复合函数的求导法则概述(49)	
8.4.2 全微分形式的不变性(53)	
§ 8.5 隐函数求导法则	54
8.5.1 一个方程情形(54)	8.5.2 方程组情形(57)
§ 8.6 多元函数微分学的几何应用	58
8.6.1 一元向量值函数及其导数(58)	8.6.2 空间曲线的切线与法平面(60)
8.6.3 曲面的切平面与法线(62)	
§ 8.7 方向导数和梯度	63
8.7.1 方向导数(63)	8.7.2 梯度(65)
§ 8.8 多元函数的极值	67
8.8.1 二元函数的极值和最值(67)	8.8.2 条件极值(70)
§ 8.9 二元函数的泰勒公式	73
8.9.1 二元函数的泰勒公式(73)	8.9.2 极值充分条件的证明(75)
本章小结	77
习题 8	79
自测题 8	81
第 9 章 重积分	84
§ 9.1 二重积分	84
9.1.1 二重积分的概念(84)	9.1.2 二重积分的性质(86)
§ 9.2 二重积分的计算	88
9.2.1 在直角坐标系下计算二重积分(88)	
9.2.2 在极坐标系下计算二重积分(92)	
9.2.3 无界区域上的反常二重积分(94)	
§ 9.3 三重积分	95
9.3.1 三重积分的概念(95)	
9.3.2 直角坐标系下三重积分的计算(96)	
9.3.3 柱面坐标系下三重积分的计算(99)	
9.3.4 球面坐标系下三重积分的计算(101)	
§ 9.4 重积分的应用	104
9.4.1 几何应用(104)	9.4.2 物理应用(105)
本章小结	109
习题 9	110
自测题 9	113

第 10 章 曲线积分与曲面积分	116
§ 10.1 对弧长的曲线积分	116
10.1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质(116)	
10.1.2 对弧长曲线积分的计算方法(117)	
§ 10.2 对坐标的曲线积分	120
10.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质(120)	
10.2.2 对坐标曲线积分的计算方法(122)	
§ 10.3 格林公式及其应用	124
10.3.1 格林公式(124)	
10.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件(127)	
§ 10.4 对面积的曲面积分	130
10.4.1 对面积的曲面积分的概念与性质(130)	
10.4.2 对面积曲面积分的计算方法(131)	
§ 10.5 对坐标的曲面积分	132
10.5.1 对坐标的曲面积分的概念与性质(132)	
10.5.2 对坐标曲面积分的计算方法(135)	
§ 10.6 高斯公式与斯托克斯公式	137
10.6.1 高斯公式(137)	
10.6.2 斯托克斯公式(139)	
本章小结	140
习题 10	141
自测题 10	143
第 11 章 无穷级数	145
§ 11.1 常数项级数的概念和性质	145
11.1.1 常数项级数的概念(145)	
11.1.2 无穷级数的基本性质(149)	
§ 11.2 正项级数的审敛法	152
§ 11.3 任意项级数	159
11.3.1 交错级数及其审敛法(160)	
11.3.2 绝对收敛与条件收敛(162)	
§ 11.4 幂级数	164
11.4.1 函数项级数的概念(164)	
11.4.2 幂级数及其收敛性(165)	
11.4.3 幂级数的运算(170)	
11.4.4 幂级数和函数的性质(171)	
§ 11.5 函数展开成幂级数	173
11.5.1 泰勒(Taylor)级数(173)	
11.5.2 函数展开成幂级数(175)	

§ 11.6 傅里叶级数	180
11.6.1 三角级数 三角函数系的正交性(180)	
11.6.2 周期为 2π 的函数的傅里叶级数(181)	
11.6.3 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数(187)	
本章小结	189
习题 11	190
自测题 11	195
参考答案	197

第7章 空间解析几何

用代数的方法研究空间几何图形,又利用空间几何图形的直观解决代数问题,这就是空间解析几何,它是平面解析几何的推广.本章将介绍空间解析几何的有关知识,它是多元函数微积分的基础.

§ 7.1 向量及其线性运算

向量在物理学、力学以及其他应用学科中用途很广泛,向量代数是研究空间解析几何的工具.

7.1.1 向量的概念

在物理学以及其他应用科学中,常会遇到这样一类量:它们既有大小又有方向,如力、力矩、位移、速度、加速度等,这类量称做**向量**或**矢量**.

向量常用有向线段来表示.以 A 为起点、 B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$,也可用上加箭头的小写字母或粗体字母表示,如 $\vec{a}$ 或 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{F}$ 等,如图 7-1 所示.

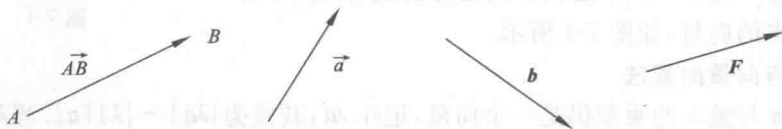


图 7-1

向量的大小称做向量的**模**.向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$; 向量 $\mathbf{a}$ 的模记作 $|\vec{a}|$ 或 $|\mathbf{a}|$; 模为 0 的向量记作 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ 向量无确定方向; 模等于 1 的向量称做**单位向量**.

在实际问题中,有些向量与其起点有关,有些向量与其起点无关,我们只研究与起点无关的向量,即一个向量在保持其大小和方向不变的前提下可以自由平移,这种向量称为**自由向量**(简称**向量**).

如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模相等,方向相同,则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ **相等**,记作 $\vec{a} = \vec{b}$; 如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模相等、方向相反,则称向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 互为**负向量**,记作 $\vec{a} = -\vec{b}$ 或 $\vec{b} = -\vec{a}$.

7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

将向量 a 与 b 的起点放在一起,并以 a 和 b 为邻边作平行四边形,则从起点到对角顶点的向量称为向量 a 与 b 的和向量,记作 $a+b$,如图 7-2 所示.这种求向量和的方法称为向量加法的平行四边形法则.

由于向量可以平移,所以,若把向量 b 的起点放到向量 a 的终点上,则自 a 的起点到 b 的终点的向量即为 $a+b$ 向量,如图 7-3 所示.这种求向量和的方法称为向量加法的三角形法则.

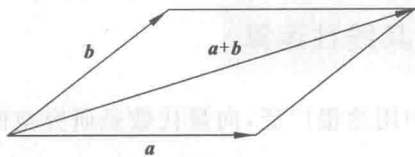


图 7-2

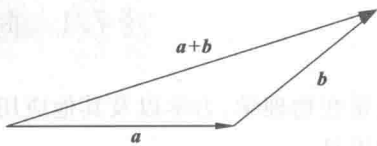


图 7-3

向量加法满足:

交换律: $a+b=b+a$;

结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

向量的减法可视为: $a-b=a+(-b)$.

向量的减法也可按三角形法则进行,只要把 a 与 b 的起点放在一起, $a-b$ 即是以 b 的终点为起点,以 a 的终点为终点的向量,如图 7-4 所示.

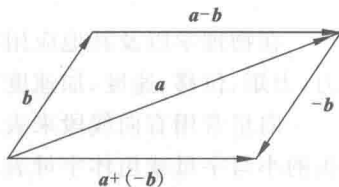


图 7-4

2. 数与向量的乘法

向量 a 与数 λ 的乘积仍是一个向量,记作 λa ,其模为 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$.当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向;当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向;当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

数与向量的乘积满足:

结合律: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda a)$ (λ, μ 为常数);

分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

向量的加法运算及数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

设 a 是一个非零向量,常把与 a 同向的单位向量记为 a^0 ,那么

$$a^0 = \frac{a}{|a|}.$$

例 1 证明三角形两边中点连线平行于第三边,且等于第三边的一半.

证 如图 7-5 所示,已知 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的中点.

设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b$, 则 $\overrightarrow{BC} = b - a$. 又

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{a}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a});$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{故 } \overrightarrow{DE} // \overrightarrow{BC}, \text{ 且 } |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

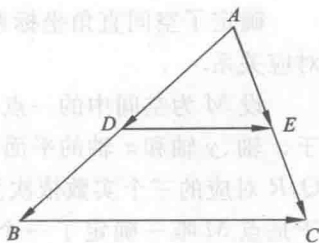


图 7-5

7.1.3 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系概述

为了确定空间任意一点的位置,需要建立空间直角坐标系.过空间一定点 O ,作三条互相垂直的数轴,它们都是以 O 为原点,且一般具有相同的长度单位.这三条坐标轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称为坐标轴.通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, z 轴则是铅直线;这样的配置要符合右手定则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 7-6 所示.这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系,点 O 称为坐标原点.

空间直角坐标系中任意两条坐标轴都可以确定一个平面,称为坐标平面,由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 平面;由 y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 平面;由 x 轴和 z 轴所确定的平面称为 xOz 平面.三个坐标平面把整个空间分成八个部分,依次称为 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 卦限,如图 7-7 所示,坐标平面不属于任何卦限.

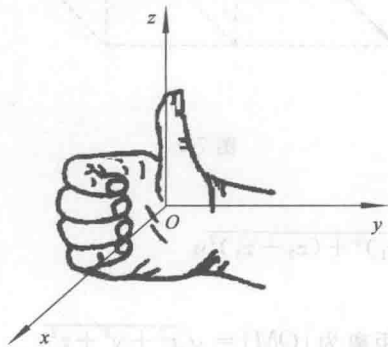


图 7-6

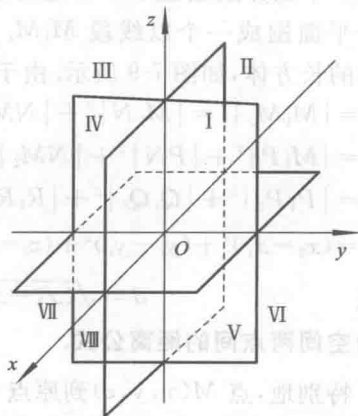


图 7-7

确定了空间直角坐标系后,就可以建立起空间的点与有序实数组 (x, y, z) 之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点,过点 M 分别作一个垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面,它们与坐标轴的交点 P, Q, R 对应的三个实数依次为 x, y, z ,如图7-8所示,于是点 M 唯一确定了一个有序实数组 (x, y, z) .反之,如果给定了一个有序实数组 (x, y, z) ,依次在 x 轴、 y 轴、 z 轴上取与 x, y, z 相对应的点 P, Q, R ,然后过点 P, Q, R 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的三个平面,这三个平面交于空间一点 M .因此,有序实数组 (x, y, z) 与空间点 M 一一对应.并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.坐标为 (x, y, z) 的点 M ,记为 $M(x, y, z)$.

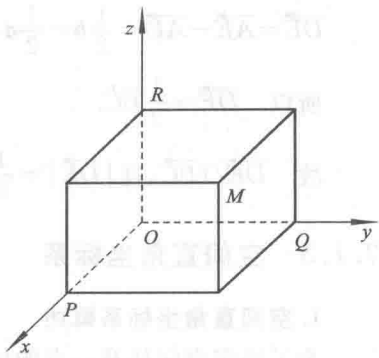


图 7-8

显然,原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$; x 轴、 y 轴和 z 轴上的点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$; xOy 、 yOz 、 xOz 坐标平面上的点的坐标分别为 $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$, $(x, 0, z)$.

2. 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点,可以用这两个点的坐标来表示它们之间的距离 d .过 M_1, M_2 各作三个平面分别垂直于三个坐标轴,这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体,如图7-9所示.由于

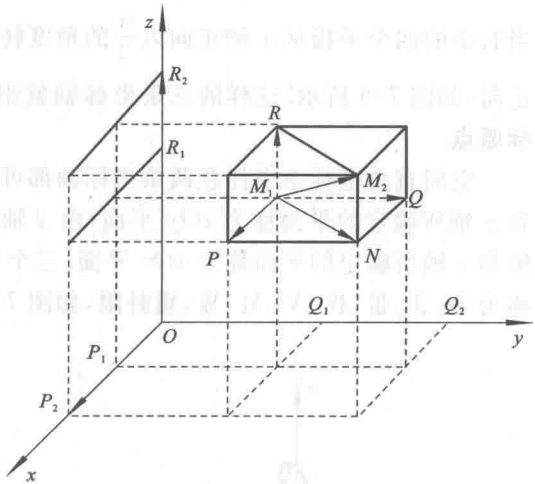


图 7-9

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

所以

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

即为空间两点间的距离公式.

特别地,点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为 $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

例 2 在 z 轴上求与两点 $A(-1, 2, 3)$ 和 $B(2, 6, -2)$ 等距离的点.

解 由于所求的点 P 在 z 轴上,因此设该点的坐标为 $(0, 0, z)$,依题意有 $|PA| =$

$|PB|$, 由两点间的距离公式, 得

$$\sqrt{(0+1)^2+(0-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(0-6)^2+(z+2)^2};$$

解得 $z=-3$. 所以, 所求的点为 $P(0,0,-3)$.

7.1.4 向量的坐标

在给定的空间直角坐标系中, 沿 x 轴、 y 轴和 z 轴的正方向各取一单位向量, 分别记为 i, j, k , 称它们为基本单位向量.

设点 $M(x, y, z)$, 过点 M 分别作 x 轴、 y 轴和 z 轴的垂面, 交 x 轴、 y 轴、 z 轴于 A, B, C , 如图 7-10 所示. 显然, $\overrightarrow{OA}=xi$, $\overrightarrow{OB}=yj$, $\overrightarrow{OC}=zk$. 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= xi + yj + zk.\end{aligned}$$

上式表明, 任一以原点为起点, 以点 $M(x, y, z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 都可表示为坐标与所对应的基本单位向量乘积之和. 这个表达式称做向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式, 简记为

$$\overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

利用向量的坐标, 可得向量的加法及向量与数量乘积的运算法则:

设 $a=(a_1, a_2, a_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$, 则

$$(1) a \pm b = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3);$$

$$(2) \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \lambda \in \mathbf{R}.$$

例 3 设 $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(0, 1, 3)$, $M_3(3, 0, -2)$ 为空间三点, 求:

$$(1) 3\overrightarrow{M_1M_2} + 2\overrightarrow{M_2M_3}; \quad (2) \overrightarrow{M_3M_1} - 4\overrightarrow{M_2M_3}.$$

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (0-1, 1+1, 3-2) = (-1, 2, 1);$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (3-0, 0-1, -2-3) = (3, -1, -5);$$

$$\overrightarrow{M_3M_1} = (1-3, -1-0, 2+2) = (-2, -1, 4);$$

因此

$$(1) 3\overrightarrow{M_1M_2} + 2\overrightarrow{M_2M_3} = (-3, 6, 3) + (6, -2, -10) = (3, 4, -7);$$

$$(2) \overrightarrow{M_3M_1} - 4\overrightarrow{M_2M_3} = (-2, -1, 4) - (12, -4, -20) = (-14, 3, 24).$$

例 4 设向量 $a=(a_1, a_2, a_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$, 且 b_1, b_2, b_3 不等于零. 试证: 如果

$$a // b, \text{ 则 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}; \text{ 反之, 结论也成立.}$$

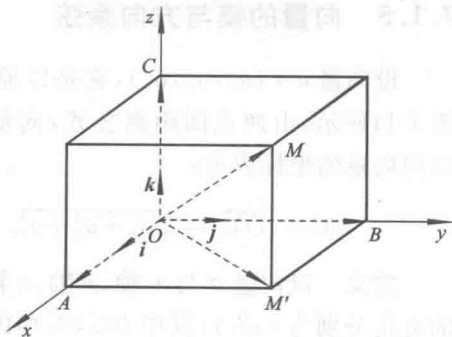


图 7-10

证 由 $a//b$, 得 $a=\lambda b$, 即 $(a_1, a_2, a_3)=\lambda(b_1, b_2, b_3)$, 则由法则(2)得 $a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda b_2, a_3=\lambda b_3$, 于是有 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

反之, 令 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda$, 则 $a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda b_2, a_3=\lambda b_3$, 所以

$$(a_1, a_2, a_3)=(\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3)=\lambda(b_1, b_2, b_3);$$

即 $a=\lambda b$, 于是 $a//b$.

7.1.5 向量的模与方向余弦

设向量 $a=(a_x, a_y, a_z)$, 它是以原点为起点, 以 $M(a_x, a_y, a_z)$ 为终点的向量, 如图 7-11 所示, 由两点间距离公式, 向量的模可以用向量的坐标表示:

$$|a|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

定义 设向量 a 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向的夹角分别为 α, β, γ (其中 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$) 称为向量 a 的方向角, 它们的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 a 的方向余弦.

一个向量 a 当它的三个方向角确定时, 则它的方向也就确定了, 当 $|a| \neq 0$ 时,

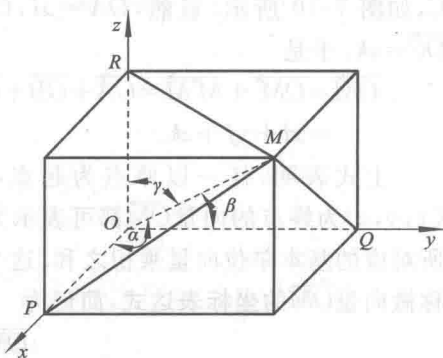


图 7-11

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

显然

$$a^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

例 5 已知 $M_1(1, 2, -1), M_2(0, 4, -3)$ 两点, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模和方向余弦及方向角.

解

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (0-1, 4-2, -3+1) = (-1, 2, -2);$$

所以

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

方向角

$$\alpha \approx 109^\circ 28', \quad \beta \approx 48^\circ 11', \quad \gamma \approx 131^\circ 49'.$$

§ 7.2 向量的数量积和向量积

7.2.1 向量的数量积

1. 向量的数量积的概念

设一物体在常力 F 的作用下,沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 ,如图 7-12 所示,则由物理学知,力 F 所做的功为 $W = |F| |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \theta$,其中 θ 为 F 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的夹角.

现实生活中,还会遇到许多由两个向量的模及其夹角的余弦之积构成的算式,为此,引入向量的数量积的概念.

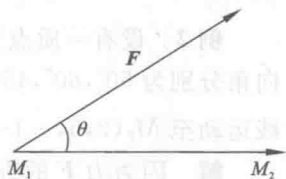


图 7-12

定义 1 设向量 a 与 b 的夹角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$,则称

$$|a| |b| \cos \theta$$

为向量 a 与 b 的数量积(或点积),记作 $a \cdot b$,即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta.$$

2. 数量积的运算律

由数量积的定义不难发现,数量积满足以下运算规律:

交换律: $a \cdot b = b \cdot a$;

分配律: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

结合律: $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$ (λ 是常数).

3. 数量积的坐标表示

因为 i, j, k 三个基本单位向量互相垂直,所以

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0, \quad i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1.$$

设向量 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x b_x i \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k + a_y b_x j \cdot i + \\ &\quad a_y b_y j \cdot j + a_y b_z j \cdot k + a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + a_z b_z k \cdot k \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \end{aligned}$$

即:两向量的数量积等于其对应坐标乘积之和,

$$a \cdot b = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

由定义 1 知,若两向量 a 与 b 互相垂直,则夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $a \cdot b = |a| |b| \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

反之,若非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 互相垂直. 因此有结论:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \text{即 } a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

例 1 求使向量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + m\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 互相垂直的 m 的值.

解 因为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$,

所以

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 3 - 3 \times m + 5 \times (-2) = 0.$$

解得

$$m = -\frac{4}{3}.$$

例 2 设有一质点开始位于点 $M_1(1, 2, -1)$ 处(坐标的长度单位为 m), 现有一方向角分别为 $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$, 大小为 100 N 的力 $\mathbf{F}$ 作用于该质点, 求该质点从点 M_1 作直线运动至 $M_2(2, 5, -1+3\sqrt{2})$ 时, 力 $\mathbf{F}$ 所做的功.

解 因为力 $\mathbf{F}$ 的方向角分别为 $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$, 所以, 与力 $\mathbf{F}$ 同向的单位向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^0 &= \cos 60^\circ \mathbf{i} + \cos 60^\circ \mathbf{j} + \cos 45^\circ \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= |\mathbf{F}| \mathbf{F}^0 = 100 \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k} \right) \\ &= 50\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 50\sqrt{2}\mathbf{k}; \end{aligned}$$

质点从点 $M_1(1, 2, -1)$ 移动到点 $M_2(2, 5, -1+3\sqrt{2})$, 其位移矢量为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= (2-1)\mathbf{i} + (5-2)\mathbf{j} + (-1+3\sqrt{2}+1)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\sqrt{2}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

力 $\mathbf{F}$ 所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = (50, 50, 50\sqrt{2}) \cdot (1, 3, 3\sqrt{2}) \\ &= 50 + 150 + 300 = 500(\text{J}). \end{aligned}$$

7.2.2 向量的向量积

1. 向量积的概念

引例 设 O 为杠杆 L 的支点, 有一个力 $\mathbf{F}$ 作用于杠杆上 P 点处, $\mathbf{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ , 如图 7-13 所示, 求力 $\mathbf{F}$ 对支点 O 的力矩.

由力学知识知道, 力 $\mathbf{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\mathbf{M}$, 其大小为

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| |\overrightarrow{OP}| \sin \theta.$$

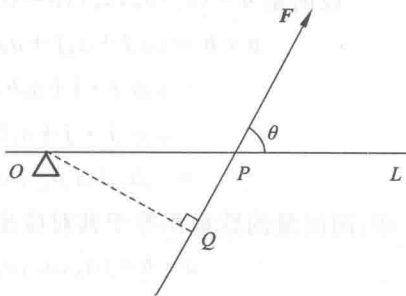


图 7-13

力矩 M 的方向规定: M 的方向垂直 $\overrightarrow{OP}$ 与 F 所在平面, 其正方向按右手法则确定, 如图 7-14 所示, 即当右手四指从 $\overrightarrow{OP}$ 以小于 π 的角度到 F 方向握拳时, 大拇指伸直所指的方向就是 M 的方向.

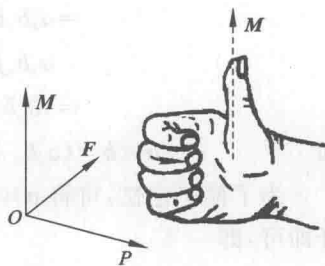


图 7-14

在工程技术领域, 有许多向量具有上述特征, 为此, 引入向量的向量积的概念.

定义 2 设有两个向量 a, b , 其夹角为 θ , 若向量 c 满足:

$$(1) |c| = |a| |b| \sin \theta;$$

(2) c 垂直于由向量 a, b 所确定的平面, 它的正方向由右手法则确定. 则称向量 c 为向量 a 与 b 的向量积(或叉积), 记作 $a \times b$, 即

$$c = a \times b.$$

由定义 2, 作用在点 P 的力 F 对杠杆上支点 O 的力矩 M 可表示为

$$M = \overrightarrow{OP} \times F.$$

若把向量 a, b 的起点放在一起. 并以 a, b 为邻边作一平行四边形, 则向量 a 与 b 的向量积的模 $|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$ 即为该平行四边形的面积, 如图 7-15 所示.

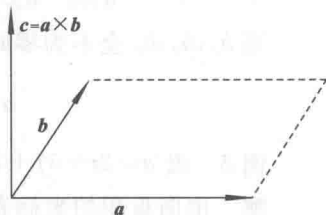


图 7-15

2. 向量积的运算律

由向量积的定义可得, 向量积满足以下运算规律:

反交换律: $a \times b = -b \times a$;

分配律: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a;$$

结合律: $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$ (λ 是常数).

注意: 向量的向量积一般不满足交换律, 即

$$a \times b \neq b \times a \quad (\text{除非 } a \times b = 0).$$

由向量积的定义可知:

$$(1) i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j;$$

$$(2) \text{两个非零向量 } a, b \text{ 相互平行的充分必要条件是 } a \times b = 0.$$

特别地, $a \times a = 0$.

规定零向量与任何向量平行.

3. 向量积的坐标表示

设向量 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$, 由于 $i \times i = 0, j \times j = 0, k \times k = 0$. 则

$$a \times b = (a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k)$$