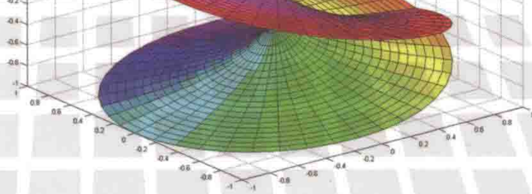
普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

下册

丁 巍　冯 艳　卢立才　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十二五"规划教材

高等数学

下　册

主　编　丁　巍　冯　艳　卢立才
副主编　耿玉霞　耿　莹

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材包括《高等数学》上、下册，《线性代数》。编者根据多年的教学改革和教学实践经验，结合普通高等学校理工类、经管类专业对高等数学的基本要求，参照教育部最新颁布的研究生入学考试的数学考试大纲编写。

本书为《高等数学》下册，包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。本书各章配有本章小结，配有习题和自测题及参考答案。内容安排由浅入深，既有基本理论和方法的论述，又有应用背景的介绍；为适合理科学生的知识结构和具体需要，教材编写中进行了一些新的尝试，力求内容涵盖面广，富有启发性、应用性和趣味性。

本书适用于高等院校理工、管理等专业，也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 丁巍，冯艳，卢立才主编. —北京：中国铁道出版社，2013.8

普通高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-113-16881-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①丁… ②冯… ③卢… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 173806 号

书　　名：高等数学·下册
作　　者：丁　巍　冯　艳　卢立才　主编

策　　划：李小军　　**读者热线：**400-668-0820
责任编辑：李小军　徐盼欣
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市兴达印务有限公司
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：720mm×960mm　1/16　**印张：**13.25　**字数：**264 千
书　　号：ISBN 978-7-113-16881-0
定　　价：26.00 元

前　言

为适应21世纪高等院校学生对数学的要求，多年来我校在数学教学改革方面进行了不懈的探索。编者根据多年的教学实践经验，结合理工、管理等专业对高等数学课程的基本要求，再参照教育部最新颁布的研究生入学考试的数学考试大纲，我校组织编写了《高等数学》上、下册，《线性代数》系列教材。本册为《高等数学》下册。本书在编写过程中，着重介绍高等数学的基本概念、基本理论和基本方法。且尽量体现以下特点：

1. 对基本概念、基本理论和重要定理注重其实际意义的解释说明，力保知识的系统性和连贯性，注重对解题方法的归纳，注重定理的实际应用。

2. 书中的例题和习题尽量体现专业特色，由浅入深，循序渐进。对一些有代表性的典型例题进行着重分析，归纳出该类习题的解题方法和技巧，使学生在以后的练习中"有法可依"。

3. 结构清晰，每章均配有本章小结，将本章的主要知识点、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳，并附有知识体系图，以便更好地帮助学生复习巩固整章的内容。

4. 每章配有习题，体现了教学的基本要求，供学生平时练习和巩固；每章配有自测题，供学生进行一章的复习与检验。书末给出了各章习题与自测题的参考答案，供学生参考。

本书内容包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。

本书由沈阳师范大学丁巍、冯艳、卢立才担任主编，由耿玉霞、耿莹担任副主编。由丁巍统稿并对全书进行了认真仔细的修改、校订。本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在错误和不妥之处，恳请同行与广大读者不吝赐教。

编　者

2013年6月

目　录

第7章 空间解析几何

用代数的方法研究空间几何图形，又利用空间几何图形的直观解决代数问题，这就是空间解析几何，它是平面解析几何的推广. 本章将介绍空间解析几何的有关知识，它是多元函数微积分的基础.

§7.1 向量及其线性运算

向量在物理学、力学以及其他应用学科中用途很广泛，向量代数是研究空间解析几何的工具.

7.1.1 向量的概念

在物理学以及其他应用科学中，常会遇到这样一类量：它们既有大小又有方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，这类量称做**向量**或**矢量**.

向量常用有向线段来表示. 以 A 为起点、B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，也可用上加箭头的小写字母或粗体字母表示，如 $\vec{a}$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F}$ 等，如图 7-1 所示.

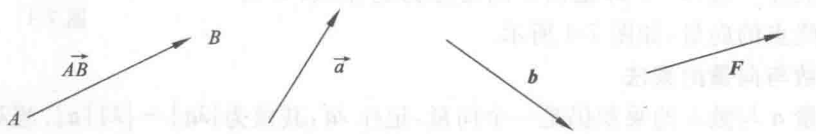


图 7-1

向量的大小称做向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\overrightarrow{AB}|$ ；向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\vec{a}|$或$|\boldsymbol{a}|$；模为 0 的向量记作 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{0}$ 向量无确定方向；模等于 1 的向量称做**单位向量**.

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关，我们只研究与起点无关的向量，即一个向量在保持其大小和方向不变的前提下可以自由平移，这种向量称为**自由向量**(简称**向量**).

如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模相等，方向相同，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ **相等**，记作 $\vec{a}=\vec{b}$；如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模相等、方向相反，则称向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 互为**负向量**，记作 $\vec{a}=-\vec{b}$ 或 $\vec{b}=-\vec{a}$.

7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，并以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7-2 所示. 这种求向量和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

由于向量可以平移，所以，若把向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点上，则自 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 向量，如图 7-3 所示. 这种求向量和的方法称为向量加法的**三角形法则**.

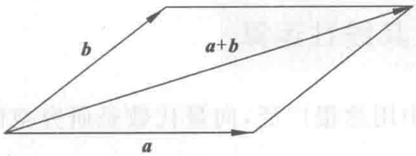


图 7-2

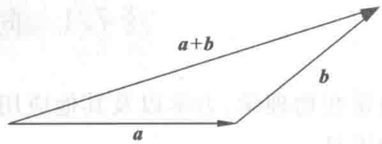


图 7-3

向量加法满足：

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量的减法可视为：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量的减法也可按三角形法则进行，只要把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 即是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量，如图 7-4 所示.

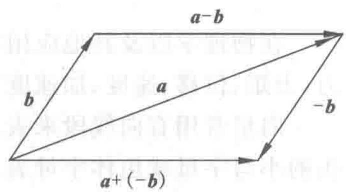


图 7-4

2. 数与向量的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

数与向量的乘积满足：

结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$ （λ,μ 为常数）；

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法运算及数与向量的乘法统称为向量的**线性运算**.

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，常把与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$，那么

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

例 1 证明三角形两边中点连线平行于第三边，且等于第三边的一半.

证 如图 7-5 所示，已知 D,E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 又

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a});$

所以　$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

故　$\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{BC}$，且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$

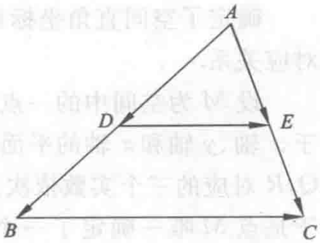


图 7-5

7.1.3　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系概述

为了确定空间任意一点的位置，需要建立空间直角坐标系. 过空间一定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都是以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位. 这三条坐标轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，z 轴则是铅直线；这样的配置要符合右手定则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7-6 所示. 这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**，点 O 称为**坐标原点**.

空间直角坐标系中任意两条坐标轴都可以确定一个平面，称为**坐标平面**，由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 平面；由 y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 平面；由 x 轴和 z 轴所确定的平面称为 xOz 平面. 三个坐标平面把整个空间分成八个部分，依次称为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 7-7 所示，坐标平面不属于任何卦限.

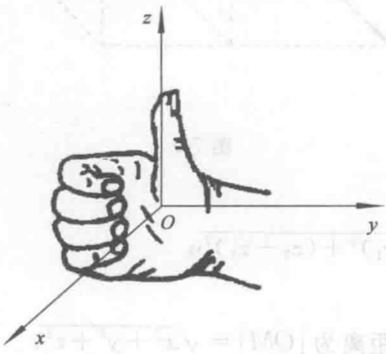


图 7-6

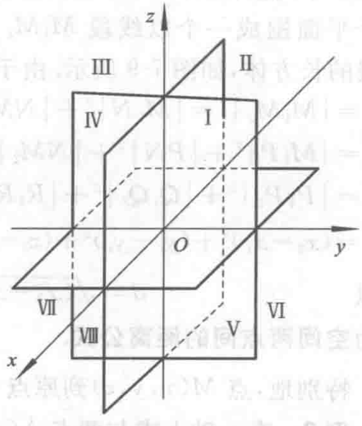


图 7-7

确定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序实数组(x,y,z)之间的对应关系.

设M为空间中的一点，过点M分别作一个垂直于x轴、y轴和z轴的平面，它们与坐标轴的交点P，Q，R对应的三个实数依次为x，y，z，如图 7-8 所示，于是点M唯一确定了一个有序实数组(x,y,z). 反之，如果给定了一个有序实数组(x,y,z)，依次在x轴、y轴、z轴上取与x，y，z相对应的点P，Q，R，然后过点P，Q，R分别作垂直于x轴、y轴和z轴的三个平面，这三个平面交于空间一点M. 因此，有序实数组(x,y,z)与空间点M一一对应. 并依次称x，y，z为点M的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为(x,y,z)的点M，记为$M(x,y,z)$.

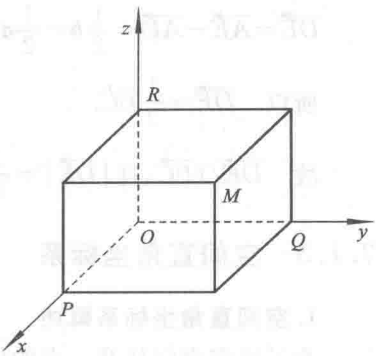


图 7-8

显然，原点的坐标为$O(0,0,0)$；x轴、y轴和z轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；xOy、yOz、xOz坐标平面上的点的坐标分别为$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

2. 空间两点间的距离

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，可以用这两个点的坐标来表示它们之间的距离d. 过M_1，M_2各作三个平面分别垂直于三个坐标轴，这六个平面围成一个以线段M_1M_2为对角线的长方体，如图 7-9 所示. 由于

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \\ &= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2. \end{aligned}$$

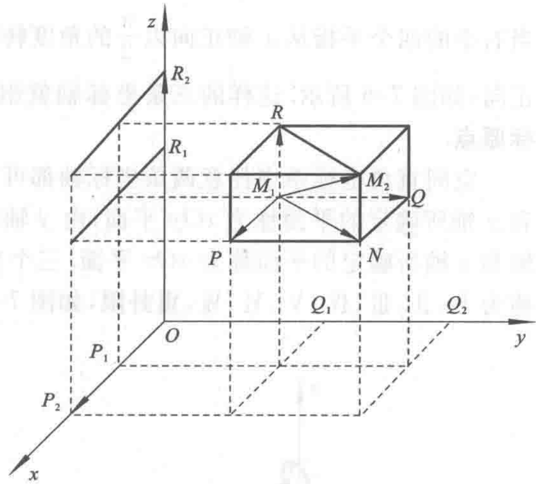


图 7-9

所以
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2};$$
即为空间两点间的距离公式.

特别地，点$M(x,y,z)$到原点$O(0,0,0)$的距离为$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 2 在z轴上求与两点$A(-1,2,3)$和$B(2,6,-2)$等距离的点.

解 由于所求的点P在z轴上，因此设该点的坐标为$(0,0,z)$，依题意有$|PA|=$

$|PB|$,由两点间的距离公式,得

$$\sqrt{(0+1)^2+(0-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(0-6)^2+(z+2)^2};$$

解得 $z=-3$. 所以,所求的点为 $P(0,0,-3)$.

7.1.4 向量的坐标

在给定的空间直角坐标系中,沿 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向各取一单位向量,分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称它们为**基本单位向量**.

设点 $M(x,y,z)$,过点 M 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂面,交 x 轴、y 轴、z 轴于 A,B,C,如图 7-10 所示. 显然,$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$. 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

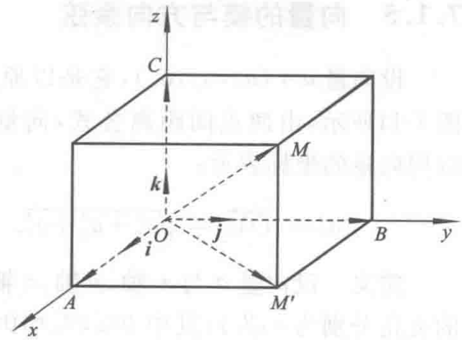


图 7-10

上式表明,任一以原点为起点,以点 $M(x,y,z)$为终点的向量$\overrightarrow{OM}$都可表示为坐标与所对应的基本单位向量乘积之和. 这个表达式称做向量$\overrightarrow{OM}$的**坐标表达式**,简记为

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z).$$

利用向量的坐标,可得向量的加法及向量与数量乘积的运算法则:

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

(1)$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$;

(2)$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$,$\lambda\in\mathbf{R}$.

例 3　设 $M_1(1,-1,2)$,$M_2(0,1,3)$,$M_3(3,0,-2)$为空间三点,求:

(1)$3\overrightarrow{M_1M_2}+2\overrightarrow{M_2M_3}$;　(2)$\overrightarrow{M_3M_1}-4\overrightarrow{M_2M_3}$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(0-1,1+1,3-2)=(-1,2,1)$;

$\overrightarrow{M_2M_3}=(3-0,0-1,-2-3)=(3,-1,-5)$;

$\overrightarrow{M_3M_1}=(1-3,-1-0,2+2)=(-2,-1,4)$;

因此

(1)$3\overrightarrow{M_1M_2}+2\overrightarrow{M_2M_3}=(-3,6,3)+(6,-2,-10)=(3,4,-7)$;

(2)$\overrightarrow{M_3M_1}-4\overrightarrow{M_2M_3}=(-2,-1,4)-(12,-4,-20)=(-14,3,24)$.

例 4　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,且 b_1,b_2,b_3 不等于零. 试证:如果 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,则$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$;反之,结论也成立.

证 由 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即$(a_1,a_2,a_3)=\lambda(b_1,b_2,b_3)$,则由法则(2)得 $a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$,于是有$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

反之,令$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda$,则 $a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$,所以

$$(a_1,a_2,a_3)=(\lambda b_1,\lambda b_2,\lambda b_3)=\lambda(b_1,b_2,b_3);$$

即 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,于是 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

7.1.5 向量的模与方向余弦

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,它是以原点为起点,以 $M(a_x,a_y,a_z)$为终点的向量,如图 7-11所示,由两点间距离公式,向量的模可以用向量的坐标表示:

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

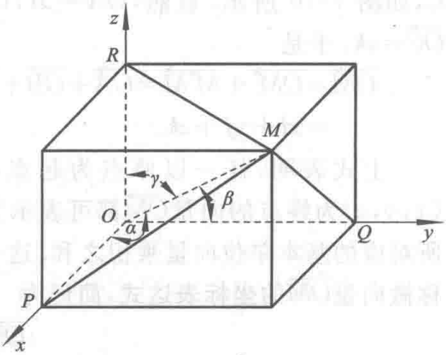


图 7-11

定义 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角分别为 α,β,γ(其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**,它们的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 当它的三个方向角确定时,则它的方向也就确定了,当$|\boldsymbol{a}|\neq0$ 时,

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

显然 $$\boldsymbol{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

例 5 已知 $M_1(1,2,-1),M_2(0,4,-3)$两点,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模和方向余弦及方向角.

解 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(0-1,4-2,-3+1)=(-1,2,-2);$$

所以 $$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3.$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

方向角 $$\alpha\approx109^\circ28',\quad \beta\approx48^\circ11',\quad \gamma\approx131^\circ49'.$$

§7.2　向量的数量积和向量积

7.2.1　向量的数量积

1. 向量的数量积的概念

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，如图 7-12 所示，则由物理学知，力 F 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的夹角.

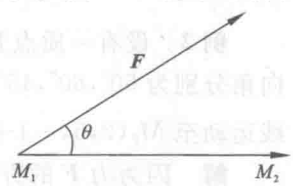


图 7-12

现实生活中，还会遇到许多由两个向量的模及其夹角的余弦之积构成的算式，为此，引入向量的数量积的概念.

定义 1　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或点积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

2. 数量积的运算律

由数量积的定义不难发现，数量积满足以下运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$　(λ 是常数).

3. 数量积的坐标表示

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 三个基本单位向量互相垂直，所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+\\&\quad a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z;\end{aligned}$$

即：两向量的数量积等于其对应坐标乘积之和，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

由定义 1 知，若两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，则夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

反之,若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直.因此有结论:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\quad 即\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 1 求使向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 互相垂直的 m 的值.

解 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3-3\times m+5\times(-2)=0.$$

解得
$$m=-\frac{4}{3}.$$

例 2 设有一质点开始位于点 $M_1(1,2,-1)$ 处(坐标的长度单位为 m),现有一方向角分别为 $60°,60°,45°$,大小为 100 N 的力 $\boldsymbol{F}$ 作用于该质点,求该质点从点 M_1 作直线运动至 $M_2(2,5,-1+3\sqrt{2})$ 时,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.

解 因为力 $\boldsymbol{F}$ 的方向角分别为 $60°,60°,45°$,所以,与力 $\boldsymbol{F}$ 同向的单位向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^0&=\cos 60°\boldsymbol{i}+\cos 60°\boldsymbol{j}+\cos 45°\boldsymbol{k}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

又因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{F}^0=100\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}\right)\\&=50\boldsymbol{i}+50\boldsymbol{j}+50\sqrt{2}\boldsymbol{k};\end{aligned}$$

质点从点 $M_1(1,2,-1)$ 移动到点 $M_2(2,5,-1+3\sqrt{2})$,其位移矢量为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=(2-1)\boldsymbol{i}+(5-2)\boldsymbol{j}+(-1+3\sqrt{2}+1)\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+3\sqrt{2}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$\begin{aligned}W&=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(50,50,50\sqrt{2})\cdot(1,3,3\sqrt{2})\\&=50+150+300=500(\mathrm{J}).\end{aligned}$$

7.2.2 向量的向量积

1. 向量积的概念

引例 设 O 为杠杆 L 的支点,有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆上 P 点处,$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ,如图7-13所示,求力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩.

由力学知识知道,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$,其大小为

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{OP}|\sin\theta.$$

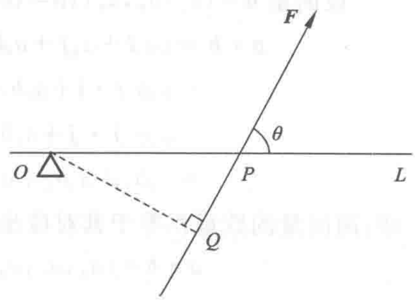


图 7-13

力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向规定：$\boldsymbol{M}$ 的方向垂直 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所在平面，其正方向按右手法则确定，如图 7-14 所示，即当右手四指从 $\overrightarrow{OP}$ 以小于 π 的角度到 $\boldsymbol{F}$ 方向握拳时，大拇指伸直所指的方向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向.

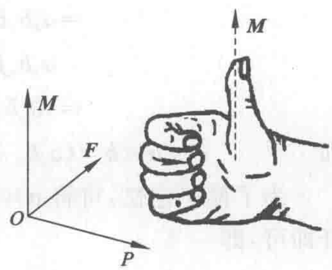


图 7-14

在工程技术领域，有许多向量具有上述特征，为此，引入向量的向量积的概念.

定义 2　设有两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，其夹角为 θ，若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

(2) $\boldsymbol{c}$ 垂直于由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，它的正方向由右手法则确定. 则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(或**叉积**)，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

由定义 2，作用在点 P 的力 $\boldsymbol{F}$ 对杠杆上支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 可表示为

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}.$$

若把向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起。并以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 即为该平行四边形的面积，如图 7-15 所示.

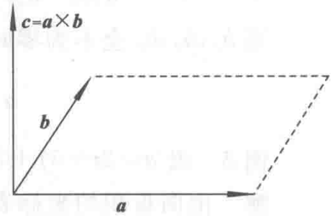


图 7-15

2. 向量积的运算律

由向量积的定义可得，向量积满足以下运算规律：

反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;

$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$;

结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$　(λ 是常数).

注意：向量的向量积一般不满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\quad(\text{除非 } \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}).$$

由向量积的定义可知：

(1) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$;

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

特别地，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

规定零向量与任何向量平行.

3. 向量积的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$. 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$