全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

姚 莉 罗亚玲 万里平 主编

医学高等数学学习指导·精要

科 学 出 版 社

全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

医学高等数学学习指导·精要

主　编　姚　莉　罗亚玲　万里平

副主编　梁　波

编　委　(以姓氏笔画为序)

万里平　罗亚玲　姚　莉　梁　波

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本学习指导与科学出版社出版的由梁波、姚莉主编的《医学高等数学》教材配套，共10章，每章5个版块。在书的最后我们附录了教材中医学高等数学常用数学公式和常用数学名词汉英对照，以便学生在学习过程中使用。

本书可供医药院校本科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学学习指导·精要 / 姚莉，罗亚玲，万里平主编.—北京：科学出版社，2014.8

全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

ISBN 978-7-03-040621-7

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①姚… ②罗… ③万… Ⅲ. ①医用数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 098211 号

责任编辑：胡治国 / 责任校对：胡小洁

责任印制：肖 兴 / 封面设计：范璧合

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京华正印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2014年8月第一次印刷 印张：12

字数：284 000

定价：32.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

医学高等数学是高等医学院校的一门必修基础课，其以培养医学院校学生数学素质、创新意识及运用数学工具解决实际问题的能力为目的。本配套学习指导是在高等医学院校从事一线高等数学教学工作的教师根据多年的教学实践，总结、归纳编写而成，它既可以诱导学生进行独立思考、提高学生学习效率，又可作为教师备课所用，也可作为学生考研的参考资料。

针对医学专业的特点需要，我们认为学生学习时，不必追求太复杂的计算和证明技巧以及和专业需求甚远的某些知识内容，所以我们在习题部分注重增加医药学应用实例的同时，选题时力求基础、精简，注意突出基本概念、基本理论和基本技能的训练。

本学习指导与科学出版社出版的由梁波、姚莉主编的《医学高等数学》教材配套，共10章，每章5个版块。在书的最后我们附录了教材中医学高等数学常用数学公式和常用数学名词汉英对照，以便学生在学习过程中使用。

知识点精要：罗列了本章的基本概念、性质、重要定理、主要内容、常用的计算技巧，引导学生融会贯通前后内容。

教学基本要求：阐述本章的学习要求。

典型例题解析：精选具有代表性的例题进行详细的分析和解答。目的在于提高大家分析问题、解决问题的能力，开阔解题思路，拓宽知识面，更好地掌握所学的知识。

教材习题同步解析：为配套教材的习题全解，以便于读者学习时对照和分析。

自测试题：自测试题融合了本章的主要内容，为帮助读者进一步强化训练解题的能力，巩固所学知识所用。

本书在编写过程中参考了各种层次的高等数学教材、学习指导，尤其是其他医学院校老师们编写的医学高等数学教材、学习指导，在此表示衷心感谢，科学出版社为本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此一并致谢。

本书第一章、第二章由罗亚玲老师编写，第三章、第五章、第六章由姚莉老师编写，第四章、第八章、第九章由梁波老师编写，第七章、第十章由万里平老师编写。

由于编者水平有限，请各位专家、同行和广大读者对本书的不足和疏漏之处予以批评指正。

编　者

2014 年 6 月于重庆

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、知识点精要

(一) 函数

1. 函数的概念　设有两个变量 x 、 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取确定的数值时，按照某个对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数. 记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则，全体函数值组成的集合称为函数的值域.

2. 函数的主要性质

(1) 有界性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 存在某正数 K，使得对任何 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant K$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

(2) 奇偶性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，D 是对称于原点的数集. 如果对任何 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ (或 $f(-x)=f(x)$)，则称函数 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数).

(3) 单调性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对区间 I 中任意两个数 x_1、x_2，、当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增(或单调递减).

(4) 周期性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在某个正数 T，使得对任何 $x\in D$，都有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，并称 T 为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数　设函数 $y=f(u)$，$u\in E$，$u=\varphi(x)$，$x\in D$. D^* 表示 D 中使得 $y=f(u)$ 有意义的全体 x 的非空集合，即 $D^*=\{x|u=\varphi(x)\in E,x\in D\}\neq\Phi$. 若对于 D^* 中任何一个 x，通过函数 $u=\varphi(x)$ 对应 E 中唯一的 u，又通过函数 $y=f(u)$ 对应唯一的 y 值，则对每一个 $x\in D^*$，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，这就得到了一个定义在集合 D^* 上的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in D^*$，称该函数为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. 其中，称 $y=f(u)$ 为外函数，$u=\varphi(x)$ 为内函数，u 为中间变量.

4. 基本初等函数与初等函数　常数函数 $y=C$ (C 是常数)、幂函数 $y=x^\alpha$ ($\alpha\in R$)、指数函数 $y=a^x$ ($a>0$，$a\neq1$)、对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq1$)三角函数以及反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算步骤得到的、用一个式子表示的函数，称为初等函数.

(二) 极限

1. 极限的概念

(1) 函数极限的定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有定义，A 是某确定常数.

若当自变量 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，并称 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时收敛于 A．记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ ($x\to x_0$)．若当自变量 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 不以任何常数为极限，则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时发散．

(2) 左极限和右极限的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域 $(x_0-\delta, x_0)$ (右邻域 $(x_0, x_0+\delta)$)($\delta>0$)内有定义，A 是某确定常数．若 x 从 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 从 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的左(右)极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)=A$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)=A$).

(3) 充分必要条件：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

2. 极限的计算

(1) 极限的四则运算法则：设 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都存在，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x)\neq 0)$$

(2) 两个重要极限：① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, (x 为弧度数)　② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(三) 无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大的定义

(1) 无穷小的定义：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ ($x\to\infty$)时的无穷小.

(2) 无穷大的定义：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} |f(x)|=+\infty$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ ($x\to\infty$)时的无穷大.

2. 无穷小与无穷大的关系

在同一极限过程中，若 $\lim f(x)=0$，则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$；若 $\lim|f(x)|=+\infty$，则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$.

3. 无穷小的运算法则

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小；

(3) 有界函数变量与无穷小的乘积是无穷小.

4. 无穷小与函数极限的关系　在同一极限过程中，$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$ ($\lim\alpha=0$).

5. 无穷小量阶的比较　在同一极限过程中，$f(x)$、$g(x)$ 都是无穷小．若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称在这个极限过程中 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小量，亦称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的低阶无穷小量.

记为 $f(x)=o\left(g(x)\right)$；若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\quad(k\neq 0)$，则称在这个极限过程中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小量，记为 $f(x)=O\left(g(x)\right)$．特别地，当 $k=1$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量，记为 $f(x)\sim g(x)$．

6. 等价无穷小替代定理　若 $f_1(x)\sim f_2(x)$，$g_1(x)\sim g_2(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$．

(四) 函数的连续性

1. 函数连续的概念　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 内每一点处都连续，则称 $f(x)$ **在区间 I 内连续.**

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$)，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左(右)连续.

2. 间断点的概念　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不满足以下三个条件之一:

① $f(x)$ 在点 x_0 有定义;②极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

间断点分为:

第一类间断点: 左、右极限都存在的间断点. 第一类间断点包括可去间断点(左、右极限相等的间断点)和跳跃间断点(左、右极限不相等的间断点).

第二类间断点: 左、右极限至少一个不存在的间断点.

3. 连续函数的四则运算性质及初等函数的连续性

(1) 连续函数的四则运算性质: 两个连续函数的和、差、积、商(若分母不为 0)是连续函数;

(2) 复合函数的连续性: 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续;

(3) 初等函数的连续性: 初等函数在其定义域内连续;

(4) 反函数的连续性: 单调连续函数的反函数是连续函数.

二、教学基本要求

- 理解函数、复合函数的概念，了解函数的主要性质;
- 理解极限的概念;
- 熟练掌握极限的计算，掌握用两个重要极限求极限的方法;
- 理解无穷小与无穷大的概念，了解无穷小“阶”的概念，会运用等价无穷小的替代求极限;
- 理解函数在一点连续的概念，了解初等函数的连续性;
- 了解间断点的概念，并会判断间断点的类型.

三、典型例题解析

(一) 复合函数

1. 已知 $f(x)$ 的定义域, 求 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域.

例 1 设函数 $f(u)$ 的定义域为 $(0,1)$, 求函数 $f(\ln x)$ 的定义域.

解 由于函数 $f(u)$ 的定义域为 $(0,1)$, 则要使 $f(\ln x)$ 有意义须有 $0<\ln x<1$, 解得 $x\in(1, \mathrm{e})$. 故函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(1,\mathrm{e})$.

思路: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 即 $x\in D$, 所以 f 的作用范围为 D, 又 f 对 $g(x)$ 作用, 作用范围不变, 所以 $g(x)\in D$, 解得 $x\in E$, E 为 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域.

2. 已知 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域, 求 $f(x)$ 的定义域.

例 2 已知 $f(x^2-4)=\lg\dfrac{x^2}{x^2-8}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.

解 令 $x^2-4=u$, 则 $f(u)=\dfrac{u+4}{u-4}$.要使 $f(u)$ 有意义，必须 $\dfrac{u+4}{u-4}>0$，$u<-4$ 或 $u>4$.所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$.

思路: 设 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域为 D, 即 $x\in D$, 由此得 $g(x)\in E$, 所以 f 的作用范围为 E, 又 f 对 x 作用, 作用范围不变, 所以 $x\in E$, E 为 $f(x)$ 的定义域.

(二) 求极限

1. 利用分子或分母有理化求极限

例 3 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}$ (2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

解 (1) 原式 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1})}{3n-1}=4\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{3-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{8}{3}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+3}+3)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(2x-6)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{2x+3}+3)}=\frac{4(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{5}+3}.$$

2. 先求和、再求极限

例 4 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{n-1}$; (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$.

解 (1) $1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n=[1+3+\cdots+(2n-1)]-2(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{n\cdot 2n}{2}-2\cdot\frac{n(1+n)}{2}=-n,$$

故　原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{n-1}=-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{\frac{1}{n}-1}=-1$.

(2) 由于$\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,

故　原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3. 利用两个重要极限求极限

例 5　求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2\sin\frac{2}{n}}{\sqrt{3n^2-1}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}$.

解　(1) 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6n^2}{n\sqrt{3n^2-1}}\cdot\dfrac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6n}{\sqrt{3n^2-1}}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=2\sqrt{3}$.

(2) 原式$\xlongequal{1-x=t}\lim\limits_{t\to0}t\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi t}{2}\right)=\lim\limits_{t\to0}t\cot\dfrac{\pi t}{2}=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\cos\dfrac{\pi t}{2}=\dfrac{2}{\pi}$

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]\cdot\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1$.

(4) 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln\left[\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]}=\mathrm{e}^{0\cdot\ln\mathrm{e}}=1$.

例 6　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin}{x}, & x>0\\(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 极限是否存在.

解　$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$f(0-0)\neq f(0+0)$，所以当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 极限不存在.

4. 利用等价无穷小代换求极限

例 7　求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}$.

解 由于 $x \to 0$ 时，$\sin x \to 0$，$\tan(\sin x) \sim \sin x$；$\tan x \to 0$，$\sin(\tan x) \sim \tan x$，故

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1.$$

5. 其他方法求极限

例 8 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b-4}{x-2}=4$，求 a、b.

解 由于 $x \to 2$ 时，$x-2$ 为无穷小．而 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b-4}{x-2}=4$，故 $x \to 2$ 时必为无穷小，即

$$\lim_{x\to 2}(ax+b-4) = 2a+b-4 = 0$$

$$b-4=-2a$$

将上式代入原极限，有 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax-2a}{x-2} = a = 4$，

故 $a=4$，$b=0$.

(三) 分段函数的连续性

例 9 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}+b, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ \dfrac{a\sin x}{x}-b, & x<0 \end{cases}$，$a$、$b$ 是常数．试讨论 a、b 为何值时，$f(x)$ 在其定义域内连续.

解 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$．由初等函数的连续性知，在非分段点 $x \neq 0$ 处 $f(x)$ 是连续的．在分段点 $x=0$ 处的连续性需考察其左右极限：

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{a\sin x}{x}-b\right) = a-b, \qquad f(0+0) = \lim_{x\to 0^+}(e^{ax}+b) = 1+b,$$

又 $f(0)=1$．要使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，必须 $\begin{cases} a-b=1 \\ 1+b=1 \end{cases}$，则 $a=1$，$b=0$.

(四) 求函数的间断点并判别类型

例 10 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$ 的连续性．若有间断点，判别其类型.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x = \begin{cases} x, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -x, & |x|>1 \end{cases}$．在 $x \neq \pm 1$ 处，$f(x)$ 连续.

在 $x=1$ 处，$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x)=-1$，因此 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃)；在 $x=-1$ 处，$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=1$，$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1^+}x=-1$，因此 $x=-1$ 也为第一类间断点(跳跃).

四、教材习题同步解析

1. **解**

(1) 要使函数有意义，必须$\begin{cases}1-x>0\\3x+1>0\end{cases}$，即$\begin{cases}x<1\\x>-\dfrac{1}{3}\end{cases}$. 所以，该函数的定义域是$(-\dfrac{1}{3},1)$；

(2) 要使函数有意义，必须$\begin{cases}25-x^2>0\\\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\end{cases}$，即$\begin{cases}-5<x<5\\-4\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$. 所以，该函数的定义域是$[-4,5)$；

(3) 要使函数有意义，必须$\begin{cases}x\neq 0\\1+\dfrac{1}{x}\neq 0\\1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\neq 0\\x\neq -1\\1+\dfrac{1}{x}\neq -1\end{cases}$，$\begin{cases}x\neq 0\\x\neq -1\\x\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}$. 所以，该函数的定义域是$x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$；

(4) 要使函数有意义，必须$\begin{cases}3x-x^2>0\\|x-1|-1\neq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}0<x<3\\x\neq 0\\x\neq 2\end{cases}$. 所以，该函数的定义域是$(0,2)\cup(2,3]$.

2. **解**　由于$f(x)$的定义域是$[0,4]$，所以$\begin{cases}0\leqslant x+3\leqslant 4\\x^2\leqslant 4\end{cases}$，即$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 1\\-2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$. 所求定义域为$[-2,1]$.

3. **解**　令　$\log_a x=u$，则$x=a^u$，代入函数$f(\log_a x)=\sqrt{x}$得$f(u)=\sqrt{a^u}=a^{\frac{u}{2}}$，$u\in(-\infty,+\infty)$. 所以，$f(x)=a^{\frac{x}{2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

4. **解**　$f(x+\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^2}{x^4+1}=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$，$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$，$x\neq\pm\sqrt{2}$.

5. **解**　定义域$[0,+\infty)$，$f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{7}{2}$，$f[f(\dfrac{3}{2})]=f(\dfrac{7}{2})=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}$.

6. **解**　定义域$(-\infty,+\infty)$，$f(0)=1$，$f(1)=0$. 图略.

7. **解**　(1) 奇函数；(2) 偶函数；(3) 既非奇函数,也非偶函数；(6) 奇函数.

8. **解** $y=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，是周期函数，周期为 $k\pi$，$k=1,2,\cdots$.

9. **解** (1)无界；(2)有界；(3)无界；(4)有界；(5)无界；(6)无界；(7)无界；(8) 有界.

10. **解** $\lg(x+1)+\lg(y-1)=\lg(x+1)(y-1)=\lg 100$，$(x+1)(y-1)=100$，则 $y=\dfrac{100}{x-1}+1$.

11. **解** (1) $y=\sqrt{x-x^2}$，$x\in[0,1]$；

(2) 内函数的值域 $[-2,0]$ 与外函数的定义域 $(0,+\infty)$ 交集为空，该组函数不能复合.

(3) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$，$x\neq 0$，$x\neq\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ （$k\in Z$）；

(4) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$，$x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

12. **解** (1) $y=e^u$，$u=-x$；

(2) $y=u^m$，$u=a+bx^n$；

(3) $y=\sin u$，$u=x+\dfrac{1}{x}$；

(4) $y=u^{-\frac{1}{2}}$，$u=x+\sqrt{v}$，$v=x+\sqrt{x}$；

(5) $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=e^t$，$t=x+1$；

(6) $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{t}$，$t=1-x^2$.

13. **解** $\varphi(x^2)=x^6+1$，$[\varphi(x)]^2=(x^3+1)^2$，$\varphi[\varphi(x)]=(x^3+1)^3+1$，$\varphi\left[\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]=\left(\dfrac{1}{x^3+1}\right)^3+1$.

14. **解** (1) $y=\dfrac{1}{2}\ln x$，$x\in(0,+\infty)$；

(2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$，$x\neq 1$；

(3) $y=\sqrt{x^2+1}$，$x\in[0,+\infty)$；

(4) $y=\dfrac{1}{2}\arcsin x, x\in[-1,1]$.

15. **解** $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$. 可见 $f(0-0)=f(0+0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在；

$g(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{-x}=-1$，$g(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$. 可见 $g(0-0)\neq g(0+0)$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在.

16. **解** (1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+x^2}=-1$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(|x|+1)=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(-|\operatorname{sgn} x|)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$.

17. 解　$\because$ $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1$，

$\therefore$ $f(1-0)\neq f(1+0)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在;

又 $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-2)=-3$，$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}x=-1$，

$\therefore$ $f(-1-0)\neq f(-1+0)$，$\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ 也不存在.

18. 解　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(3+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]=3$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+3n-1}{3n^2+5n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$;

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+1}{2}=\dfrac{1}{2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2(\sin x-\cos x-x^2)=2\left[\sin\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right]=2-\dfrac{\pi^2}{2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)}=\dfrac{-1}{-1}=1$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{2}{3}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x+2}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x+x^2)-(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{1+x+x^2}=\dfrac{2}{3}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}+2)(\sqrt[4]{x}-2)}=\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\dfrac{1}{4}$;

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=0\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$;

(11) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{\Delta x+1}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\sqrt{\Delta x+1}-1)(\sqrt{\Delta x+1}+1)}{\Delta x(\sqrt{\Delta x+1}+1)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{x+2}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

19. 解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x\cdot\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\beta x\cdot\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{x}=k\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{kx}=k$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$；

(5) 令 $\arctan x=t$，则 $x=\tan t$，$x\to 0$ 时 $t\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=1$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1-1=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}$；

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-x}{\cos x}\overset{\frac{\pi}{2}-x=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$；

(9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$；

(10) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{\Delta x}\cdot 2\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right)$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

20. 解　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}=\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}\cdot(-3)+5}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^5=\mathrm{e}^{-3}\cdot 1=\mathrm{e}^{-3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{3x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{3x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{-3}$

$=\dfrac{1}{\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{-3}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\cdot 1=\mathrm{e}^{-3}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}\cdot(-1)}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=\mathrm{e}$.

21. **解** (1) $x\to 1$时，$\dfrac{1-x}{x^2}\to 0$，$\dfrac{1-x}{x^2}$是无穷小;

(2) $x\to 0$时，$\dfrac{x^2}{1-x}\to 0$，$\dfrac{x^2}{1-x}$是无穷小，所以$\dfrac{1-x}{x^2}$是无穷大;

(3) $x\to 1$时，$\dfrac{x^2-1}{x+3}\to 0$，则$\dfrac{x+3}{x^2-1}\to\infty$，故$\dfrac{x+3}{x^2-1}$是无穷大;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(3^{-x}-1)=3^0-1=0$，所以$x\to 0$时，$3^{-x}-1$是无穷小;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=\sin(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x})=\sin 0=0$，所以$x\to\infty$时，$\sin\dfrac{1}{x}$是无穷小;

(6) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=0$，故$x\to\pi$时，$\dfrac{\sin x}{x}$是无穷小，从而$\dfrac{x}{\sin x}$是无穷大;

(7) $x\to 0^+$时，$\ln x\to-\infty$，$\ln x$是无穷大;

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$，所以$n\to+\infty$时$\dfrac{1+(-1)^n}{n}$是无穷小.

22. **解** (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，则当$x\to 0$时，$x^2$是较$x$高阶的无穷小;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，($\sin\dfrac{1}{x}$有界)，故$x\to 0$时，$x^2\sin\dfrac{1}{x}$是$x$的高阶无穷小;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$，所以，当$x\to 0$时，$\sqrt{x}$是较$x$低阶的无穷小;