

第四部份 网络分析技术（统筹方法）

目 录

- § 1 概 述
- § 2 网络图的基础知识
- § 3 作业时间的确定
- § 4 P E R T的参数与计算
- § 5 网络图参数计算的方法
- § 6 任务按期完成的概率分析与计算
- § 7 C P M的分析与计算
- § 8 P E R T的应用
- § 9 网络评审技术（G E R T）

第四部份 网络分析技术

§ 1 概 述

网络分析技术也是系统工程方法之一。它是用网络图的形式把一个任务的有关项目有机地组成一体,通过一些分析与计算进行合理地组织,以求得最好的效果。我们知道,任何一个系统不但有其复杂的空间结构,而且还有复杂序列关系的时间结构。网络分析技术就是把一个系统从开始到结束,看成是由若干阶段和步骤组成的过程,用网络的形式逻辑地连贯地合成一个有机整体。因而从时间上,成本费用上进行有效的规划和控制,合理地高效率地组织和管理一个系统。

目前,国际上广泛采用的网络分析技术是(Program Evaluation and Review Technique)简称“PERT”。有的也叫“计划评审方法”、“计划协调技术”或“统筹方法”。“PERT”是1958年美国海军特种计划局,在规划和研制核潜艇上发射中程弹道式导弹“北极星”的计划中,首先提出控制进度的先进方法。用这种方法使“北极星”导弹核潜艇提前二年完成。PERT开始用于国防军事方面,后来推广到各个部门,各行各业,尤其是大型复杂系统更显得有优越性。统计资料表明,在既定条件下,即在不增加人力、物力、财力等情况下,只用PERT这种网络分析技术就可以提前进度15~20%,节约成本10~15%。因此,它作为系统工程的一种方法在世界上而驰名。

另外,在美国还有一种“CPM”(Critical Path Method的缩写),译称为“要经法”或“关键路线法”。它是1957年美国杜邦公司作为内部计划和管理技术,首先用于化工厂的建立和维修上,而后逐步推广开来的一种网络技术,它主要侧重于成本的管理。

以上两种网络技术是比较成功和普遍得到运用的方法,PERT与CPM相同之处都是以网络图来表示计划实施过程,而且都是以时间最长的路径为“关键路线”来重点予以管理的方法。不同之处是PERT仅注意时间问题,对成本未予注意;CPM则把时间和成本一块考虑,而以成本为主。PERT对每项作业的完成时间计入不确定的因素;CPM对每项作业时间不计入不确定因素。近年来两者有发展一致的趋向,采用两者的长处来规划与控制系统,即从时间和费用统一最佳方案来考虑。

PERT是确定型的网络模型,无法处理概率事件,PERT网络中不能出现回路而且整个过程只有一个终端,因此PERT网络的应用受到一定限制。为了适应于随机性网络的处理,美国兰德公司和阿利桑那州立大学等机构又研制了网络评审技术(简称GERT: Graphical Evaluation and Review Technique)。这种方法综合了PERT的概念和流向图的概念。它吸收了在PERT网络中用边代表作业、边上的参数代表作业执行时间的概念;同时采取了流向图理论中拓扑方程的分析步骤,从而使得GERT网络非常便于处理具有概率性和随机性的问题。据称在阿波罗计划中采用了该技术,使得该计划比采用PERT技术的北极星计划更卓有成效。例如,该技术成功地用于分析宇宙飞船的发射过程或半导体材料的区域提纯过程。此外本技术还可用于处

理库存、排队和可靠性问题。

§ 2 网络图的基础知识

1、网络图的组成

1) 作业：是指一项具体的活动过程，需要耗用一定时间，用箭线表示并带有起、止点。如 $(i) \rightarrow (j)$ 。 (i) 表示作业的开始， (j) 表示作业的完成，箭线长短与时间无关。

2) 虚作业：是指不消耗资源也不需要时间的作业，它只是表明一个作业与另一个作业之间的衔接关系。用虚箭线并带有起止点来表示，如 $(i) \cdots \rightarrow (j)$ 。

3) 事项：是指作业开始或完成的瞬时状态，它不消耗资源，也不需要时间，只表示相关作业的衔接点，也叫作结点。用圆圈标上代号表示。如 (i) 或 (j) 。结点具有双重意义，即对前一作业是完成结点，对后一作业是开始结点。可用图表示如下：

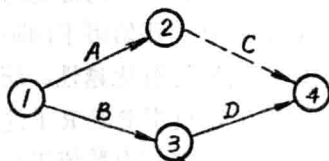


图 4-2-1

图中： $1 \rightarrow 2$ 、 $1 \rightarrow 3$ 、 $3 \rightarrow 4$ 为作业； $2 \cdots \rightarrow 4$ 为虚作业；1、2、3、4为结点。

2、编绘网络图的规则

1) 网络图是有向的。从左至右排列，不能有回路，即从一点出发又回到同一出发点是不允许的。图 4-2-2 中的上箭线是不应该有的。



图 4-2-2



图 4-2-3

2) 任何一个箭线和相关结点只能代表一个作业，如果出现图 4-2-3 所示的情况是不允许的。

3) 虚作业的运用 以下几种情况引入虚作业。

(1) 图 4-2-4 所示是不正确画法；引入虚作业后，如图 4-2-5 所示的是正确画法。

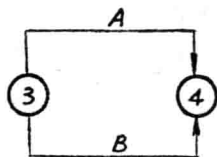


图 4-2-4

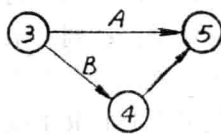


图 4-2-5

(2) 如有一任务由 A、B、C、D 四个作业组成，它们之间关系是：



和

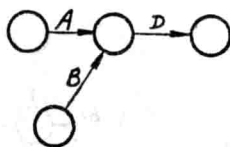


图 4-2-6 是不正确的画法；图 4-2-7 是正确的画法。

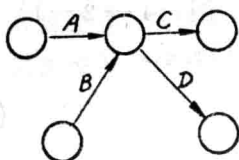


图 4-2-6

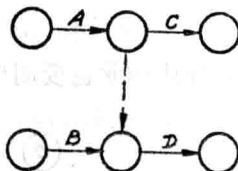


图 4-2-7

(3) 若有一任务由 A、B、C、D、E 作业组成，它们之间的关系是：

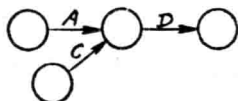
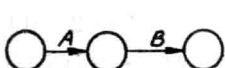


图 4-2-8 是不正确的画法；图 4-2-9 是正确的画法。

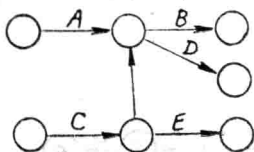


图 4-2-8

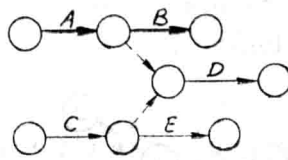


图 4-2-9

4) 平行作业 一道作业项目为了加快时间，可以分成两道或几道作业同时进行。如图 4-2-10，所示，把“加工”这道作业，分成加工(1)，加工(2)，加工(3)同时进行(引入了虚作业)。

5) 交叉作业 有时为了加快工程进度，不必等前一作业全部完成后才开始下一作业，而是可以完成一部分就开始作下一作业的一部分；再完成一部分又作下一作业的一部分，如此下去，这叫交叉作业。例如，某一工程：

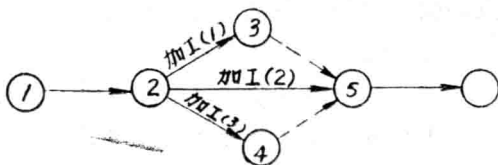


图 4-2-10

$$A = a_1 + a_2 + a_3$$

$$B = b_1 + b_2 + b_3$$

可进行如下的交叉作业，如图 4-2-11 或图 4-2-12。

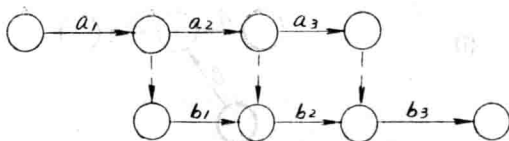


图 4-2-11

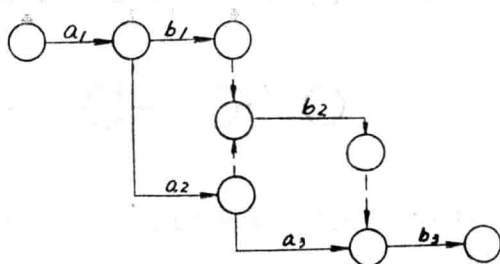


图 4-2-12

6) 外协作作业也要明确画在网络图上, 如图 4-2-13所示。

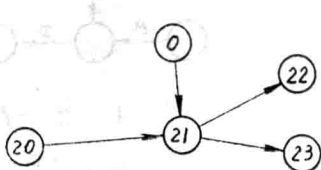


图 4-2-13

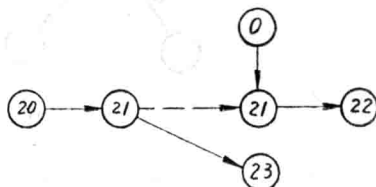


图 4-2-14

图中 (0)→(21)是外协作作业, 是交给(21)→(22)还是交给(21)→(23)未示清楚, 而画成图 4-2-14所示形式就明确了。

7) 集中作业 若干作业有一个共同的开工和完工事项, 交给一个单位去完成, 可集中成一个作业。集中后的作业时间, 以最长者记之。如图 4-2-15可简化集中成图 4-2-16的形式。

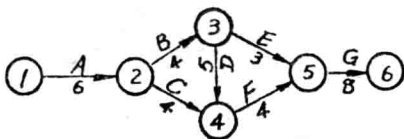


图 4-2-15

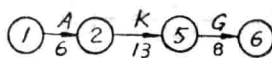


图 4-2-16

8) 编号 一个结点只有一个编号, 不应重复。编号从小到大, 由始点开始, 按顺序到终点。始点号最小, 终点号最大。没有箭头进入的结点称为始点, 若同时有 n 个始点则顺序编号。终点指没有箭尾出去的点。

作业的编号依结点而定, 由两个相关结点连接而成, 即 $(i) \rightarrow (j)$, $j > (i)$ 。

编号时为留有余地可增加号码, 留有空号以备调用。

9) 箭线有时也会交叉。为了清楚起见, 可画一桥形, 如图 4-2-17所示。

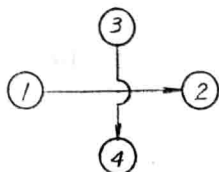


图 4-2-17

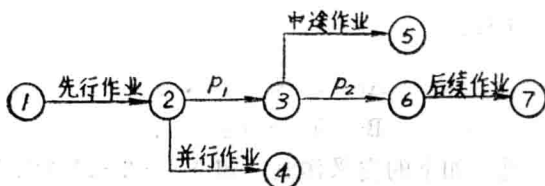


图 4-2-18

3、网络图的画法

网络图的编绘可分三个步骤：

1) 任务的分解

就是把一个工程或一个任务分解成若干作业，并确定它们之间的关系。作业与作业之间的关系有四种：“先行作业”，即某一作业的前面有那些作业；“后续作业”，即某一作业的后面有那些作业；“并行作业”，即与某一作业同时进行的那些作业；“中途作业”，即在某一作业中途可以进行那一种作业。如图4-2-18所示。

编制网络图对某一系统可有总系统图、分系统图、环节图。各有粗细之别，详细与简单之分，供各级人员使用。

网络图各作业所需时间一般以周为单位，也可根据任务总时间长短酌情以月或天为单位。

这样根据任务分解后，可列成清单表格形式，如表4-2-1即为一施工单位拆换蒸气配管的任务清单。

2) 画图

有了任务分解的清单，就可以进行网络的画图工作。画图从第一道作业开始，以箭线代表作业，依先后顺序一支箭线接一支箭线从左向右画下去，直到最后一个作业为止。在箭线与箭的分界处画一个圆圈，就得到一个网络图。由表4-2-1的任务画成的网络图如图4-2-19。

表 4-2-1

代号	作业名称或内容	先行作业
A	勘查设计	
B	搭架折旧管	A
C	制新管及零件	A
D	制新阀	A
E	安装新管	B、C
F	焊新管	E
G	装新阀	D、E
H	保温	F、G

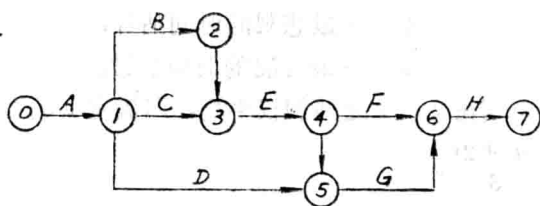


图 4-2-19

3) 编号

把网络图中的圆圈写上代号，从左至右，从小到大，这样就完成了一个任务的网络图，（见图4-2-19）。

§ 3 作业时间的确定

我们知道，要想正确地制定计划与有效地控制系统，必须对一任务所需时间进行科学的估计。作业时间是网络图的基本参数，如果时间估计不准，会直接影响效果，必须予以高度重视。一般对作业时间估计有三种方法，对确定性问题，可采用“一时”估计法；对非确定性问题，可采用“三时”估计法。

1、一时估计法

是指在正常情况下，有同类作业所需时间资料，然后依据经验估计出一个时间值。这个单一时间不考虑偶然情况，用 $t(i, j)$ 表示。

2、三时估计法

对不确定性问题，即无可靠的资料和经验来确定单一的时间，而采用三时估计法，即
 a ——最乐观时间，系指在非常顺利情况下，完成作业所需时间，即最短时间；
 b ——最悲观时间，系指在极不利的情况下完成作业所需时间，即最长时间；
 c ——最可能时间，系指经常完成作业最常需要时间，即一般情况下完成作业的时间。

上述三种时间的平均值可按式计算：

$$t_m(i, j) = \frac{a + 4c + b}{6}$$

式中 $t_m(i, j)$ 为作业的平均时间。

这样，一个非确定性时间，用一个平均时间来代替，变为确定性时间，从而可较科学地进行运算了。

3、关于平均时间 $t_m(i, j)$ 的依据

因为这是一个非确定性问题，是“概率论”讨论的范畴，我们用下面两种方法来解释：

1) 加权平均方法

如令：
 a ——最乐观的时间估计；
 b ——最悲观的时间估计；
 c ——最可能的时间估计。

则在 a 、 c 之间加权平均，即假定 c 的可能性两倍于 a 的可能性，则平均值是。

$$\frac{a + 2c}{3}。$$

同理，在 c 、 b 之间的平均值是 $\frac{2c + b}{3}$ 。

因此总的完成时间的分布可以用 $\frac{a + 2c}{3}$ 、 $\frac{2c + b}{3}$ 各以 $\frac{1}{2}$ 的可能性出现的分布来代表它，这二点的平均数是

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a + 2c}{3} + \frac{2c + b}{3} \right) = \frac{a + 4c + b}{6}$$

即平均时间 $t_m(i, j) = \frac{a + 4c + b}{6}$ 。

2) 由 β 分布推导方法

假设 β 分布能够表示出平均时间的概率密度分布，这是非正态分布。而且假定标准离差 σ 等于最长时间和最短时间之间区间的六分之一，即

$$\sigma = \frac{b-a}{6} \quad (4-3-1)$$

这说明与最可能时间 c 无关。

β 函数的概率密度为:

$$P(t) = K(t-a)^\alpha (b-t)^\nu \quad (4-3-2)$$

式中 K = 常数;

a ——最短时间;

b ——最长时间。

而 α 和 ν 是 a 和 b 的函数。如果已知指数 α 和 ν , 就可确定一个具体的 β 分布。

a 、 b 代表这个 β 分布的两个端点。图 4—3—1 所示为概率密度分布。

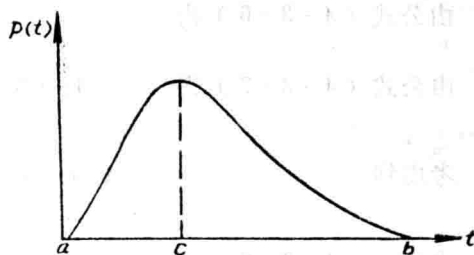


图 4—3—1

为了把这个概率密度分布函数加以简化, 我们引进一个用下式表示的随机变量 x :

$$x \equiv \frac{t-a}{b-a} \quad (4-3-3)$$

x 的概率密度分布为

$$f(x) = [B(\alpha+1, \nu+1)]^{-1} \cdot x^\alpha (1-x)^\nu \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (4-3-4)$$

现将 r 用下式表示:

$$r \equiv \frac{c-a}{b-a} \quad (4-3-5)$$

用 $E(X)$ 表示 X 的均值, 用 $V(X)$ 表示 X 的方差, 根据上述方程就能得到下面的表达式:

$$r = \frac{\alpha}{\alpha + \nu} \quad (\alpha = c-a, \nu = b-c) \quad (4-3-6)$$

$$E(X) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\nu+2} \quad (4-3-7)$$

$$V(X) = \frac{(\alpha+1)(\nu+1)}{(\alpha+\nu+2)^2(\alpha+\nu+3)} \quad (4-3-8)$$

把方程 (4-3-1) 所示的标准偏差进行平方就得到 的方差:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{36} \quad (4-3-9)$$

因而在方差便等于 $\frac{1}{36}$ 。用 $\frac{1}{36}$ 来代替方程 (4-3-8) 中的 $V(X)$, 并且消掉方程 (4-3-6) 和 (4-3-8) 中的 ν , 就得到下述表达式:

$$\alpha^3 + (36r^3 - 36r^2 + 7r)\alpha^2 - 20r^2\alpha - 24r^3 = 0 \quad (4-3-10)$$

由1与X间的转换方程就能计算出平均时间 t_m 的值。

$$t_m = a + (b - a) E(X) \quad (4-3-11)$$

令 $A = \alpha + v$

由公式(4-3-6)得 $\alpha = rA \quad (4-3-12)$

由公式(4-3-7)得 $E(X) = \frac{rA + 1}{A + 2} \quad (4-3-13)$

考虑到 $V(X) = \frac{1}{36}$

由公式(4-3-8)得 $E(X) = \frac{1}{36} \cdot \frac{(A+2)(A+3)}{r+1} \quad (4-3-14)$

再由 $A = \alpha + v$ 可得

$$v = A - \alpha = (1 - r)A \quad (4-3-15)$$

代入公式(4-3-14)中得

$$E(X) = \frac{1}{36} - \frac{(A+2)(A+3)}{(1-r)A+1} \quad (4-3-16)$$

由公式(4-3-13)和公式(4-3-16)可得方程:

$$(A+2)^2(A+3) = 36(rA+1)[(1-r)A+1] \quad (4-3-17)$$

当 r 在 $[0, 1]$ 之间变化,由(4-3-17)式求得 A 大约在2.9~6之间变化。由公式(4-3-13),当 A 取均值4时,得到

$$E(X) \cong \frac{4r+1}{6} \quad (4-3-18)$$

这是个线性方程,就大多数工程来说,这个线性方程是足够精确的,它免去了用方程(4-3-10)来求解三次方程。

由方程(4-3-5)、(4-3-11)、(4-3-18),可以得到均值:

$$t_m \cong \frac{a + b + 4c}{6} \quad (4-3-19)$$

这就是一种统计值的近似表达式,与加权平均法得到的结果是一样的。

在实际应用中,我们用均值和方差来确定一条正态分布曲线(高斯曲线),这样来估计作业时间的平均值(如果用均值和方差来确定 β 分布曲线,条件是不够充分的,所以一般用正态分布曲线)。

4、用资料求平均值法

如果一个任务做过多次,可通过资料知道它们过去的作业时间是 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$,则用: $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ 来表达平均时间,即均值。

用 $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{a} - a_i)^2$ 来表示方差。这样也符合正态分布的条件。

§ 4 PERT的参数与计算

1、结点的时间参数与计算

1) 结点最早开始时间

一个结点最早开始时间是指从始点到本结点的最长时间之和，这在之前是不能开始的。以 $T_E(j)$ 表示。

始点结点的最早开始时间等于零，即 $T_E(1) = 0$ 。

若结点只有一条箭线进入的话，则该箭尾所触结点的最早开始时间加上作业时间即为该箭头所触结点的最早开始时间。

若结点有很多条箭线进入的话，则对每条箭线都作上述计算之后，取其中最大数值为该结点的最早开始时间。

用公式表示为

$$T_E(j) = \max \{T_E(i) + t(i, j)\}, \quad (j = 2, 3 \dots n)$$

式中 $t(i, j)$ ——作业时间；

$T_E(j)$ ——箭头结点的最早开始时间；

$T_E(i)$ ——箭尾结点的最早开始时间；

2) 结点最迟完成时间

一个结点最迟完成时间是指在这时间里事项若不完成，就要影响后续作业的按时开工。其意义是无论有多少作业要做到某一结点的话，最迟应该什么时间完成。以 $T_L(i)$ 表示。

终点结点的最迟完成时间： $T_L(n) = \text{总完工期}$ 。

若结点只有一条箭尾，则结点最迟完成时间，等于箭头所触结点的最迟完成时间减去该作业的时间。

若结点有很多条箭尾，则对每一条箭线都做上述运算之后，取其中最小值为该结点的最迟完成时间。

计算从终点开始，从右向左计算，至始点为止，用公式表示为

$$T_L(i) = \min \{T_L(j) - t(i, j)\} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

式中 $t(i, j)$ ——作业时间；

$T_L(i)$ ——箭尾结点的最迟完成时间；

$T_L(j)$ ——箭头结点的最迟完成时间；

$T_L(n)$ ——终点结点的最迟完成时间。

3) 结点的时差

结点的时差就是结点上最迟完成时间减去最早开始时间，是机动时间。用公式表示：

$$S(i) = T_L(i) - T_E(i)$$

式中 $S(i)$ —— 结点时差;

$T_L(i)$ —— 结点最迟完成时间;

$T_E(i)$ —— 结点最早开始时间。

2、作业的时间参数与计算

1) 作业的最早开始时间

一个作业必须等它前面的作业完工之后, 才能开始, 这之前是不具备开工条件的, 这个时间就叫作业的最早可能开始时间。其意义就是该作业最早什么时候可以开始。用 $t_{ES}(i, j)$ 表示。

它的计算可以通过它的先行作业最早开始时间加上作业时间来进行。也可以通过结点的最早开始时间来进行。

用第一种办法公式为:

$$t_{ES}(i, j) = \max \{t_{ES}(i_0, j_0) + t(i_0, j_0)\}$$

式中: $t_{ES}(i_0, j_0)$ 为 $(i) \rightarrow (j)$ 作业的先行作业时间。从左至右到终点止。

用第二种办法公式为:

$t_{ES}(i, j) = T_E(i)$ 即作业的最早开始时间等于箭尾结点的最早开始时间。

2) 作业的最早完成时间

一个作业的最早可能完成时间, 就是它的最早可能开始时间加上本作业所需时间。其意义是指该作业最早什么时间可以完成的意思。以 $t_{EF}(i, j)$ 表示。它的计算也有二种办法。

第一种办法:

$$t_{EF}(i, j) = t_{ES}(i, j) + t(i, j)$$

第二种办法:

$t_{EF}(i, j) = T_E(i) + t(i, j)$ 。即作业的最早完成时间等于箭尾所触结点的最早开始时间加上作业所需时间。

3) 作业的最迟必须开始时间

一个作业, 紧接其后有一个或几个作业, 为了不影响后续作业的如期开始, 每个作业应有一个最迟必须开始时间, 这个时间, 就叫作业的最迟必须开始时间。其意义就是该作业最迟应该什么时候开始。以 $t_{LS}(i, j)$ 表示。它的计算也有二种办法。

第一种办法:

$$t_{LS}(i, j) = \min \{t_{LS}(i_n, j_n) - t(i, j)\}$$

式中: $t_{LS}(i_n, j_n)$ 是 $(i) \rightarrow (j)$ 后续作业的最迟开始时间。计算从右向左到始点止。

第二种办法:

$t_{LS}(i, j) = T_L(j) - t(i, j)$ 。即作业的最迟开始时间等于箭头所触结点的最迟必须完成时间减去作业时间。

4) 作业的最迟必须完成时间

一个作业的最迟必须完成时间等于它的最迟开始时间加上本作业所需要的时间。其意义就是该作业最迟应该什么时候完成。以 $t_{LF}(i, j)$ 表示。它的计算也有二种办法。

第一种办法:

$$t_{LF}(i, j) = t_{LS}(i, j) + t(i, j)$$

第二种办法:

$$t_{LF}(i, j) = T_L(j), \text{ 即作业的最迟完成时间等于箭头结点的最迟完成时间。}$$

5) 作业的总时差和单时差

①作业的时差: 任取一个作业来分析, 如果其先行作业在最早开始时间着手, 并且按预定的进度进行, 则该作业一定能够在最早开始时间开始, 但因该作业只要在最迟完成时间内完成即可, 因而这中间就有一种宽裕的时间可以利用, 这就是作业的时差。也可以这样来解释, 一个作业的完成时间可以推迟多少时间不致影响整个工程的完成时间或下一个作业的最早可能开始时间, 这样的时间称为时差。时差表明作业的机动时间, 即有时间潜力可以利用。时差越大, 说明时间潜力也越大。网络图的精华就在于利用时差来规划整个系统, 以求提高效果。

时差分总时差和单时差。

②总时差是指作业的完成时间, 可以推迟多长时间, 也不影响整个工程的总完成期。它可以在一条作业线中储存, 相互关联的作业可以串用的时差, 利用总时差可以影响下道作业的开始时间, 但不影响整个工程的总完成期。

总时差的计算:

总时差等于作业的最迟必须开始时间减去作业最早可能开始时间。用公式表示即:

$$R(i, j) = t_{LS}(i, j) - t_{ES}(i, j)$$

或

$$R(i, j) = t_{LF}(i, j) - t_{EF}(i, j)$$

也可以用结点来计算, 总时差等于箭头所触结点之最迟完成时间减去箭尾所触结点的最早开始时间再减去该作业时间。用公式表示为

$$R(i, j) = T_L(j) - T_E(i) - t(i, j)$$

③单时差是指在不影响下一个作业的最早开始时间的前提下, 作业的完成时间可以有多大的机动时间。也可以进一步解释为, 只能在与本作业并行的作业里调用的时间。

单时差的计算

$$\text{单时差: } r(i, j) = t_{ES}(j, n) - t_{EF}(i, j)$$

或

$$r(i, j) = t_{ES}(j, n) - t_{ES}(i, j) - t(i, j)$$

也可以用结点来计算单时差:

$$r(i, j) = T_E(j) - T_E(i) - t(i, j)$$

6) 用时差的原则

我们在用时差时, 应先用单时差, 因为它不影响后续作业的最早开始时间, 避免了

调整后续作业的开始时间。用总时差就要影响后续作业的开始时间，但用单时差不够时，只有使用总时差，但这样必须调整有关后续作业的开始时间。

3、关键路线

网络中，总时差为零的作业称为关键作业。时差为零的结点称为关键结点。

一个网络图中，从始点到终点，沿箭头方向把时差为零的结点或总时差为零的作业，用双线或红线联起来，就叫关键路线。

也可以从始点到终点，把若干条路线中，时间最长的路线称为关键路线。

要想缩短整个计划的工期，必须在关键路线上想办法，即缩短关键路线上的作业时间。反之，若关键路线工期拖长，则整个计划工期就拖长。

关键路线可以不止是一条，也可以有多条，这样就把整个计划调整得比较紧凑和均匀，使系统整体效果最佳。

§ 5 网络图参数计算的方法

网络图参数计算在网络图中结点数不太多的情况下可用下列三种方法计算。在结点数较多(一般多于200个结点)的网络图中应用计算机进行运算。本节主要介绍算法原理。

1、图上计算法

我们通过图 4—5—1 所示的例子来说明。

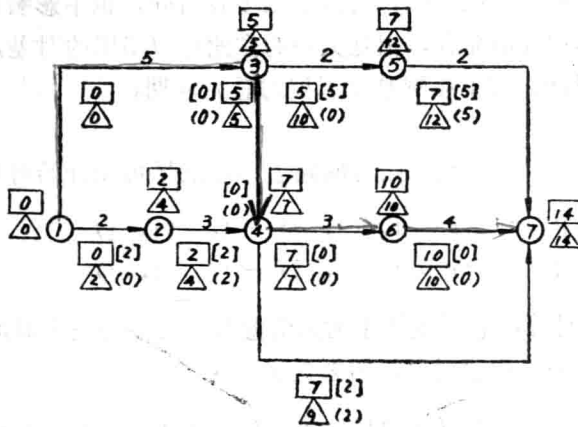


图 4—5—1

1) 结点的最早开始时间 $T_E(j)$

它的计算是从始点开始，自左向右，逐个结点计算，直至终点止。始点结点最早开始时间为零，即 $T_E(1) = 0$ 。这样利用前面讲过的公式：

$T_E(j) = \max \{T_E(i) + t(i, j)\}$ 来计算。计算后标在网络图 4—5—1 上，在结点上用 $\square$ 括起来表示。

2) 结点的最迟完成时间 $T_L(i)$

由终点自右向左逐个推算，把数字用 $\triangle$ 括起来写在结点 $\square$ 下方。用公式：

$T_L(i) = \min \{T_L(j) - t(i, j)\}$ 来计算。

3) 把时差求出来。用结点的 $\triangle - \square$ 即为结点的时差，把时差为零的结点连起来就是关键路线。

5) 作业最早开始时间 $t_{ES}(i, j)$

6) 作业最迟必须开始时间 $t_{LS}(i, j)$

7) 作业时差 R, r

8) 上面计算结果都标在图 4—5—1 上。这样就可以找出关键路线是①—③—④—⑦。这种方法在结点少时省事方便; 结点多时容易遗漏, 为避免这一缺点可采用标号法。

2、表格法

1) 作表格

作一个表格，每一格里填上一个参数名称（见表4—5—1）。

表 4—5—1

[illegible]

2) 填表格

把表格的第1、2列填上,按网络图的顺序自上而下逐行填上。按图4—5—1的数据填在表4—5—1上,得表4—5—2。

表4—5—2

1	2	3 ↓	4 ↓	5 ↑	6 ↓	7	8	9
作业 (i)→(j)	作业时间 $t(i, j)$	最早开 始时间 $t_{ES}(i, j)$	最早完 成时间 $t_{EF}(i, j)$	最迟开 始时间 $t_{LS}(i, j)$	最迟完 成时间 $t_{LF}(i, j)$	总时差 $R(i, j)$	单时差 $r(i, j)$	关键 作业
			3 + 2		5 + 2	5 - 3		
①→②	2	0	2	2	4	2	0	
①→③	5	0	5	0	5	0	0	①→③
②→④	3	2	5	4	7	2	2	
③→④	2	5	7	5	7	0	0	③→④
③→⑤	2	5	7	10	12	5	0	
④→⑥	3	7	10	7	10	0	0	④→⑥
④→⑦	5	7	12	9	14	2	2	
⑤→⑦	2	7	9	12	14	5	5	
⑥→⑦	4	10	14	10	14	0	0	⑥→⑦
⑦→⑧	0	14	14	14				

3) 在表上计算参数

① 计算作业最早开始时间和最早完成时间

表上第3列是作业最早开始时间,第4列是作业最早完成时间。这两列由上至下一行一行地计算。先从始点出发的各作业开始,它们的最早开始时间是0,最早完成时间就是自己的作业时间,所以只需将作业时间写入第4列相应的行内。例如在表4—5—2中,作业①→②,①→③,它们在第4列的数字分别为2、5。接着就算这些作业的后续作业,我们知道,一个作业的最早完成时间就是它后续作业的最早开始时间。当一个作业有多个先行作业时,选其中最大者。所以,在写下作业在第3列数值时,只需将其先行作业在第4列的数值填入,即得这一作业的最早开始时间。有了最早开始时间加上作业时间就是第4列的数。这样算下去,就可全部算出作业的第3列和第4列的数值。例如,在表4—5—2中算到④→⑥作业时,它的先行作业有二个:②→④,③→④,相应第4列上的数是5、7。按选最大数的原则,取7作为④→⑥的 t_{ES} ,并写入第3列相应行中,而它的最早完成时间 $t_{EF} = 3 + 7 = 10$,写入第4列格中,直到算出网络最后一个作业。

② 计算作业的最迟开始时间和最迟完成时间

表的第5列是各作业的最迟开始时间,第6列是作业最迟完成时间,它们的计算是从终点结点算起,由下往上逐个进行。

从终点结点可知,任务的最早完成时间与任务的最迟完成时间是同一个数。这样进入终点结点的各作业,它们的最迟开始时间就是总最迟完成时间减去各自的作业时间。例如:在表4—5—2中,⑤→⑦、⑥→⑦作业的最迟开始时间分别是12、10,记入第5列相应格中。接着再算上一个作业,按照作业的最迟开始时间等于它后续作业的最迟开始时间减去作业时间。当后续作业有几个时,选其中最小者。这样算下去,一行一行地直到与始点相连的每一作业为止。例如在表4—5—2中,算到作业④→⑥时,找到它的后续作业是⑥→⑦;在第5列找到 $t_{LS}=10$;将此数减去第④→⑥行上的第二列的作业时间得7,就是 $t_{LS}(4,6)$ 的值。将此数写入④→⑥行的第5列上。又例如:在算②→④和③→④作业时,查到它们的后续作业是④→⑥,④→⑦。按取最小数原则,从第5列已算出的 $t_{LS}(4,6)=7$, $t_{LS}(4,7)=9$,二数中取小者7,这个数与②→④,③→④二个作业时间分别相减,即得它们的最迟开始时间。 $t_{LS}(2,4)=4$, $t_{LS}(3,4)=5$,再将这二数写入第5列的②→④,③→④格中,逐行计算直到第5列全部填满为止。

第6列是最迟完成时间,是第2列加第5列的数字之和。

③计算作业的总时差和单时差

第7列是作业的总时差,可由各作业在第5列与第3列上数字相减求得。

第8列是作业的单时差。它是由后续作业的最早开始时间减去所算得作业的最早完成时间求得。例如:在表4—5—2中,③→④的后续作业是④→⑥,④→⑦,查得在第3列上的 $t_{ES}(4,6)=7$, $t_{ES}(4,7)=7$,又在第4列查得③→④的最早完成时间是7。因此③→④作业的单时差为 $7-7=0$,同理计算,直到最后一个作业为止。

④标出关键作业

第9列是关键作业,将第7列总时差为0的作业标在第9列上,串联第9列上,串联第9列就构成关键路线。

3、矩阵法

有时为了简单地了解网络图的情况,只计算结点的最早可能开始时间和最迟必须完成时间及结点时差为零的关键路线,常采用矩阵法。矩阵法是先按结点的数目作一个 $n \times n$ 阶矩阵,然后再在矩阵的行和列上对结点的最早开始时间和最迟完成时间进行计算,步骤是:

1) 作一个矩阵

例如在图4—5—1中,结点的数目是7,所以做一个 7×7 的矩阵,然后在矩阵第一行的上方和第一列的左方,由小到大,依顺序号,从左至右和从上至下分别写上结点的编号。如表4—5—3所示。

表 4—5—3

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
①							
②							
③							
④							
⑤							
⑥							
⑦							

2) 填上相应的作业时间

以行为箭尾结点，以列为箭头结点，顺次把各作业的时间写入矩阵的相应格内。如②→④作业的时间为3，就将此数写入第2行第4列的方格中。

3) 重新组阵

把矩阵的左方和上方各加一列一行。新行将写入所求得的最迟完成时间 T_L ；新列将写入所求得各结点的最早开始时间 T_E ，得表4—5—4。

表 4—5—4

	$T_L \rightarrow$	0	4	5	7	12	10	14
$T_E \downarrow$		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
0	①		2 2	0 5				
2	②				2 3			
5	③				0 2	5 2		
7	④						6 3	2 5
7	⑤							5 ②
10	⑥							0 ④
14	⑦							

4) 算结点的最早开始时间 $T_E(j)$

在 T_E 一列中，从始点结点开始，自上而下逐个计算。结点①的 T_E 值是0，将此数写在 T_E 列的第一行上，即①的左边。 $T_E(2)$ 的求法是：先在②行对②列中查得有一数2，即为①→②的作业时间，将此数与所在行上的 T_E 值相加就是 $T_E(2)$ 的值，即 $T_E(2) = 0 + 2 = 2$ ；再将此数写在②的左边格中。同理，求出其它值。算到第④行，在第4列中，有两个数3和2，将它们分别与所在行的 T_E 值相加，即 $2 + 3 = 5$ ， $5 + 2 = 7$ 。按取最大者的原则取7为 $T_E(4)$ 的值，写入左边④格中。如此下去至终点。