普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学 上册

（理工类）

主编 钱志强 刘俊菊

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学上册

（理工类）

主　编　钱志强　刘俊菊
副主编　冉兆平　李　静

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书紧扣理工科各专业人才培养目标，遵循高等数学的教学规律，依据高等院校理工类本科专业高等数学课程的教学大纲编写而成。力求贯彻以应用为目标，以够用为原则，以可读性为基点，以创新为导向，适当删减和淡化传统高等数学教材中的理论陈述，力求做到学完够用、学后会用、学以致用。

本书适用于三本院校理工科各专业高等数学课程的教学，还可以作为其他大学和自学考试的教材或参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:上册.理工类/钱志强 刘俊菊 主编.—武汉:华中师范大学出版社，2014.8
(普通高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-5622-6650-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①钱… ②刘… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 106836 号

高等数学上册
(理工类)
©钱志强 刘俊菊 主编

编 辑 室:第二编辑室	**电　　话**:027—67867362	
责任编辑:袁正科	**责任校对**:易　雯	**封面设计**:罗明波
出版发行:华中师范大学出版社		
社　　址:湖北省武汉市珞喻路 152 号	**邮　　编**:430079	
销售电话:027—67863426/67863280(发行部)	027—67861321(邮购)	027—67863291(传真)
网　　址:http://www.ccnupress.com	**电子信箱**:hscbs@public.wh.hb.cn	
印　　刷:华中理工大学印刷厂	**督　　印**:章光琼	
开　　本:787mm×1092mm　1/16	**印　　张**:16	**字　　数**:350 千字
版　　次:2014 年 8 月第 1 版	**印　　次**:2014 年 8 月第 1 次印刷	
印　　数:1—3000	**定　　价**:29.80 元	

前　言

高等数学是一门具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性的学科，是高等院校理工科学生一门重要的基础理论课，是深入学习其他专业课程的必备基础。它既是一种知识、方法和工具，更是一种文化、思想和素养。高等数学教育在培养高素质人才中具有独特的、不可替代的作用，而编写出高水平、高质量且应用性强的教材则是搞好高等数学教育的关键。

本书遵循高等数学的教学规律，坚持以应用为目标，以够用为原则，以可读性为基点，以创新为导向，适当删减和淡化传统高等数学教材中的理论陈述，力求做到学完够用、学后会用、学以致用。

本书紧扣理工科各专业人才培养目标，依据高等院校理工类本科专业高等数学课程的教学大纲编写而成，适用于三本院校理工科各专业高等数学课程的教学，还可以作为其他大学和自学考试的教材或参考用书。

在编写过程中，编者结合自身多年三本院校教学实践的经验，力求努力突出三本院校教学的特色：

1. 对原理与规律的叙述比较详细，言简意赅，通俗易懂。
2. 对概念的引出，注重阐明它们的实际背景，避免概念的抽象性。
3. 强调基本理论的实际应用，淡化严密的理论证明。
4. 强调基本运算方法的训练和能力的培养，不过分追求运算的技巧。
5. 针对各专业的特点，在内容上作了分层处理，有较强的选择性。
6. 每节均配有选择题、填空题，帮助对概念、定理的理解。
7. 每章均配有基础练习题和提高练习题，以适应不同层次学生的学习需求。

全书分上、下两册。上册主要讲述一元函数微积分学的知识，下册主要讲述常微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何和多元函数微积分学等知识。

本书的框架结构、统稿定稿由钱志强负责。钱志强、马军、毛宇、李静、冉兆平分别编写一至五章。

尽管我们十分努力，但由于水平有限，同时又加之时间仓促，书中难免会有诸多不尽如人意之处，欢迎广大师生、读者批评指正。

编　者

2014 年 5 月

目　　录

第 1 章　函数与极限 …… 1
1.1　映射与函数 …… 1
1.1.1　集合 …… 1
1.1.2　映射 …… 4
1.1.3　函数 …… 5
1.1.4　初等函数 …… 12
1.1.5　极坐标简介 …… 15
习题 1.1 …… 17
1.2　数列的极限 …… 19
1.2.1　数列极限的定义 …… 19
1.2.2　收敛数列的性质 …… 22
习题 1.2 …… 24
1.3　函数的极限 …… 25
1.3.1　函数极限的定义 …… 25
1.3.2　函数极限的性质 …… 29
习题 1.3 …… 30
1.4　无穷小与无穷大 …… 31
1.4.1　无穷小及其性质 …… 31
1.4.2　无穷大 …… 33
习题 1.4 …… 35
1.5　极限的运算法则 …… 36
1.5.1　极限的四则运算法则 …… 37
1.5.2　复合函数的极限运算法则 …… 40
习题 1.5 …… 41
1.6　极限存在的准则　两个重要极限 …… 43
1.6.1　夹逼准则 …… 43
1.6.2　单调有界准则 …… 46
习题 1.6 …… 50
1.7　无穷小的比较 …… 51
习题 1.7 …… 54
1.8　函数的连续性 …… 55
1.8.1　函数连续性的概念 …… 55
1.8.2　函数的间断点 …… 58
1.8.3　连续函数的和、差、积、商的连续性 …… 60
1.8.4　反函数与复合函数的连续性 …… 61
1.8.5　初等函数的连续性 …… 62

习题 1.8 …… 64
1.9 闭区间上连续函数的性质…… 66
1.9.1 有界性与最值定理…… 66
1.9.2 零点定理与介值定理…… 67
习题 1.9 …… 68
基础练习一 …… 69
提高练习一 …… 71
第 2 章 导数与微分 …… 74
2.1 导数的概念…… 74
2.1.1 引例…… 74
2.1.2 导数的定义…… 76
2.1.3 基本导数公式…… 78
2.1.4 导数的几何意义…… 79
2.1.5 函数的可导性与连续性的关系…… 80
习题 2.1 …… 82
2.2 函数的求导法则…… 83
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 …… 83
2.2.2 反函数的求导法则…… 84
2.2.3 复合函数的求导法则…… 85
习题 2.2 …… 88
2.3 高阶导数…… 89
2.3.1 高阶导数的定义…… 89
2.3.2 高阶导数的计算方法…… 90
习题 2.3 …… 91
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数…… 92
2.4.1 隐函数的导数…… 92
2.4.2 对数求导法…… 93
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数…… 95
习题 2.4 …… 96
2.5 函数的微分及其应用…… 97
2.5.1 微分的定义…… 98
2.5.2 可微的条件…… 99
2.5.3 微分的几何意义…… 99
2.5.4 基本初等函数的微分公式 …… 100
2.5.5 微分法则 …… 100
2.5.6 微分在近似计算中的应用 …… 102
习题 2.5 …… 103
基础练习二…… 104
提高练习二…… 106
第 3 章 中值定理与导数的应用…… 109
3.1 微分中值定理 …… 109

3.1.1 罗尔中值定理 …… 109
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 110
3.1.3 柯西中值定理 …… 113
习题 3.1 …… 115
3.2 洛必达法则 …… 116
3.2.1 $\frac{0}{0}$型不定式 …… 116
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型不定式 …… 118
3.2.3 其他不定式 …… 119
习题 3.2 …… 120
3.3 泰勒公式 …… 121
习题 3.3 …… 124
3.4 函数的单调性、极值、最大值与最小值 …… 124
3.4.1 函数单调性的判别法 …… 124
3.4.2 函数的极值 …… 127
3.4.3 函数的最大值和最小值 …… 130
习题 3.4 …… 131
3.5 曲线的凹凸性、拐点及函数作图 …… 132
3.5.1 曲线的凹凸性、拐点 …… 132
3.5.2 曲线的渐近线、函数作图 …… 136
习题 3.5 …… 140
基础练习三 …… 141
提高练习三 …… 142
第 4 章 不定积分 …… 145
4.1 不定积分的概念与性质 …… 145
4.1.1 原函数与不定积分的概念 …… 145
4.1.2 不定积分的基本性质 …… 147
4.1.3 基本积分表 …… 148
习题 4.1 …… 150
4.2 换元积分法 …… 151
4.2.1 第一类换元法(凑微分法) …… 151
4.2.2 第二类换元法 …… 156
习题 4.2 …… 161
4.3 分部积分法 …… 163
习题 4.3 …… 167
*4.4 几类特殊函数的积分法 …… 168
4.4.1 有理函数的积分 …… 168
4.4.2 三角函数有理式的积分 …… 171
习题 4.4 …… 172
基础练习四 …… 173

提高练习四…………………………………………………………………… 175

第 5 章　定积分及其应用…………………………………………………… 178

5.1　定积分的概念 ……………………………………………………… 178

5.1.1　实例 ……………………………………………………………… 178

5.1.2　定积分的定义 …………………………………………………… 180

5.1.3　定积分的几何意义 ……………………………………………… 182

5.1.4　定积分的性质 …………………………………………………… 182

习题 5.1 ……………………………………………………………… 186

5.2　微积分基本公式 …………………………………………………… 187

5.2.1　变上限的定积分(原函数存在定理) ……………………………… 187

5.2.2　微积分基本公式(牛顿-莱布尼茨公式)…………………………… 189

习题 5.2 ……………………………………………………………… 191

5.3　定积分的计算方法 ………………………………………………… 192

5.3.1　定积分的换元法 ………………………………………………… 192

5.3.2　定积分的分部积分法 …………………………………………… 196

习题 5.3 ……………………………………………………………… 198

5.4　广义积分　*Γ 函数 …………………………………………… 199

5.4.1　无穷区间的广义积分 …………………………………………… 199

5.4.2　无界函数的广义积分 …………………………………………… 201

*5.4.3　Γ 函数 ……………………………………………………… 204

习题 5.4 ……………………………………………………………… 205

5.5　定积分的微元法 …………………………………………………… 206

5.6　定积分在几何学上的应用 ………………………………………… 208

5.6.1　平面图形的面积 ………………………………………………… 208

5.6.2　体积 ……………………………………………………………… 212

5.6.3　平面曲线的弧长 ………………………………………………… 216

习题 5.6 ……………………………………………………………… 218

基础练习五…………………………………………………………………… 219

提高练习五…………………………………………………………………… 221

附录Ⅰ　希腊字母及常用数学公式……………………………………… 224

附录Ⅱ　几种常用的曲线方程及图形…………………………………… 228

附录Ⅲ　积分表……………………………………………………………… 230

习题参考答案………………………………………………………………… 239

第 1 章　函数与极限

初等数学研究的对象基本上是常量，而高等数学研究的对象是函数。函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

1.1　映射与函数

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，它在现代数学的发展中起着非常重要的作用。

集合是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的**元素**。

通常用大写字母 A、B、C、X、Y 等表示集合，用小写字母 a、b、c、x、y 等表示元素。如果 a 是集合 A 的元素，则表示为 $a \in A$，读作 a 属于 A。如果 a 不是集合 A 的元素，则表示为 $a \notin A$ 或 $a \overline{\in} A$，读作 a 不属于 A。

由有限个元素构成的集合，称为**有限集**；由无限多个元素构成的集合，称为**无限集**。

表示集合的方法通常有以下两种：

列举法：把集合的全体元素一一列举出来。

例如，由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可表示为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。

描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，则 M 可表示为

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}。$$

例如，设 M 为方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根构成的集合，可表示为

$$M = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}。$$

下面是几种常见的数集：

$\mathbf{N}$ 表示全体自然数构成的集合，称为**自然数集**：

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2 \cdots, n, \cdots\}。$$

全体正整数的集合为 $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合，称为**实数集**。

$\mathbf{Z}$ 表示全体整数构成的集合，称为**整数集**：

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}。$$

$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，称为**有理数集**：

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+},\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}。$$

设 A、B 是两个集合，如果 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B) 或 $B\supset A$(读作 B 包含 A)。

如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称**集合 A 与集合 B 相等**。例如，设

$$A=\{1,2\},B=\{x\mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B$。

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$。例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$。

不含任何元素的集合称为**空集**。空集记为 $\varnothing$，规定空集是任何集合的子集。

2. 集合的运算

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**)，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}。$$

如果我们研究某个问题时限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集。此时，我们称集合 I 为**全集**或**基本集**，称 $I\backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^c。

集合的运算满足下列法则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 对偶律：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\text{ 且 }y\in B\}。$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$。

3. 区间和邻域

任何一个变量都有确定的变化范围。如果变量的变化范围是连续的，则常用一种特殊的数集——**区间**来表示变量的变化范围。设 a 和 b 均为实数，且 $a<b$，以下为各种区间与

数集的对应关系：

开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b, x\in \mathbf{R}\}$。

闭区间　$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$。

半闭半开区间　$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$，

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b, x\in \mathbf{R}\}$。

以上四种区间都称为**有限区间**，数 $b-a$ 称为这些区间的长度。将闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1-1(a) 与(b) 所示。此外，还有五种无限区间。引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则无限区间可表示为：

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R},$$
$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a, x\in \mathbf{R}\},$$
$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a, x\in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b, x\in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}。$$

将无限区间 $[a,+\infty)$ 与 $(-\infty,b)$ 表示在数轴上，分别如图 1-1(c)、(d) 所示。

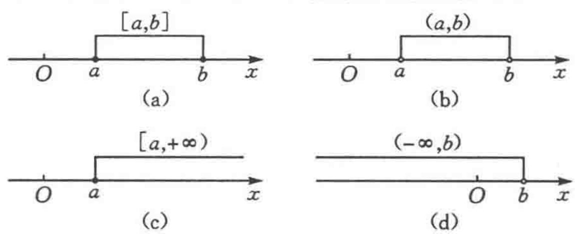

图 1-1

邻域也是一个常用的概念，以 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$，特殊地，称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的一个 δ **邻域**（δ 是给定的正数），记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}。$$

由于

$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

所以点 x_0 的 δ 邻域的两个端点关于 x_0 对称，其中 x_0 确定了邻域的位置，称作**邻域的中心**，δ 确定了邻域的大小，称为**邻域的半径**，如图 1-2 所示。

将邻域的中心 x_0 去掉所得的数集

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)。$$

如图 1-3 所示。

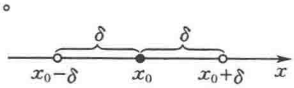

图 1-2

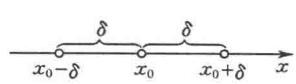

图 1-3

有时把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 分别称为 x_0 的**左邻域**和**右邻域**。

1.1.2 映射

定义 1.1 设 X、Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**,记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的**像**,并记作 $f(x)$,即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个**原像**;集合 X 称为映射 f 的**定义域**,记作 D_f,即

$$D_f = X,$$

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**,记为 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}。$$

在上述映射的定义中,需要注意的是:

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素:集合 X,即定义域 $D_f = X$;集合 Y,即值域的范围:$R_f \subset Y$;对应法则 f,使对每个 $x \in X$,有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应。

(2) 对每个 $x \in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y \in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集,即 $R_f \subset Y$,不一定有 $R_f = Y$。

例 1 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,对每个 $x \in \mathbf{R}$,$f(x) = x^2$。显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$,值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$,它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集。对于 R_f 中的元素 y,除 $y = 0$ 外,它的原像不是唯一的。如 $y = 4$ 的原像就有 $x = 2$ 和 $x = -2$ 两个。

例 2 设 $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,$Y = \{(x,0) \mid |x| \leqslant 1\}$,$f: X \to Y$,对每个 $(x,y) \in X$,有唯一确定的 $(x,0) \in Y$ 与之对应。显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D_f = X$,值域 $R_f = Y$。在几何上,这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1,1]$ 上。

例 3 设 $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$,对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,$f(x) = \sin x$。那么 f 是一个映射,定义域 $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,值域 $R_f = [-1,1]$。

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $R_f = Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 X 到 Y 上的**映射**或**满射**;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 上的**单射**;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为**一一映射(或双射)**。

上面例 1 中的映射,既非单射,又非满射;例 2 中的映射不是单射,是满射;例 3 中的映射,既是单射,又是满射,因此是一一映射。

设 f 是 X 到 Y 的单射,则由定义,对每个 $y \in R_f$,有唯一的 $x \in X$,适合 $f(x) = y$。于是,我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g,即

$$g: R_f \to X,$$

对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y)=x$，且 x 满足 $f(x)=y$，这个映射 g 称为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$。

按上述定义，只有单射才存在逆映射。所以，在例 1、2、3 中，只有例 3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值：

$$f^{-1}(x)=\arcsin x, x \in [-1,1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

1.1.3　函数

1. 函数的概念

定义 1.2　设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，通常记为

$$y=f(x), x \in D。$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$。

在函数的定义中，对每个 $x \in D$，按对应法则 f，总有 $\mathbf{R}$ 中唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y=f(x)$。自变量 x 与因变量 y 之间的依赖关系称为**函数关系**，y 的取值范围称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}。$$

需要指出的是，按上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值。为了叙述方便，习惯上常用“$y=f(x), x \in D$”表示定义在 D 上的函数，但应理解为由它所确定的函数 f。

函数的符号可根据需要任意选取，除了常用 f 表示外，还可以用 F, g, φ 等字母表示。相应的，函数可记作 $y=F(x), y=g(x), y=\varphi(x)$ 等。但在同一问题中，讨论到几个不同的函数时，为表示区别，应用不同的记号来表示它们。

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内。因此，构成函数的两大要素是：定义域 D_f 和对应法则 f。如果两个函数的定义域相同，且对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

函数的定义域一般按以下两种情形来确定：一种是有实际背景的函数，应根据实际背景中变量的实际意义来确定。例如：用 x 表示边长的正方形，其面积用 y 表示，则 y 与 x 之间的函数关系为 $y=x^2, x \in [0,+\infty)$，定义域为 $[0,+\infty)$。另一种是用抽象的解析式表示的函数，一般约定这种函数的定义域是使得解析式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为**自然定义域**。在这种约定下，一般用解析式表达的函数用“$y=f(x)$”表示即可，不必写出 D_f，例如，函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；函数 $y=\sqrt{\lg(x-1)}$ 的定义域为 $[2,+\infty)$。

在中学已学过函数的表示方法，共有三种：**表格法**、**图形法**、**解析法**。

下面举几个常见函数的例子。

例 4　常量函数

$$y = 1。$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{1\}$，图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-4 所示。

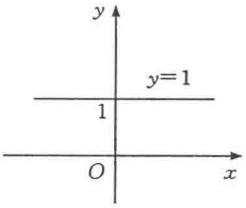

图 1-4

例 5　绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0。 \end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，图形如图 1-5 所示。

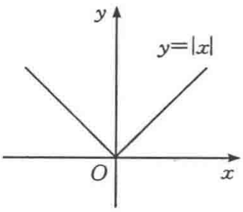

图 1-5

例 6　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0。 \end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-6 所示。

对于任何实数 x，下列关系式成立：

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|。$$

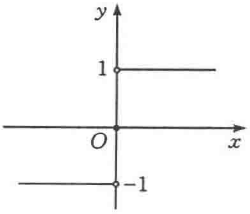

图 1-6

在例 5 和例 6 中看到，有时一个函数要用几个式子表示。这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数，称为**分段函数**。

例7　函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}x, & x>0。\end{cases}$$

该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，图形如图1-7所示。

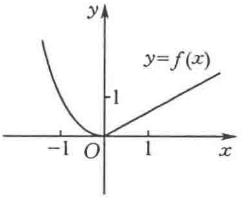

图1-7

例8　取整函数 $y=[x]$。

设 x 为任意实数，$y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。例如，$\left[\dfrac{1}{3}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-1.8]=-2$。

$y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，图象如图1-8所示。

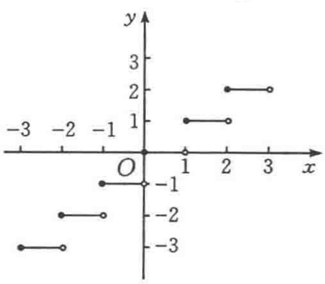

图1-8

2. 几种特殊函数

(1) 有界函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，若存在一个正数 M，当 $x\in I$ 时，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**有界函数**。

如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in I$，使得 $|f(x_1)|>M$，那么称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**无界函数**。

例如：$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

又如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，在 $(0,+\infty)$ 内，对于任何 $M>0$，当 $x=\dfrac{1}{M+1}$ 时，$f(x)=M+1>M$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界；但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在任何 $[a,+\infty)(a>0)$ 内都有界。

(2) 单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,如果对于任意的 $x_1 \in I, x_2 \in I$,当$x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(图 1-9),且称 I 为函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**;

如果对于任意 $x_1 \in I, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的(图 1-10),且称 I 为函数 $f(x)$ 的**单调减少区间**。

单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**。

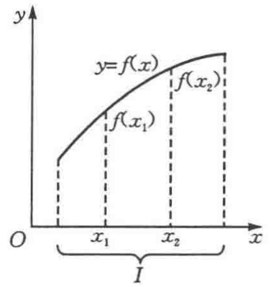

图 1-9

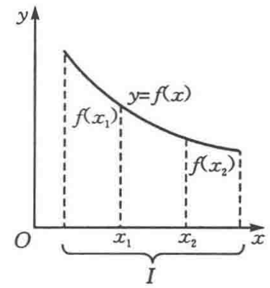

图 1-10

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在区间$[0, +\infty)$上是单调增加的,在区间$(-\infty, 0]$上是单调减少的;在区间$(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x) = x^2$ 不是单调的(图 1-11)。

又例如,函数 $f(x) = x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的(图 1-12)。

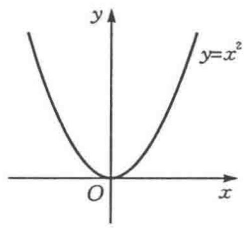

图 1-11

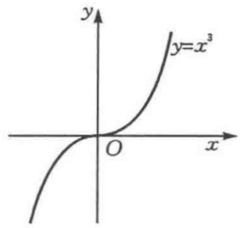

图 1-12

(3) 奇偶函数

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 为关于原点对称的区间,如果对于任何 $x \in D$,有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;如果对于任何 $x \in D$,有

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**。

奇函数的图形关于原点是对称的。因为若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x) = -f(x)$,所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点,则与它关于原点对称的点$A'(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1-13)。

偶函数的图形关于 y 轴是对称的。因为若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，所以如果 $A(x,f(x))$ 是图形上的点，则与它关于 y 轴对称的点 $A''(-x,f(x))$ 也在图形上(图 1-14)。

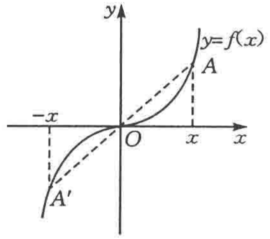

图 1-13

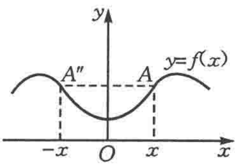

图 1-14

例 9　判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；

(2) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x)=\lg(x+2)$。

解　(1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，因

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sqrt[3]{[1-(-x)]^2}+\sqrt[3]{[1+(-x)]^2}\\&=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为偶函数。

(2) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，因

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\lg(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数。

(3) 函数的定义域为 $(-2,+\infty)$，不是关于原点对称的区间，所以 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数。

(4) 周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于一切 $x\in D$ 有 $(x+l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**。周期函数的周期不是唯一的，通常所说的周期函数之周期是指**最小正周期**。

例如：函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而函数 $\tan x$，$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数。

并非每个周期函数都有最小正周期。