

弹性地基板动力问题的 数值分析

Tanxing Dijiban Dongli Wenti
de Shuzhi Fenxi

谢洪阳 著



中国出版集团



世界图书出版公司

弹性地基板动力问题的数值分析

谢洪阳◎著

中国出版集团

世界图书出版公司

广州·上海·西安·北京

图书在版编目 (CIP) 数据

弹性地基板动力问题的数值分析/谢洪阳著. —广州: 世界图书出版广东有限公司, 2013.10

ISBN 978-7-5100-6983-3

I. ①弹… II. ①谢… III. ①弹性地基板—动力学分析
IV. ①TU348

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 235942 号

弹性地基板动力问题的数值分析

策划编辑 李 瑞

责任编辑 孔令钢

出版发行 世界图书出版广东有限公司

地 址 广州市新港西路大江冲 25 号

[http:// www.gdst.com.cn](http://www.gdst.com.cn)

印 刷 虎彩印艺股份有限公司

规 格 710mm×1000mm 1/16

印 张 17.5

字 数 311 千

版 次 2013 年 10 月第 1 版 2014 年 3 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5100-6983-3/O · 0042

定 价 53.00 元

版权所有, 翻版必究

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 弹性地基板的概念	1
1.2 地基模型	1
1.2.1 Winkler 模型	2
1.2.2 弹性半空间模型	2
1.2.3 层状地基模型	5
1.3 弹性地基板的研究现状	6
1.3.1 弹性板模型	6
1.3.2 静力问题	6
1.3.3 动力问题	9
1.4 主要研究工作	11
第 2 章 弹性板的自由振动	13
2.1 引 言	13
2.2 基本理论	13
2.2.1 Mindlin 板理论	13
2.2.2 板的等参单元	17
2.2.3 广义质量矩阵	20
2.2.4 特征方程	21
2.3 程序说明	22
2.3.1 程序框图	22
2.3.2 主要子程序	22
2.4 数值结果和分析	23
2.4.1 圆 板	23
2.4.2 方 板	26
2.4.3 与 p-Ritz 法的比较	28
第 3 章 Winkler 地基上的弹性板	29
3.1 引 言	29

3.2 Winkler地基与板的相互作用	30
3.3 地基板的自由振动	31
3.3.1 特征方程	31
3.3.2 程序框图	32
3.3.3 方板自由振动数值分析	32
3.3.4 圆板自由振动数值分析	36
3.4 移动荷载作用下地基板的动力响应	38
3.4.1 整体动力平衡方程	38
3.4.2 Newmark逐步积分法	39
3.4.3 程序框图	41
3.4.4 薄板动力响应分析	41
3.4.5 厚板动力响应分析	46
第 4 章 双参数地基上的弹性板	50
4.1 地基模型参数	50
4.1.1 荷载作用范围内	51
4.1.2 荷载作用范围外	52
4.2 板域内动力平衡方程	53
4.3 板域外地基的作用	55
4.3.1 基本解与积分方程	55
4.3.2 离散化方法	56
4.3.3 等价刚度矩阵	57
4.4 整体动力平衡方程	58
4.5 程序说明	58
4.5.1 主要子程序	58
4.5.2 程序框图	59
4.6 数值结果与分析	60
4.6.1 自由振动	60
4.6.2 强迫振动	61
4.7 小 结	64
第 5 章 弹性半空间地基上的弹性板	65
5.1 引 言	65

5.2 三维二十结点等参单元	65
5.2.1 坐标变换和位移函数	66
5.2.2 应变和应力	66
5.2.3 单元刚度矩阵与等效结点荷载	68
5.2.4 单元质量矩阵	69
5.3 点辐射无限元	69
5.3.1 无限元坐标映射函数	70
5.3.2 单结点映射	71
5.3.3 三维点辐射八结点无限元	72
5.4 有限元无限元耦合静力分析程序	76
5.4.1 子程序及其功能	76
5.4.2 程序框图	77
5.4.3 算 例	77
5.5 对三维无限元模型的讨论	79
5.6 辐射阻尼矩阵	80
5.6.1 粘性边界	80
5.6.2 三维辐射无限元的辐射阻尼矩阵	80
5.7 有限元无限元耦合动力时程分析程序	82
5.7.1 整体动力平衡方程	82
5.7.2 子程序及其功能	82
5.7.3 程序框图	83
5.7.4 算 例	83
5.8 地基与板的共同作用的静力分析	85
5.8.1 板模型的选择	85
5.8.2 算 例	85
5.9 地基板的自由振动分析	86
5.9.1 特征方程	86
5.9.2 程序框图	87
5.9.3 算 例	88
5.10 地基板动力响应的时程分析	90
5.10.1 突加荷载作用下地基板的动力响应	90

5.10.2 谐和荷载作用下地基板的动力响应	91
5.11 小 结	93
第 6 章 层状地基上的弹性板	95
6.1 三维轴辐射八结点无限元	95
6.1.1 坐标映射与位移函数	95
6.1.2 雅可比矩阵	96
6.2 有限元与轴辐射无限元耦合静力分析程序	97
6.2.1 程序框图与子程序	97
6.2.2 算 例	97
6.3 层状地基上地基板的静力分析	99
6.4 层状地基上地基板的自由振动分析	100
6.4.1 特征方程	100
6.4.2 程序说明	100
6.4.3 算 例	100
6.5 地基板动力响应的时程分析	102
6.5.1 程序说明	102
6.5.2 突加荷载作用下地基板的动力响应	102
6.5.3 脉冲荷载作用下地基板的动力响应	103
6.6 小 结	108
第 7 章 结论与展望	109
7.1 总 结	109
7.2 展 望	111
附录 A 弹性板自由振动分析程序	112
A.1 源程序	112
A.1.1 程序说明	112
A.1.2 源程序代码	112
A.2 分析实例	139
A.2.1 例 题	139
A.2.2 输入文件	139
A.2.3 程序执行	143
A.2.4 结果分析	143

附录 B Winkler地基上弹性板自由振动分析程序	145
B.1 源程序	145
B.1.1 程序说明	145
B.1.2 源程序代码	145
B.2 分析实例	168
B.2.1 输入文件	168
B.2.2 程序执行和结果分析	171
附录 C 双参数地基上弹性板自由振动分析程序	172
C.1 源程序	172
C.1.1 程序说明	172
C.1.2 源程序代码	172
C.2 分析实例	210
C.2.1 输入文件	210
C.2.2 程序执行和结果分析	214
附录 D 点辐射无限元与有限元耦合静力分析程序	215
D.1 源程序	215
D.1.1 程序说明	215
D.1.2 源程序代码	215
D.2 分析实例	248
D.2.1 输入文件	248
D.2.2 结果分析	257
参考文献	258
致 谢	269

第1章 绪 论

1.1 弹性地基板的概念

结构物的地基与基础之间的共同作用研究是岩土力学的重要分支。地基基础是一个共同工作的整体系统，在荷载作用下，二者的交界面即产生相互作用。如果基础是弹性板，那么地基基础的相互作用问题即弹性地基板问题。近年来，随着数值计算理论和计算机技术的发展，地基基础的动力相互作用研究得到迅速发展。许多承受动力作用的实际工程结构，如道路、机场跑道、建筑物筏基、动力设备基础等，都可以视为弹性地基板的动力问题。

1.2 地基模型

天然土体介质是一种复杂的多相离散体系，在荷载作用下的宏观行为由一系列力学过程决定，其应力应变关系呈现出非线性、不可逆及随时间变化的特性，且具有明显的各向异性和非均匀性。如果在分析土与基础相互作用时，考虑土体的所有特性，那将是一项非常繁重而困难的工作。直到现在，满足广泛理论和完全符合实际的地基模型还没有建立，很多情况下，还不可能精确地描述从地基土与结构开始发生相互作用到地基变形终止的全部过程。因此，工程师和学者不得不采用某种近似的理想土体模型来代替真实的地基土。使土的理想化的最简单的方法是介质土的连续统一化，即假设土体为连续介质和具有线弹性性质。这个假设当然不能精确描述天然土体的力学特性，却能较方便地分析土与基础的相互作用问题。在第四届国际土力学与地基基础大会上发表的相关资料表明，根据对沉降和基础底面的接触应力的观测，接触应力的分布图式介于由弹性半空间假设和由基床系数假设得出的应力分布图之间。这说明土的线弹性模型在理论和实践上都是可取的。

1.2.1 Winkler 模型

Winkler 模型^[1]是捷克工程师 Winkler 于 1867 年在计算铁路路轨时提出的一个假设,他认为土介质表面任一点处的位移 w 与作用在该点的应力 p 成正比,而与作用在其他点的应力无关,基本方程为:

$$p(x, y) = k_s w(x, y) \quad (1.1)$$

式中, k_s 称为地基基床系数或地基反力系数,量纲为[力][长度]⁻³。

Winkler 地基模型的特征是把土体视为由一系列侧面无摩擦的土柱或彼此独立的弹簧组成,其变形具有弹簧变形的特点,相邻弹簧之间变形互不影响,即在基础底面下的土体产生与基底压力成正比的沉降位移,而在基底范围之外的土体位移均为零。这种模型忽略了土体中的剪应力,事实上,土体中存在剪应力,使地基中的附加应力向基底周围土体中扩散,从而引起基础以外的地基表面也产生沉降变形。

1.2.2 弹性半空间模型

弹性半空间地基模型是把地基假设为均匀、各向同性、弹性的半无限体。与 Winkler 地基模型相比,这种模型属于连续介质模型,不仅可以反映荷载作用范围内土体的沉降变形,也能反映荷载作用范围外土体的位移。此时,土体的本构关系为:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1.2)$$

式中 $\{\sigma\}$ 和 $\{\varepsilon\}$ 分别为应力和应变列向量, $[D]$ 为弹性矩阵:

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

式中, E 、 μ 分别为土体的弹性模量和泊松比。

Boussinesq^[2]首先推导出了弹性半空间表面受一集中竖向荷载 P 时的位移分布。 z 方向的表面位移为:

$$w(r) = \frac{P(1-\mu)}{2\pi Gr} \quad (1.4)$$

G 是弹性土体的剪切模量, r 是弹性半空间表面上任一点至荷载作用点的距离。

弹性半空间地基模型考虑了压力的扩散作用, 能表征土体位移的连续性, 这无疑是合理的, 因而该模型应用较为广泛, 但是该模型夸大了地基的范围, 大量研究成果及现场观测也表明, 弹性模型的应力和变形扩散范围往往超过了地基的实际情况, 计算所得的沉降变形量和地基沉降范围往往偏大。另外, 该模型也没有反映地基土的分层特征或非均质特性。目前, 一般认为实际地基的压缩层厚度是有限的, 地基土的变形模量一般随深度变化, 因此, 弹性半空间地基模型的应用, 存在一定的局限性。

1.2.2.1 双参数地基模型

Winkler 地基理论虽然简单直观, 但不能很好地描述土体的连续性; 而弹性半空间连续介质模型高估了地基的扩散能力, 在数学上较为复杂, 难以在实际工作中得到广泛应用。为此, 人们提出了介于它们之间的一类地基模型, 即双参数地基模型。

双参数模型以两个独立的弹性常数来表征土介质的特性, 主要有两种建立方法: 一种是以 Winkler 模型为基础, 在各个弹簧之间引入剪力传递作用, 以消除其不连续性, 这类模型的代表有费洛年柯—鲍罗基契 (Filonenko-Borodich) 模型、帕斯捷尔纳克 (Pasternak) 模型和海滕义 (Hetenyi) 模型; 另一种则是对弹性连续介质模型引入某种简化的位移或应力分布假设, 这类模型的代表有符拉索夫 (Vlazov) 模型。

1.2.2.2 Filonenko-Borodich 模型^[3]

该模型是用承受常值拉力 T 的弹性薄膜将 Winkler 地基中各弹簧单元连接起来, 保证地基位移的连续性。竖向荷载集度 $p(x, y)$ 与地基表面位移 $w(x, y)$ 的关系为:

$$p(x, y) = kw(x, y) - T\nabla^2 w(x, y) \quad (1.5)$$

式中 k 、 T 是表征土体模型的两个弹性常数。

1.2.2.3 Pasternak 模型^[4]

该模型假设在各弹簧单元间存在着剪切相互作用, 这种剪切相互作用是通过弹簧单元与一层只能产生横向变形而不可压缩的竖向单元相连接而实现的。若假设剪切层在 x, y 平面内为各向同性, 剪切模量为 $G_x = G_y = G_s$, 则竖向荷载集度 $p(x, y)$ 与地基表面位移 $w(x, y)$ 的关系为:

$$p(x, y) = kw(x, y) - G_s \nabla^2 w(x, y) \quad (1.6)$$

G_s 只与地基的剪切变形有关, 称为剪切基床系数。

1.2.2.4 Hetenyi 模型^[5]

该模型在独立弹簧单元间加入一个三维弹性板, 从而实现传递弹簧间的相互作用, 其特征函数可表示为:

$$p(x, y) = kw(x, y) - D \nabla^4 w(x, y) \quad (1.7)$$

式中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为板的挠曲刚度, E, μ 分别为弹性板的弹性模量和泊松比。

1.2.2.5 Vlazov 模型^[6]

该模型是通过引进一些能简化各向同性线弹性连续介质基本方程的位移约束而导得的。假设在 x, z 平面内厚度为 H 的弹性层为平面应变状态, 位移分量为:

$$u(x, z) = 0 \quad w(x, z) = w(x)h(z) \quad (1.8)$$

式中 $h(z)$ 是描述 z 方向位移变化的函数, 它可以呈线性或指数变化, 如:

$$h(z) = 1 - \frac{z}{H} \quad (1.9)$$

或

$$h(z) = \frac{\text{sh}[\gamma(H-z)/L]}{\text{sh}(\gamma H/L)} \quad (1.10)$$

式中 γ 是与地基有关的常数, L 是结构的某一特征尺寸。依据以上假设, 并结合变分法原理, 可求得竖向荷载集度 $p(x)$ 与地基表面位移 $w(x)$ 的关系为:

$$p(x) = kw(x) - 2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.11)$$

式中 t 为荷载传递率，是作用力对相邻单元可传性的一种度量。

$$k = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2} \int_0^H \left(\frac{dh}{dz} \right)^2 dz \quad t = \frac{E_0}{4(1 + \mu_0)} \int_0^H h^2 dz \quad (1.12)$$

且有

$$E_0 = \frac{E}{1 - \mu^2} \quad \mu_0 = \frac{\mu}{1 - \mu} \quad (1.13)$$

E 、 μ 分别为土体弹性模量和泊松比。

1.2.2.6 董军模型^[7]

该模型是 Pasternak 模型的一种发展，给出了式(1.6)中地基参数 k 及 G_s 的确定方法。它根据矩形竖向均布荷载下厚度为 H 的弹性地基中弹性理论所得的应力分布规律，通过对比计算，确定矩形分布荷载作用下地基竖向挠度沿深度 z 的分布函数 $h(z)$ ，从而确定地基参数。第4章将对该模型做进一步介绍。

1.2.3 层状地基模型

地基土往往成层沉积而成，在各层内土的性质比较均匀，但各层之间差异较大。以上三种地基模型均不能反映地基土的层状特征，为此，提出了层状地基模型。该模型在分析时用弹性理论的方法计算地基中的应力，地基中的变形则通常应用土力学中的分层总和法。

当地基土分布比较复杂，前述各种地基模型不足以模拟，但具有详细的压缩模量资料时，采用层状地基模型是简便可行的。总之，层状地基模型能较好地反映基底下各土层的特性，其计算参数压缩模量 E_s 可由常规压缩实验直接得到，在实践中已积累了不少经验，因此，共同作用分析能得到比较满意的结果。

1.3 弹性地基板的研究现状

1.3.1 弹性板模型

众所周知, 弹性板的模型主要有两大类: 薄板模型和厚板模型。Kirchhoff^[8]薄板理论假设平板弯曲后其中面法线仍垂直于中面, 因此, 挠度 $w(x, y)$ 具有 C^1 连续性, 中面上一点的转角与挠度不相互独立。Kirchhoff 板理论忽略了板的横向剪切变形及转动惯量, 据此对厚板进行自由振动分析时, 会高估板的振动频率。

Reissner^[9]和 Mindlin^[10]提出了相近的厚板理论, 他们均假设平板弯曲后的中面法线仍为直线, 但不再垂直于弯曲后的中面。这样挠度和转角不受 C^1 连续性要求的限制, 中面上一点的转角与挠度是相互独立的。这种板理论考虑了板的一阶剪切变形, 适用于薄板和厚板, 用于板的振动分析时, 还能考虑板的转动惯量。

在弹性板与地基共同作用的三维分析中, 也可以将板视为一般的连续弹性介质, 即不对板做任何特殊的假设。

1.3.2 静力问题

弹性地基板作为道路、机场跑道及筏板基础等结构物的基本力学模型, 长期以来, 受到了国内外许多专家学者的关注。塞尔瓦杜雷 (Selvadurai) 对各种弹性地基上的有限板和无限板问题的早期研究成果做了详细的阐述^[11]。目前, 对弹性地基板问题的分析主要有两大类方法: 解析法和数值法。

1.3.2.1 解析法

解析法通常用来分析 Winkler 地基或双参数地基上的弹性薄板。由于数学上的困难, 通常只对特定形状的板进行分析, 如无限大板、圆板、矩形板等。

Winkler 地基或双参数地基上的无限大板问题的控制微分方程相对来说较简单, 在特定荷载作用下, 其解可以用显式函数的形式来表达。Hertz^[12]首先给出了集中荷载作用下的多项式解; Wyman^[13]对此问题给出了更为紧凑的解; Hetenyi^[5]、Timoshenko^[14]、Keer^[15]、Panc^[16]、Kneifati^[17]等都对无限大板做进一步研究; Livesley^[18]得到了 Winkler 地基上无限大板在任意竖向荷载作用下的形式解; Filonenko-Borodich^[3]、Pasternak^[4]、Vlazov^[6]、Panc^[16]对双参数地基上的无限大板

进行了研究,并给出了各自的一些解答。

对弹性半空间上的无限板,通常用积分变换^[19]的方法来分析。问题的解可以通过对无限域的数值积分来获得,也可以用多项式来表达。对于受集中荷载或圆形均布荷载的问题,Sneddon^[20]、Pister^[21]、Arora^[22]、Selvadurai^[23]等人给出了各自的数值解。

用解析法分析弹性地基上的有限板非常困难,一般只对承受轴对称荷载的圆形板进行分析。对Winkler地基上承受轴对称荷载的圆形板,许多学者如Hetenyi^[5]、Selvadurai^[11]、Reissman^[24]、Conway^[25]、Celep^[26]等都进行了研究。对双参数地基上承受轴对称荷载的圆形板,Vlazov^[6]、Korenev^[27]、Keer^[15]、Yu^[28]、Saygun^[29]、Guler^[30]等都进行了研究,Selvadurai^[11]还分别分析了圆板受均布荷载、集中荷载及边缘受载的情况。

对弹性半空间上的圆板,如果忽略板与地基之间的摩擦作用,那么板的弯曲控制方程可以简化为一个积分方程^[31,32],因此,许多理论分析都关注于求解该积分方程。Rajapakse^[33]采用极坐标下的幂级数来表达接触应力,并据此对圆板进行分析;Ishkova^[34]根据无限刚性圆板的解答,进一步推导出考虑板的抗弯刚度的解。

国内学者通常通过能量方法来求解地基板问题,即先假定位移函数,再利用边界条件确定特定参数。因为工程实践中矩形地基板的应用非常广泛,所以学者们对矩形地基板的研究也很关注。张福范^[35]运用解析法求解了弹性地基上的自由边界矩形板问题;生跃^[36]对双参数地基上的自由边界矩形板进行了研究;梁兴复^[37]利用Fourier双三角余弦级数和单三角余弦级数,讨论和分析了弹性地基上四边自由正交各向异性矩形板的弯曲问题;陈静云^[38]利用功的互等原理推导了弹性地基上自由矩形板的解析解;王虎^[39]依据Kirchhoff薄板理论,求得了弹性地基上无限长板受局部荷载作用的解析解。

解析法的解答得出许多重要成果。然而,解析法也有其局限性:①只对特定形状的地基板在特定荷载作用下情形能获得解析解,对更为一般的情况,则难以获得甚至不存在解析解;②解析解的形式大多很复杂,物理意义不直观,不便于在实际工程中应用。

1.3.2.2 数值法

数值法是伴随着计算机技术的发展而兴起的。对土与基础相互作用问题,常用的数值分析方法有:有限差分法(FDM)、有限条法、有限元法(FEM)和边界元法(BEM)。

Malt^[40]、Wang^[41]、Ghali^[42]等学者用有限差分法分析了弹性地基上的有限长梁;Pickett^[43]、Janes^[44]、Bosakov^[45]等学者用有限差分法分析了弹性地基上的矩

形板; Chattopadhyay^[46]、Chakravorty^[47]、Melerski^[48]等人用有限差分法分析了弹性地基上的圆形板; Selvadurai^[11]用有限差分法分析了 Winkler 地基、双参数地基、及弹性半空间地基上的四边自由矩形板。国内李宁^[49]用有限差分法分析了 Winkler 地基上简支、固支及自由边界条件的弹性薄板; 王国体^[50]分析了双参数地基上的弹性梁。

张佑启^[51,52]系统介绍了有限条法的原理, 并将这种方法运用到层状土与结构的相互作用分析中^[53]; Huang^[54]、Chow^[55]将有限条法和弹簧系统相结合, 分析了弹性地基上的矩形板问题; 崔敏文^[56]用有限条法分析了 Winkler 地基上的弹性板; 黄卫^[57]用有限条法分析了弹性地基上的厚板和空心厚板。

有限元法是非常有力的数值方法, Zienkiewicz^[58]、Desai^[59]、Gudehns^[60]、Hinton^[61]、朱伯芳^[62]、王元汉^[63]等系统地介绍了有限元法的原理。土体是半无限空间弹性体, 用有限元法分析土与弹性板相互作用时, 对土体有不同的处理方法。第一种方法是在离荷载作用区较远处取一人工边界, 并假设人工边界处土的位移为零, 在人工边界以内, 对土体进行有限元划分。这种方法单元数量多, 计算量大。第二种方法是采用有限元与无限元耦合来模拟无限土体。Ungless^[64]于 1973 年首先提出了无限元的概念; Bettess^[65]、Beer^[66]及 Zienkiewicz^[67]分别提出了不同的坐标映射函数, 发展了无限元理论; 张佑启^[68]推导了环状无限元模型; Viladkar^[69]运用此模型对浅基础进行了数值分析。很多学者如 Godbole^[70]、Haggblad^[71]、Sadecka^[72]、Auersch^[73]、葛修润^[74]、张建辉^[75]等都对有限元与无限元耦合进行了理论与数值研究。第三种方法是只对板进行单元划分, 而土体则取为第 1.2 节中的某一种模型, 这是一种半解析半数值方法。张佑启^[76]最早用这种方法分析了 Winkler 地基及弹性半空间地基上的矩形板, 其后, 许多学者用这种方法对地基板进行了数值分析, Smith^[77]分析了 Winkler 地基及弹性半空间地基上的圆形板弯曲问题; Svec^[78,79]分析了矩形及三角形地基板问题; Yang^[80]分析了双参数地基上的矩形板问题; 王元汉^[81-83]采用等参数单元对地基板进行离散, 分析了多种形状的地基板问题, 并分析了非各向同性地基上的地基板。

边界元法也是一种常用的数值方法, 通常这种方法与有限元法结合在一起运用。Brebbia^[84]、Mackerrle^[85]、嵇醒^[86]等对边界元法进行了系统的介绍; 王建国^[87]用边界元法分析了双参数地基上的弹性板; 张祥^[88]用有限元边界元联合解法分析了双参数地基上的弹性厚板; 王元汉^[89]采用边界配置法分析了双参数地基上的弹性方板和圆板, 这是一种半解析半数值方法。

1.3.3 动力问题

以上提及的文献主要是对静载作用下弹性地基板的变形问题进行研究。实际上,许多地基板如道路、飞机跑道、动力设备基础等主要承受动荷载,因此,学者们自然关注地基板动力问题的研究。

对土与基础动力相互作用效应的研究,最早起源于1904年Lamb对弹性地基振动问题的分析^[90]。1936年,Reissner通过对Lamb解的积分,对弹性半空间表面刚性圆形基础振动问题进行了研究。20世纪50年代,Bycroft^[91]推导了圆形和矩形基础在应力边值条件下的平移、旋转和扭转振动的瞬态和稳态的解析解。20世纪60年代,Lysmer^[92]提出了土与基础动力相互作用效应的集中参数法,该方法在目前仍具有广泛的应用前景。随后,学者们加强了对弹性地基板的研究。Savidis^[93]、Iguchi^[94]、Whittaker^[95]等分析了弹性地基与薄板的动力相互作用,但由于参数选择较为困难,而难以运用于实际工程;Auersch^[96]用积分法求得了谐和集中荷载作用下弹性半空间地基、层状地基和Winkler地基与柔性板的动力相互作用解;Shi^[97]、Xiang^[98,99]、Wang^[100]等用解析法对不同边界的双参数弹性地基板的动力响应问题行了研究;Lam^[101]用格林函数法得到了各种边界条件下双参数弹性地基板振动响应的解析解。

国内学者对地基板的动力问题进行了深入的理论研究,获得了许多有益的成果。黄晓明^[102]推导了文克勒地基上无限大板的纵向振动微分方程,用Hankel-Laplace变换获得了任意轴对称荷载作用下的挠度解;随后,他采用函数变换法讨论了弹性半空间地基板在脉冲荷载作用下的挠度^[103]。黄伟^[104]研究了冲击荷载下弹性地基板的动力响应。张选兵^[105]利用双参变量的Stockes变换,给出了弹性地基上自由边矩形板承受冲击荷载的动力响应问题的级数解,并采用精细时程积分法计算出了板中心受到矩形波冲击荷载时动力响应的数值结果;随后,他运用类似方法求得了双参数弹性地基上自由矩形板受冲击荷载的动力问题级数解^[106]。郑建军^[107]应用贝塞尔函数理论,推导了双参数地基上圆板轴对称稳态振动的解析解。王明贵^[108]把地基看作三维弹性半空间体,考虑地基的衰减变形,假定地基与板之间完全粘着摩擦接触,用能量变分原理导出了自由矩形板的一般方程,并分析了相对刚度对动力和静力性能的影响。张英世^[109]建立文克尔地基上矩形薄板自由振动和强迫振动的微分方程并求得其通解,给出振型函数的表达式及常见支承条件下板的频率方程,用广义函数讨论板在各种荷载下的强迫振动响应;1999年又用同样的方法求解了两对边内均受拉(压)力作用的矩形薄板自由振动