赵竹红 主编

陈恩水、陆天明 本册主编

高校自主招生考试研究会

全国重点大学自主招生通用教程

QUANGUO ZHONGDIANDAXUE ZIZHUZHAOSHENG TONGYONGJIAOCHENG

数学、物理

真题解析与模拟

精练

南京大学出版社

赵竹红 主编
陈恩水、陆天明 本册主编
高校自主招生考试研究会

全国重点大学自主招生通用教程

QUANGUO ZHONGDIANDAXUE ZIZHUZHAOSHENG TONGYONGJIAOCHENG

数学、物理真题解析与模拟精练

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国重点大学自主招生通用教程. 真题解析与模拟精练/赵竹红主编. —南京:南京大学出版社,2014.9

ISBN 978-7-305-13697-9

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 ②中学物理课—高中—习题集—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 178069 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 全国重点大学自主招生通用教程 · 真题解析与模拟精练
主　　编 赵竹红
本册主编 陈恩水　陆天明
责任编辑 惠　雪　季　红　　编辑热线 025-83595509

照　　排 江苏南大印刷厂
印　　刷 常州市武进第三印刷有限公司
开　　本 787×1092　1/16　印张 14.25　字数 370 千
版　　次 2014 年 9 月第 1 版　2014 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-13697-9
定　　价 45.00 元

网　　址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:(025)83594756

跃起闯关，铸造辉煌
（代前言）

王步高

跨进大学校门，对很多人而言，是人生黄金时代的开始。我先后就读于南京大学和吉林大学、南京师范大学，长期任教于东南大学，退休后又任教于清华大学，比较这些学校，虽都叫“大学”，实际办学风格、办学特色各不相同，或者说“大”和强大程度并不相同，这是人所共知的。华中科技大学有位教授说：“泡菜的味道，是由泡菜坛中水的味道决定的。”来清华大学以后，我更体会到上大学能进入清华这样的著名高校，对一生成才能提供更好的文化环境和文化氛围，才能更找到上大学的感觉。大学之间的差别，不仅在办学规模的大小、校园面积的不同、硬件设施和办学条件及师生的水平差异等等多数人能想象得出的不同，而且名校拥有一种“雍容大度”的胸襟，“追求卓越，耻不如人”的气概，一些说不清、道不明，却又明明白白存在的类似“气场”这样的东西。当您长期生活在它的氛围中，特别是您将它与不同层次高校比较时，更会有这样的感受。据说，清华大学每年在河北这样很大的省就录取 30 来人，即使在一个县、市名列第一，也未必一定能被录取。您能上清华、北大、南大、东大、复旦、交大、浙大、吉林大学这类高校，会使您的青春放射出更奇丽的光彩。

清华大学历史上有过许多不拘一格录取人才的佳话。1929 年夏，钱钟书报考清华大学，而他的数学成绩仅 15 分，但是他的国文成绩和英文成绩都是特优，主管录取的老师便将他的成绩报告了校长罗家伦。罗家伦没有只注重总分，不看重考生的单科成绩，而是打破惯例，予以破格录取。这在清华被传为美谈。若没有当初的“破”，清华便少了这位立誓“横扫清华图书馆”的才华横溢的青年才子。

钱伟长回忆考清华大学时，“我还记得当时的语文题目是《梦游清华园记》，我写了一篇赋，45 分钟 450 字，出题目的老师想改，一个字也改不了。后来他给了 100 分。历史题目是写二十四史的名称、作者、卷数，我一点错误都没有，又是满分”。钱伟长选入历史系，不久爆发了“九·一八”事变，他立志要科学救国，向学校提出想转学理工。物理系主任吴有训看到他的物理成绩仅 5 分，数学、化学两科成绩加起来也不过 20 分，而英文则是 0 分，而清华大学的理工科课堂基本上是用英语讲授，不允许他转系。后经钱再三申请，理学院准许他试读，并且规定第一年的大学普通物理、微积分、普通化学等三门课都要过 70 分才能正式入物理系。经过刻苦学习和改进学习方法，钱伟长终于如愿进入物理系，后又到加拿大求学，成为著名物理学家，1955 年当选中科院首批学部委员。

华罗庚少年时期命运十分坎坷，他的腿因幼时患伤寒症而跛，初中毕业后辍学在金坛中学当会计。1930 年华罗庚在《科学》上发表论文《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立的理由》，被清华算学系主任熊庆来、杨武之教授等看到，认为他很有数学天资，值得培养，请

示理学院院长叶企孙，得到支持，便安排他到算学系图书馆做助理员，一边工作一边旁听大学课程。1933年，在熊庆来、杨武之、郑之蕃等教授的极力推荐下，华罗庚被清华破格提为助教，教授微积分课程。1936年，华罗庚经学校推荐，以访问学者身份派往英国剑桥大学留学。1938年华罗庚回国后，又被破格聘为西南联大教授，成为著名数学家。

我认为，如今各著名高校进行的自主招生，就是要达到两个目的：其一，要不拘一格，把未来的钱钟书、钱伟长、华罗庚录取进来，尤其要注意录取偏科、确实在某一方面具有特长的学生，不至于因总分不够而不能进入名校；其二，让一些一贯成绩优秀，因一时临场发挥不正常，未考出应有水平的高材生，不至因“一张考卷定终身”而与名校失之交臂 。说到底，是要让目前争议很大的高考，得到某种补偿，真正起到选拔优秀可造之才的作用。

这使优秀的人才多了一次接受名校选拔的机会，录取的几率也大大增加。因此，自主考试的成败便显得非常重要。

然而，自主考试虽推出不止一年，以往均各校自主命题，因教师喜好不同，本身专业背景不同，命题五花八门，没有太多规律可循。从2010年起，清华、北大和若干所高校联合命题，形成所谓“华约”“北约”，前一年的试题也不难得到，这便给新一年的应试者探索其出题规律，在尽量不影响高考复习正常进程的情况下准备好自主招生考试提供了可能。要选拔符合新时代竞争需求的具备创新意识和综合实践能力的优秀考生，命题中应用型、能力型试题比重会加大，主要考查考生的综合素质与能力。自主考试的试题正逐步走向正轨。

吴先生是我们东南大学的校友，长期办学，有适度超前的教育理念，有一套指导学生复习应考的好方法，团结了一批学有所长、教有所长的教师。最近又编著了一套面向著名高校自主招生的教材，这套书包括《语文》《数学》《英语》《文科综合及面试》《理科综合及面试》五本，体例在共性上至少包括三大模块，即“核心知识探究”“精选真题剖析”“模拟实战冲刺”。它的资料采集新颖、丰富，知识构架整合、提升，解题方法视角独特，集备考的资料性、实用性、针对性于一体。为考生准备自主招生提供帮助，开全国风气之先，我愿其成功！

希望同学们借助这套书完成优秀中学与重点大学之间的衔接：(1) 明确复习重点，优化中学学科知识结构，衔接（输入、学习、了解）大学学科基础知识与基本研究技能；(2) 拓展学科思维，理解掌握学科规律，深化经典范题，提升创新能力；(3) 把握命题趋势，透视社会热点与焦点，范式点评、综合研练各类题型的解题思路。

此外，也希望同学们对要报考的高校的基本办学理念、办学精神、校训等有所了解。

祝同学们在自主招生考试中取得成功，更希望您能以此为起点，“跃起闯关，铸造辉煌”，既铸造高考的辉煌，更开启理想的黄金时代，铸造一生的辉煌。我特别希望稍后在我们清华园里，与您相逢，也祝愿您会成为我们清华、南大、东大、吉林大学的校友，希望您能成为钱钟书、钱伟长、华罗庚一样的成功者，让祖国人民为您骄傲！

2012年5月22日于清华园

王步高　东南大学国家二级教授（文科最高级），国家两项精品课程主持人，清华大学特聘教授

目 录

数学部分

数学真题解析 …… 3
2014 年“北约”真题解析 …… 3
2013 年“北约”真题解析 …… 6
2012 年“北约”真题解析 …… 10
2011 年“北约”真题解析 …… 12
2010 年“北约”真题解析 …… 14
2014 年“华约”真题解析 …… 17
2013 年“华约”真题解析 …… 20
2012 年“华约”真题解析 …… 24
2011 年“华约”真题解析 …… 29
2010 年“华约”真题解析 …… 36
2014 年“卓越”真题解析 …… 45
2013 年“卓越”真题解析 …… 49
2012 年“卓越”真题解析 …… 52
2011 年“卓越”真题解析 …… 58
2015 年高校自主招生考试数学模拟试卷 1 …… 65
2015 年高校自主招生考试数学模拟试卷 2 …… 70

物理部分

第 1 章　力和物体的平衡 …… 77
第 2 章　运动学 …… 82
第 3 章　运动定律 …… 89
第 4 章　功和能 …… 100
第 5 章　冲量和动量 …… 108
第 6 章　机械振动与机械波 …… 116
第 7 章　电场 …… 121
第 8 章　电流 …… 131
第 9 章　磁场 …… 138

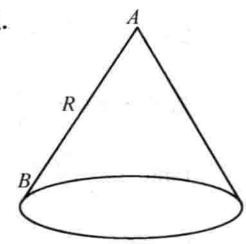
第 10 章　电磁感应和交流电 …… 145
第 11 章　热学 …… 154
第 12 章　光学 …… 163
第 13 章　近代物理 …… 170
2015 年高校自主招生考试“华约”模拟试卷 1 …… 183
2015 年高校自主招生考试“华约”模拟试卷 2 …… 189
2015 年高校自主招生考试“北约”模拟试卷 1 …… 194
2015 年高校自主招生考试“北约”模拟试卷 2 …… 202
2015 年高校自主招生考试“卓越”模拟试卷 1 …… 208
2015 年高校自主招生考试“卓越”模拟试卷 2 …… 215

数学部分

数学真题解析

2014 年“北约”真题解析

1. 圆心角为 60° 的扇形面积为 6π，如图所示，求其围成的圆锥的表面积.



解 扇形半径：$\frac{1}{6}\pi R^2 = 6\pi, R = AB = 6$，

扇形弧长：$l = \theta R = \frac{\pi}{3} \times 6 = 2\pi$，

圆锥底面圆半径：$2\pi \times r = 2\pi, r = 1$，

圆锥的表面积：$S = \pi \times 1^2 + 6\pi = 7\pi$.

2. 将 10 人分成 3 组，一组 4 人，两组 3 人，共有几种分法.

解 $N = C_{10}^3 C_7^3 / 2 = 2\,100$（种）（两组都是 3 人，无先后顺序）

3. 如果函数 $f(x) = \lg(x^2 - 2ax + a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

解 $g(x) = x^2 - 2ax + a$ 值域为 $(0, \infty)$，判别式：$\Delta = 4a^2 - 4a \geqslant 0$，

解得 $a \geqslant 1$ 或 $a \leqslant 0$.

4. 设 $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}$，且 $f(1) = 1$ 和 $f(4) = 7$，求 $f(2\,014)$ 的值.

解 考查递推与归纳知识及数学归纳法的应用.

$f(n-1) = f\left(\frac{3n-3}{3}\right) = f\left(\frac{n-3+2n}{3}\right) = \frac{f(n-3) + 2f(n)}{3} (n \geqslant 4)$；

$f(n) = \frac{3f(n-1) - f(n-3)}{2}$；

$f(2) = f\left(\frac{4+2\times 1}{3}\right) = 3; f(3) = f\left(\frac{1+2\times 4}{3}\right) = 5$，

由数学归纳法得到

$$f(n) = 2n - 1, f(2\,014) = 4\,027.$$

5. 已知 $x + y = -1$，且 x, y 都是负数，求 $xy + \frac{1}{xy}$ 的最值.

解 设 $t=xy>0, t\leqslant\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

令 $f(t)=t+\frac{1}{t}, t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$,

$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}$ 在 $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$上单调递减,

所以 $f(t)$在$\left(0,\frac{1}{4}\right]$上无最大值,最小值为$\frac{17}{4}$. 故 $xy+\frac{1}{xy}$的最小值为$\frac{17}{4}$,无最大值.

6. 已知 $f(x)=\arctan\frac{2+2x}{1-4x}+c$ 在$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$上是奇函数,求 c 的值.

解 $0=f(0)=\arctan 2+c, c=-\arctan 2$.

7. 证明 $\tan 3^\circ$是无理数.

证明 $\sin 30^\circ=1/2$, 设 $\sin 15^\circ=x$, 则

$2x\sqrt{1-x^2}=1/2, x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$,

假设 $\tan 3^\circ=\frac{m}{n}$ (m,n 不可约),则

$\tan 6^\circ=\frac{2mn}{n^2-m^2}, \tan 12^\circ=\frac{4mn(n^2-m^2)}{(n^2-m^2)^2-4m^2n^2}$,均为有理数,

$\tan 15^\circ=\frac{\tan 12^\circ+\tan 3^\circ}{1-\tan 12^\circ\tan 3^\circ}$ 为有理数,矛盾.

所以 $\tan 3^\circ$是无理数.

8. 已知实系数二次函数 $f(x)$与 $g(x)$满足 $3f(x)+g(x)=0$ 和 $f(x)-g(x)=0$ 都有双重实根,如果已知 $f(x)=0$ 有两个不同实根,求证:$g(x)=0$ 没有实根.

证明 由题意可设

$$3f(x)+g(x)=a_1(x-b_1)^2$$
$$f(x)-g(x)=a_2(x-b_2)^2$$

其中 $a_1\neq 0, a_2\neq 0$, 则

$$f(x)=\frac{1}{4}\mid a_1(x-b_1)^2+a_2(x-b_2)^2\mid$$

由于 $f(x)=0$ 有两个不同实根,则 a_1, a_2 异号,且 $a_1+a_2\neq 0, b_1\neq b_2$.

$$g(x)=\frac{1}{4}\mid a_1(x-b_1)^2-3a_2(x-b_2)^2\mid$$

此时,$a_1, -3a_2$ 同号,且 $a_1-3a_2\neq 0, b_1\neq b_2$,故 $g(x)>0$ 恒成立,即证明 $g(x)=0$ 没有实根.

9. $a_1, a_2, \cdots, a_{13}$是等差数列,集令 $M=\{a_i+a_j+a_k\mid 1\leqslant i<j<k\leqslant 13\}$,问:0,7/2,16/3 是否可以同时在 M 中,并证明你的结论.

解 不可能.

设$\begin{cases}a_i=a_1+(i-1)d(1\leqslant i\leqslant 13),\\ M=\{3a_1+(i+j+k-3)d\mid 1\leqslant i<j<k\leqslant 13\}=\{3a_1+sd\mid 3\leqslant s\leqslant 33\}.\end{cases}$

假设 0,7/2,16/3 是 M 中的 3 项,则存在正整数 $x,y,z\in[3,33]$,使得

$$\begin{cases}a_1+xd=0,\\a_1+yd=7/2,\\a_1+zd=16/3,\end{cases}$$

推出 $\dfrac{y-x}{z-x}=\dfrac{21}{32}$,

由于 21,32 不可约,则 $|y-x|$,$|z-x|$ 分别是 21,32 的整数倍,

但因为 $|z-x|\leqslant 30$,矛盾. 故 0,7/2,16/3 不可能同时在 M 中.

10. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$,且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,求证:

$$(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}+x_2)\cdots(\sqrt{2}+x_n)\geqslant(\sqrt{2}+1)^n$$

提示:不等式证明是一类比较常见的重要数学问题,也是自主招生及高考的重要知识点,这类问题一般都有多种解法.

证法一 不妨假设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots x_n$,易证 $x_1x_2\leqslant 1(n\geqslant 1)$.

假设 $n=1$,

左边$=\sqrt{2}+x_1=\sqrt{2}+1=$右边,命题成立,

假设 $n=2$, $x_1x_2=1$,

左边 $=(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}+x_2)=3+\sqrt{2}(x_1+x_2)\geqslant 3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$,

命题成立.

假设 $n=k$, 命题成立,则

如果 $x_1x_2\cdots x_k=1$, $(x_1+\sqrt{2})(x_2+\sqrt{2})\cdots(x_k+\sqrt{2})\geqslant(1+\sqrt{2})^k$,

当 $x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}=1$ 时,不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{k+1}$,

令 $y_1=x_1x_2$, $y_{i-1}=x_i(3\leqslant i\leqslant k+1)$, $y_1y_2\cdots y_k=1$,

由假设 $(y_1+\sqrt{2})(y_2+\sqrt{2})\cdots(y_k+\sqrt{2})\geqslant(1+\sqrt{2})^k$,

即 $(x_1x_2+\sqrt{2})(x_3+\sqrt{2})\cdots(x_{k+1}+\sqrt{2})\geqslant(1+\sqrt{2})^k$,

令 $t=\sqrt{x_1x_2}\in[0,1]$,则

$$\frac{(x_1+\sqrt{2})(x_2+\sqrt{2})}{(x_1x_2+\sqrt{2})}=\frac{2+t^2+\sqrt{2}(x_1+x_2)}{t^2+\sqrt{2}}\geqslant\frac{(t+\sqrt{2})^2}{t^2+\sqrt{2}},$$

令 $f(t)=\dfrac{(t+\sqrt{2})^2}{t^2+\sqrt{2}}$,则

$$f'(t)<0,\ f(t)\geqslant f(1)=\sqrt{2}+1,$$

因此, $(x_1+\sqrt{2})(x_2+\sqrt{2})\geqslant(x_1x_2+\sqrt{2})f(t)\geqslant(x_1x_2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$,

$$\begin{aligned}(x_1+\sqrt{2})(x_2+\sqrt{2})(x_3+\sqrt{2})\cdots(x_{k+1}+\sqrt{2})&\geqslant(1+\sqrt{2})(x_1x_2+\sqrt{2})(x_3+\sqrt{2})\cdots(x_{k+1}+\sqrt{2})\\&\geqslant(1+\sqrt{2})^{k+1},\end{aligned}$$

命题也成立.

综上 ,对任意的 n 命题结论成立.

证法二

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_i}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_i}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{2}+x_i)\right)^{1/n}},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{2}+x_i}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{2}+x_i}}=\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{2}+x_i)\right)^{1/n}},$$

两式相加得：$1\geqslant\frac{1+\sqrt{2}}{\left(\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{2}+x_i)\right)^{1/n}}$，即 $\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{2}+x_i)\geqslant(1+\sqrt{2})^n$.

2013 年“北约”真题解析

1. 以$\sqrt{2}$和 $1-\sqrt[3]{2}$为两根的有理系数多项式的次数最小是多少？

解 先给出 1 个满足条件的多项式，如 $f(x)=(x^2-2)[(x-1)^3-2]$，因此满足条件的有理多项式的最低次数不超过 5 次.

假设存在 4 次以下多项式满足条件，不妨设

$g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，其中，a,b,c,d,e 均为有理数.

$$g(\sqrt{2})=(4a+2c+e)+(2b+d)\sqrt{2}=0,\text{则}$$

$$\begin{cases}4a+2c+e=0,\\2b+d=0.\end{cases}$$

$$g(1-\sqrt[3]{2})=-(7a+b-c-d-e)-(2a+3b+2c+d)\sqrt[3]{2}+(6a+3b+c)\sqrt[3]{4}=0,\text{则}$$

$$\begin{cases}7a+b-c-d-e=0,\\2a+3b+2c+d=0,\\6a+3b+c=0.\end{cases}$$

因此

$$\begin{cases}4a+2c+e=0, & (1)\\2b+d=0, & (2)\\7a+b-c-d-e=0, & (3)\\2a+3b+2c+d=0, & (4)\\6a+3b+c=0. & (5)\end{cases}$$

解得：$a=b=c=d=e=0$，矛盾.

所以满足条件的多项式最低次数为 5.

2. 在 6×6 的表中停放 3 辆完全相同的红色车和 3 辆完全相同的黑色车，每一行、每一列只有一辆车，每辆车占一格，共有几种停放方法？

解 先从 6 行中选取 3 行停放红色车，有 C_6^3（种）选择. 最上面一行的红色车位置有 6 种选择；最上面一行的红色车位置选定后，中间一行的红色车位置有 5 种选择；上面两行的红色车位

置选定后，最下面一行的红色车位置有 4 种选择. 3 辆红色车的位置选定后，黑色车的位置有 $3!=6$种选择. 所以共有 $C_6^3\times 6\times 5\times 4\times 6=14\,400$ (种)停放汽车的方法.

3. 已知 $x^2=2y+5, y^2=2x+5$, 求 $x^3-2x^2y^2+y^3$ 的值.

解 根据条件知：

$x^3-2x^2y^2+y^3=x(2y+5)-2(2y+5)(2x+5)+y(2x+5)=-15x-15y-4xy-50.$

由 $x^2=2y+5, y^2=2x+5$ 两式相减得

$$(x-y)(x+y)=2y-2x$$

故 $$y=x\text{ 或 }x+y=-2.$$

① 若 $x=y$, 则 $x^2=2x+5$, 解得 $x=1\pm\sqrt{6}$. 于是知 $x=y=1+\sqrt{6}$ 或 $x=y=1-\sqrt{6}$.

当 $x=y=1+\sqrt{6}$ 时，

$$\begin{aligned}x^3-2x^2y^2+y^3&=-4xy-15(x+y)-50\\&=-4x^2-30x-50\\&=-4(x^2-2x-5)-38x-70=-38x-70=-108-38\sqrt{6}.\end{aligned}$$

当 $x=y=1-\sqrt{6}$ 时，

$$\begin{aligned}x^3-2x^2y^2+y^3&=-4xy-15(x+y)-50\\&=-4x^2-30x-50\\&=-4(x^2-2x-5)-38x-70\\&=-38x-70=-108+38\sqrt{6}.\end{aligned}$$

(2) 若 $x+y=-2$, 则根据条件知：

$$x^2+y^2=(2y+5)+(2x+5)=2(x+y)+10=6,$$

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=-1.$$

$$x^3-2x^2y^2+y^3=-4xy-15(x+y)-50=-16.$$

综上所述, $x^3-2x^2y^2+y^3$ 的值为 $-108\pm 38\sqrt{6}$或-16.

4. 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n, $S_{n+1}=4a_n+2$, 求 a_{2013}.

提示 数列是自主招生及高考的重点内容，往往也是知识难点，需要多练习.

解 $4a_{n+1}+2=S_{n+2}=a_{n+2}+S_{n+1}=a_{n+2}+4a_n+2\Rightarrow a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n.$

$a_1=1, S_2=a_1+a_2=4a_1+2\Rightarrow a_2=5.$

所以 $a_1=1, a_2=5, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$.

又 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n, a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$.

令 $b_n=a_{n+1}-2a_n$, 则 $b_{n+1}=2b_n, b_1=a_2-2a_1=3$,

所以 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$. 即 $a_{n+1}-2a_n=3\cdot 2^{n-1}$.

对 $a_{n+1}-2a_n=3\cdot 2^{n-1}$, 两边同除以 2^{n+1}, 有

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}\text{, 即 }\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{3}{4}.$$

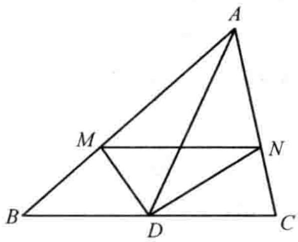
令 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$, 则$\{c_n\}$为等差数列, $c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$,

$$c_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3n-1}{4}.$$

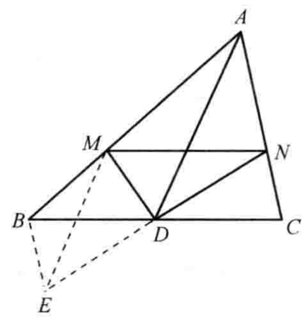
所以
$$a_n=\frac{3n-1}{4}\cdot 2^n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}.$$

$$a_{2013}=(3\times 2013-1)\cdot 2^{2011}=3\,019\cdot 2^{2012}.$$

5. 如图所示,$\triangle ABC$ 中,AD 为 BC 边上的中线,DM,DN 分别$\angle ADB$,$\angle ADC$ 的角平分线,试比较 $BM+CN$ 与 MN 的大小关系,并说明理由.



解 如图所示,延长 ND 到点 E,使得 $DE=DN$,连结 BE,ME. 易知$\triangle BDE\cong\triangle CDN$,所以 $CN=BE$. 又因为 DM,DN 分别为$\angle ADB$,$\angle ADC$ 的角平分线,所以$\angle MDN=90°$,知 MD 为线段 EN 的垂直平分线,故 $MN=ME$. 故 $BM+CN=BM+BE>ME=MN$.



6. 模长为 1 的复数 A,B,C,满足 $A+B+C\neq 0$,求 $\dfrac{AB+BC+CA}{A+B+C}$的模长.

解 根据公式 $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ 知,$A\cdot\bar{A}=1$,$B\cdot\bar{B}=1$,$C\cdot\bar{C}=1$. 于是

$$\left|\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}\right|$$
$$=\sqrt{\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}\cdot\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}}}$$
$$=\sqrt{\frac{(A\bar{B}C\bar{C}+\bar{A}BC\bar{C}+B\bar{C}A\bar{A}+\bar{B}CA\bar{A}+C\bar{A}B\bar{B}+\bar{C}AB\bar{B})+(A\bar{A}B\bar{B}+B\bar{B}C\bar{C}+C\bar{C}A\bar{A})}{(A\bar{B}+\bar{A}B+B\bar{C}+\bar{B}C+C\bar{A}+\bar{C}A)+(A\bar{A}+B\bar{B}+C\bar{C})}}$$
$$=\sqrt{\frac{A\bar{B}+\bar{A}B+B\bar{C}+\bar{B}C+C\bar{A}+\bar{C}A+3}{A\bar{B}+\bar{A}B+B\bar{C}+\bar{B}C+C\bar{A}+\bar{C}A+3}}$$
$$=1.$$

所以$\dfrac{AB+BC+CA}{A+B+C}$的模长为 1.

7. 最多能取多少个两两不等的正整数,使得其中任意三个数之和都为素数.

提示 初等数论问题对中学生来说,可能有些陌生,但常见自主招生的测试中,需要引起注意.

解 所有正整数按取模 3 可分为三类:$3k$ 型、$3k+1$ 型、$3k+2$ 型. 首先,可以证明,所取的数最多只能取到两类. 否则,若三类数都有取到,设所取 $3k$ 型数为 $3a$,$3k+1$ 型数为 $3b+1$,$3k+2$ 型数为 $3c+2$,则 $3a+(3b+1)+(3c+2)=3(a+b+c+1)$,不可能为素数. 所以这三类数中,最

多能取到两类.

其次,我们容易知道,每类数最多只能取2个.否则,若某一类 $3k+r(r=0,1,2)$ 型的数至少取到3个,设其中3个数分别为 $3a+r,3b+r,3c+r$,则 $(3a+r)+(3b+r)+(3c+r)=3(a+b+c+r)$,不可能为素数.所以每类数最多只能取2个.

结合上述2条,我们知道最多只能取 $2\times2=4$(个)数,才有可能满足题设条件.

另一方面,设所取的4个数为1,7,5,11,即满足题设条件.

综上所述,若要满足题设条件,最多能取4个两两不同的正整数.

8. 已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2013}\in\mathbf{R}$,满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2013}=0$,且 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=|a_3-2a_4|=\cdots=|a_{2012}-2a_{2013}|=|a_{2013}-2a_1|$,求证:$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{2013}=0$.

解 $(a_1-2a_2)+(a_2-2a_3)+(a_3-2a_4)+\cdots+(a_{2013}-2a_1)$

$$=-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2013})=0, \tag{1}$$

令 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=|a_3-2a_4|=\cdots=|a_{2013}-2a_1|=m$,则

$a_1-2a_2,a_2-2a_3,a_3-2a_4,\cdots,a_{2013}-2a_1$ 中每个数或为 m 或为 $-m$.设其中有 k 个 m,$(2013-k)$ 个 $-m$,则

$(a_1-2a_2)+(a_2-2a_3)+(a_3-2a_4)+\cdots+(a_{2013}-2a_1)$

$$=k\times m+(2013-k)\times(-m)=(2k-2013)m, \tag{2}$$

由式(1)和式(2)知

$$(2k-2013)m=0, \tag{3}$$

而 $2k-2013$ 为奇数,不可能为0,所以 $m=0$.于是知

$$a_1=2a_2,a_2=2a_3,a_3=2a_4,\cdots,a_{2012}=2a_{2013},a_{2013}=2a_1.$$

从而知:$a_1=2^{2013}\cdot a_1$,即得 $a_1=0$.

同理可知:$a_2=a_3=\cdots=a_{2013}=0$.

命题得证.

9. 对任意的 θ,求 $32\cos^6\theta-\cos6\theta-6\cos4\theta-15\cos2\theta$ 的值.

提示 本题主要考查三角函数运算,属于高考基本题.

解 $32\cos^6\theta-\cos6\theta-6\cos4\theta-15\cos2\theta$

$=32\cos^6\theta-(2\cos^2 3\theta-1)-6(2\cos^2 2\theta-1)-15(2\cos^2\theta-1)$

$=32\cos^6\theta-[2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)^2-1]-6[2(2\cos^2\theta-1)^2-1]-15(2\cos^2\theta-1)$

$=32\cos^6\theta-(32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1)-(48\cos^4\theta-48\cos^2\theta+6)-(30\cos^2\theta-15)$

$=10.$

10. 已知有 mn 个实数,排列成 $m\times n$ 阶数阵,记作 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$,使得数阵中的每一行从左到右都是递增的,即对任意的 $i=1,2,3,\cdots,m$,当 $j_1<j_2$ 时,都有 $a_{ij_1}\leqslant a_{ij_2}$.现将 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 的每一列原有的各数按照从上到下递增的顺序排列,形成一个新的 $m\times n$ 阶数阵,记作 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$,即对任意的 $j=1,2,3,\cdots,n$,当 $i_1<i_2$ 时,都有 $a'_{i_1j}\leqslant a'_{i_2j}$.试判断 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 中每一行的 n 个数的大小关系,并说明理由.

提示 这类问题属于自主招生中比较难得问题,只要是比较抽象,难于分析.

数阵 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 中每一行的 n 个数从左到右都是递增的,理由如下:

显然，我们要证数阵$\{a'_{ij}\}_{m\times n}$中每一行的n个数从左到右都是递增的，我们只需证明，对于任意$i=1,2,3,\cdots,m$，都有$a'_{ij}\leqslant a'_{i(j+1)}$，其中$j=1,2,3,\cdots,n-1$.

若存在一组$a'_{pq}>a'_{p(q+1)}$. 令$a'_{k(q+1)}=a_{i_k(q+1)}$，其中$k=1,2,3,\cdots,m$，$\{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_m\}=\{1,2,3,\cdots,m\}$. 则当$t\leqslant p$时，都有$a_{i_tq}\leqslant a_{i_t(q+1)}=a'_{t(q+1)}\leqslant a'_{p(q+1)}<a'_{pq}$. 也即在$a_{iq}(i=1,2,3,\cdots,m)$中，至少有$p$个数小于$a'_{pq}$，也即$a'_{pq}$在数阵$\{a'_{ij}\}_{m\times n}$的第$q$列中，至少排在第$p+1$行，与$a'_{pq}$排在第$p$行矛盾.

所以对于任意$i=1,2,3,\cdots,m$，都有$a'_{ij}\leqslant a'_{i(j+1)}$即数阵$\{a'_{ij}\}_{m\times n}$中每一行的$n$个数从左到右都是递增的.

2012年"北约"真题解析

1. 求x的范围使得$f(x)=|x+2|+|x|+|x-1|$是增函数.

解

$$f(x)=\begin{cases}-3x-1, & x<-2,\\ -x+3, & -2\leqslant x<0,\\ x+3, & 0\leqslant x<1,\\ 3x+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

易见，当$x\geqslant 0$时，$f(x)$单调递增.

2. 求方程$\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=1$的实根的个数.

解

$$\begin{aligned}\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}&=\sqrt{(x+2)-2\cdot 3\cdot\sqrt{x+2}+3^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2}\\&=|3-\sqrt{x+2}|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}&=\sqrt{(x+2)-2\cdot 5\cdot\sqrt{x+2}+5^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{x+2}+5)^2}\\&=|5-\sqrt{x+2}|,\end{aligned}$$

而$|5-\sqrt{x+2}|+|3-\sqrt{x+2}|\geqslant 2>1$，所以原方程无实数解.

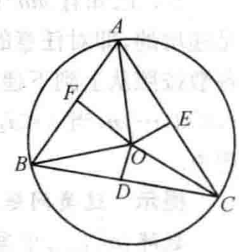
3. 已知$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的4个根组成首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，求$|m-n|$.

解 设4个根分别为x_1,x_2,x_3,x_4，则

$$x_1=1/4, x_1+x_4=x_2+x_3=2, x_4=7/4, x_4-x_1=3d=3/2, d=1/2.$$

4个根分别为：$1/4,3/4,5/4,7/4$，$|m-n|=1/2$.

4. 如图所示，如果锐角$\triangle ABC$的外接圆圆心为O，求O到三角形三边的距离比.



解 $OD=R\sin\angle OCD=R\cos\angle DOC=R\cos A$,

$OE=R\cos B$, $OF=R\cos C$,

$OD:OE:OF=\cos A:\cos B:\cos C$.