现代力学丛书

材料本构关系理论讲义

朱兆祥　著

科学出版社

现代力学丛书

材料本构关系理论讲义

朱兆祥　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

《材料本构关系理论讲义》是根据朱兆祥先生自上世纪七十年代末以来长期讲授“材料本构关系理论（现代连续介质力学）”的讲义整理而成，简明深入，尤其适合初学者入门使用. 全书共 8 章. 第 1 章是张量和矩阵，第 2 章是运动和变形，第 3 章是动力学分析，第 4 章是变形热力学，第 5 章是本构方程的一般原理，第 6 章是弹性，第 7 章是弹塑性，第 8 章是黏弹性. 本书既侧重基础，又反映作者在结合爆炸力学应用研究方面的成果，独具特色.

本书可供力学专业、应用数学、应用物理、工程科学等专业的高年级本科生和研究生用作教材，也可作为力学和相关专业师生及科技工作者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

材料本构关系理论讲义/朱兆祥著. —北京：科学出版社, 2014

(现代力学丛书)

ISBN 978-7-03-042396-2

I. ①材… II. ①朱… III. ①材料力学-本构关系-高等学校-教材

IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 258738 号

责任编辑：刘信力／责任校对：张怡君
责任印制：肖 兴／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张: 9
字数: 164 000

定价：58.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代力学丛书》编委会

丛　书　序

《现代力学丛书》是由中国科学院力学研究所编著的一套丛书，由科学出版社出版。本丛书作者为中国科学院力学研究所科研人员、客座研究人员和其他相关人员。出版本丛书的目的是总结和提高我们近年来的科学研究成果，并促进相关学科领域的开拓。中国科学院力学研究所自成立以来，既从事基础研究，也以基础研究为手段，参与和承担了国家和部门委托的许多任务，取得了一系列重要的成果。我们认为，将这些成果分类整理、系统化，并加以提高，在此基础上出版专著，是一件很有价值的事，既有利于中国科学院力学研究所科研工作的进一步提高，也有利于为广大读者获取新的知识，共同促进力学学科的繁荣发展。

本丛书可供相关专业的科研人员和研究生参考。

郑哲敏

二〇〇九年二月于北京

代　　序

朱兆祥先生是我十分敬仰的师长。

先生早年投身革命。在 1956 年, 中国科学院力学研究所的初创时期, 先生是钱学森所长任命的学术秘书, 同时还参与了塑性力学组的研究工作。在 1958 年, 科学出版社出版了先生翻译的苏联诺沃日洛夫著的《非线性弹性力学基础》, 这表明先生已经敏锐地觉察到了力学中的大变形、非线性的发展趋势。

在“阳谋”运动 (反右派运动) 中, 先生因去看望清华大学某一力学家而被错定为“反党分子”。虽然同去数人, 但是先生独自承担了一切, 这显示了先生高贵的政治品质。背着沉重的政治包袱, 先生离开了中国科学院力学研究所, 到了刚开办的中国科学技术大学。我第一次见到先生是先生作为爆炸力学专业的主任, 带领我们这些年轻学子去某大厂参观学习。先生待人和蔼可亲, 言谈中既有丰富的书本知识, 又具有实际经验。连该厂的工人都说: 你们的这位老师不像“反党分子”。

虽然先生在政治上蒙受不白之冤, 但仍一直坚持着他在科学上的追求。他看到了理性力学 (现在称连续介质力学) 作为整个力学的基础的重要性, 潜心于理性力学的研究。即使是在“黄钟毁弃、瓦釜雷鸣”的动乱年代, 先生仍在孤独地、默默地继续着这方面的工作。

在动乱结束、百废待兴的改革开放初期, 先生重又活跃在了教学与科研第一线。1978 年先生在中国科学技术大学为首届研究生和本科生开设了“材料本构关系理论 (现代连续介质力学)”, 领全国之先。当时条件艰苦, 凡事都要亲力亲为, 先生自己准备讲义、登台讲授。先生还到其他高校和科研单位讲过这门课或有关的专题。因此, 可以说先生对这门学科在国内的传播和普及是有大功的。

先生的这本讲义, 经过十余年的使用、修改和补充, 由王礼立、沈利君两位教授整理出版, 这是一件十分令人庆幸的事。先生具有深厚的数学和力学基础, 对比较抽象的连续介质力学问题, 总能化繁为简、深入浅出, 使初学者易于理解和接受。先生早年从事塑性力学研究, 从宁波大学校长位子上退下来后又带着研究生从事黏弹性理论与实验研究, 本书的后两章就是先生对这两个方面的总结概括, 既包括前人的工作, 也包括先生本人的工作。先生的讲义, 诞生于三十年前, 一直不断地修改和补充。三十年来连续介质力学的发展是十分可观的, 成果也十分丰富, 但基本的研究工具和方法、理论框架未变。国内出版的介绍连续介质力学的著作也相当多, 有志于连续介质力学的学习者有了很多选择。但是先生的这本书对于那些初次接触连续介质力学的人来说仍是十分适合的入门读物。

先生去世前两年，我曾和一位朋友去先生家中探望。当时先生已不能与人正常交流，面对这位终生献身科学与教育、关心国家命运前途的耄耋老者，我真有无限慨叹。

先生的书要出版了，中国科学院力学研究所领导要我为该书写序，我真感到诚惶诚恐。虽然我曾多年为研究生讲授连续介质力学课程，也在这方面做了些研究工作，但自知在学问和事业上都难以望先生项背。我只好写了上面的话，不作为序，作为对先生的怀念与追思吧。

中国科学院大学　王文标

2014 年 4 月

符 号 说 明

a, A: 表示标量
$\boldsymbol{a}$: 表示向量
$\boldsymbol{A}$: 表示二阶或高阶张量
$\boldsymbol{X}$: 物质坐标系 (Lagrange 坐标系)
$\boldsymbol{x}$: 空间坐标系 (Euler 坐标系)
$\boldsymbol{F}$: 变形陡度 (deformation gradient)
det( ): 矩阵的行列式
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$: 矩阵或张量的转置
$\boldsymbol{A}^{-1}$: 矩阵或张量的逆
$\boldsymbol{V}$: 变形陡度极分解中的左伸长张量
$\boldsymbol{U}$: 变形陡度极分解中的右伸长张量
$\boldsymbol{E}$: Green 应变张量
$\boldsymbol{w}$: 位移向量
$\boldsymbol{H}$: 位移陡度
$\boldsymbol{L}$: 速度陡度
$\boldsymbol{D}$: 伸缩率 (stretching)，应变率
$\boldsymbol{W}$: 转动率 (spin)
$\dot{\boldsymbol{A}}$: 物质时间导数 (material time derivative)
$\overset{\circ}{\boldsymbol{A}}$: 本构导数 (objective derivative)
$\boldsymbol{\sigma}$: 真应力 (Cauchy 应力)
$\boldsymbol{S}$: Piola 应力
Σ: Piola-Kirchhoff 应力 (对称)
tr( ): 迹 (trace)
Q: 热
W: 外功
W_s: 变形功 (应力功)
w_s: 单位质量变形功
U: 内能
u: 单位质量内能
T: 温度
S: 熵
s: 单位质量熵

$\boldsymbol{h}$: 热流向量

K: 动能

k: 单位质量动能

δ: 内耗散

H: 焓

G: 自由焓 (Gibbs 自由能)

ψ: 自由能

P: 压力

$\xi_n(t)$: 内变量

目 录

第 1 章　张量和矩阵

首先，我们给出张量的两种病态定义。

1.1　向量空间和线性映照

以一点上的应力为例，如图 1.1.1 所示. 在选定的直角坐标系 x，y，z 中，法线方向为 $\boldsymbol{n}$ 的平面上的应力向量 $\boldsymbol{t}$ 可以通过四面体的平衡用坐标平面上的应力分量 T_{xx}，T_{yx}，$\cdots$ 表示出：

$$\begin{aligned} t_x &= T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z \\ t_y &= T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z \\ t_z &= T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

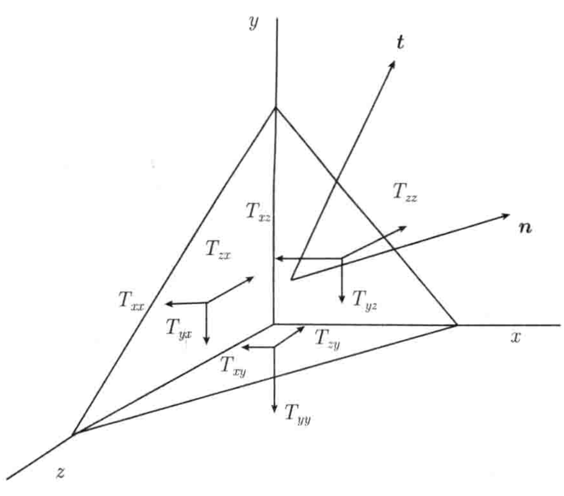

图 1.1.1

把 x，y，z 用 x_1，x_2，x_3 或 1，2，3 来代替，得

$$t_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}n_j \quad (i,j=1,2,3) \tag{1.1.2}$$

编辑注：作者原稿的第 1 章是“引论”，但只列出了五点纲要：1. 材料的力学性能; 2. 拉伸、压缩和剪切实验; 3. 时间效应; 4. 温度效应; 5. 材料本构关系理论的任务。作者生前未及成文。鉴于此，现将原稿第 1 章的附录内容作为第 1 章的内容，改名为“张量和矩阵”。

引进 Einstein 的**取和约定**，即把 $\sum$ 符号省略，只要看到式子中两个下标 (如下式中的 j) 相同，就表示对这个指标从 1 到 3 取和：

$$t_i = T_{ij}n_j \tag{1.1.3}$$

此式可等价地用矩阵符号 (式 (1.1.4)) 或直接 (抽象) 符号 (式 (1.1.5)) 表示：

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{Tn} \tag{1.1.5}$$

向量 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{t}$ 等满足自己特有的一套加法规则 (即平行四边形加法规则) 和数量乘法规则 (即向量长度延长规则)，例如，对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 以及任意标量 k 有

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{bmatrix}$$

类似这种定义了自己特有的加法规则和数量乘法规则的向量全体所形成的集合，叫做**向量空间**(线性空间)。这种集合中的元素如向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等还要满足如下 8 种运算规则：

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\,, & (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}\,, & \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \\ 1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\,, & (kl)\cdot\boldsymbol{a}=k\cdot(l\cdot\boldsymbol{a}) \\ (k+l)\cdot\boldsymbol{a}=k\cdot\boldsymbol{a}+l\cdot\boldsymbol{a}\,, & k\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\cdot\boldsymbol{a}+k\cdot\boldsymbol{b} \end{cases}$$

式中，零向量 $\boldsymbol{0}$ 和负向量 $-\boldsymbol{a}$ 都是这个向量空间中的元素。

关系 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{Tn}$ 是一种映照关系，即**算子** $\boldsymbol{T}$ 把向量空间中的一个原象 $\boldsymbol{n}$ 映照成为自身空间中的一个**映像** $\boldsymbol{t}$。这种映照又是线性的，因为由平衡关系和几何关系 (图 1.1.1) 有

$$\boldsymbol{t}\mathrm{d}a + \boldsymbol{t}^{(1)}\mathrm{d}a_1 + \boldsymbol{t}^{(2)}\mathrm{d}a_2 + \boldsymbol{t}^{(3)}\mathrm{d}a_3 = 0 \tag{1.1.6}$$

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}a + \boldsymbol{n}^{(1)}\mathrm{d}a_1 + \boldsymbol{n}^{(2)}\mathrm{d}a_2 + \boldsymbol{n}^{(3)}\mathrm{d}a_3 = 0$$

式中，$\mathrm{d}a$ 是四面体 $\boldsymbol{n}$ 面的面积，而 $\mathrm{d}a_k$，$\boldsymbol{n}^{(k)}$，$\boldsymbol{t}^{(k)}$ 分别是坐标面 k 的面积、外向法线向量和外向 (拉) 应力向量。向量 $\boldsymbol{n}$ 的分量为 $n_k = \dfrac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}a}$，因此以上两式可以改写为

$$\boldsymbol{t} = -n_k\boldsymbol{t}^{(k)}, \quad \boldsymbol{n} = -n_k\boldsymbol{n}^{(k)} \tag{1.1.7}$$

映照算子 $\boldsymbol{T}$ 作用到式 (1.1.7) 的第二式得

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T}\left(-n_k\boldsymbol{n}^{(k)}\right) \tag{1.1.8}$$

映照关系对向量 $\boldsymbol{t}^{(k)}$，$\boldsymbol{n}^{(k)}$ 也适用，故有

$$\boldsymbol{t}^{(k)} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}^{(k)} \tag{1.1.9}$$

所以式 (1.1.7) 的第一式变成

$$\boldsymbol{t} = -n_k\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}^{(k)} \tag{1.1.10}$$

由此得出

$$\boldsymbol{T}(-n_k\boldsymbol{n}^{(k)}) = -n_k\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}^{(k)} \tag{1.1.11}$$

或者一般地

$$\boldsymbol{T}(k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{T}\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{T}\boldsymbol{b} \tag{1.1.12}$$

这样的映照叫做**线性映照**或者**线性变换**。

把向量空间映照到自身的线性映照算子叫做二阶**张量**，简称张量。

在力学量中，如应力、应变、转动惯量等是三维空间中的二阶张量。多自由度系统中的刚度矩阵、质量矩阵是多维空间中的二阶张量。在量子力学中的能量算子 $\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$、动量算子 $-\mathrm{i}\hbar\nabla$ 等是无穷维空间中的二阶张量。把一个向量的方向变化到另一个方向的转动变换是一种线性映照，因而映照算子是二阶张量。

零映照 $\boldsymbol{0}$ 和恒等映照 $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{0}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \tag{1.1.13}$$

都是线性映照，也是二阶张量。

以一单位向量 $\boldsymbol{r}$ 点乘任意向量 $\boldsymbol{u}$，其值是一标量，表示 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 上的投影。$\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 方向上的投影向量 $\boldsymbol{v}$ 可以写成

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\cdot)\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\boldsymbol{u} \tag{1.1.14}$$

这里的算子 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\cdot$ 也简写成 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}$，近来则常写成 $\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}$，它把向量 $\boldsymbol{u}$ 变成 $\boldsymbol{r}$ 方向的投影向量 $\boldsymbol{v}$，可以叫做**投影子**。这种张量是**并矢**的一个特例。$\boldsymbol{u}$ 在和 $\boldsymbol{r}$ 垂直方向的分量向量为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\boldsymbol{u} \tag{1.1.15}$$

张量 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{rr})$ 叫做**离心子**。

一般的并矢是两个任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的并列，有下式定义：

$$(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{1.1.16}$$

任何二阶张量可以用并矢作为单元来构成。如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是方向不同的单位向量，令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}$，可见 $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，即张量 $\boldsymbol{ab}$ 是一个**转动子**，它把方向为 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量转到 $\boldsymbol{a}$ 的方向。

向量的叉乘

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u} \tag{1.1.17}$$

中算子 $\boldsymbol{r}\times$ 把向量 $\boldsymbol{u}$ 变换成垂直于 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$ 平面的另一向量 $\boldsymbol{v}$，如果 $\boldsymbol{r}$ 是单位向量，则算子 $\boldsymbol{r}\times$ 把向量 $\boldsymbol{u}$ 先变成垂直于 $\boldsymbol{r}$ 的分量向量，然后再绕 $\boldsymbol{r}$ 轴逆时针旋转 90° 而成为向量 $\boldsymbol{v}$，这种张量叫做**旋转子**。

1.2　张量的运算

下面是张量的一些基本运算的定义以及由此导出的一些结论。设有二张量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$。

(1) 张量的加法

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{Au}+\boldsymbol{Bu} \tag{1.2.1}$$

(2) 张量的乘法

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bu}) \tag{1.2.2}$$

但是一般地说，$\boldsymbol{ABu}\neq\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Au})$，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为**互易**。

(3) 张量的幂

$$\boldsymbol{A}^0\equiv\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}^1\equiv\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^2\equiv\boldsymbol{AA},\quad \boldsymbol{A}^n\equiv\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A} \tag{1.2.3}$$

通常的指数定律成立：

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n},\quad (\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}\quad (m,\ n\text{为正整数})$$

(4) 张量的逆

如二张量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 之间有关系：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$$

则有

$$\boldsymbol{ABu}=\boldsymbol{Iu}=\boldsymbol{u}$$

两边左乘以 $\boldsymbol{B}$ 得

$$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{Bu} = \boldsymbol{Bu}$$

因此

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$$

于是，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 互为**逆**，记作 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}$，因而

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{1.2.4}$$

因为

$$\boldsymbol{ABB}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$$

也即

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{I}$$

故有

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{1.2.5}$$

又指数定律可以推广到负幂：

$$(\boldsymbol{A}^n)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^n \tag{1.2.6}$$

并非所有的二阶张量都有逆，张量可逆的条件见 1.4 节，无逆的张量叫**奇异张量**。

(5) 张量的转置

张量 $\boldsymbol{A}$ 和两个任意的向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 可构成一个标量的双线性式 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Av}$，如有另外一个张量 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，也可和 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 构成一个双线性式 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$。如果关系

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Av} \tag{1.2.7}$$

成立，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 就叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**。

以并矢 $(\boldsymbol{ab})$ 为例，由式 (1.2.7)

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{ab})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{v}$$

但有并矢的定义 (1.1.16)

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{ba})\boldsymbol{u}$$

因此

$$(\boldsymbol{ab})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{ba}) \tag{1.2.8}$$

故转置的意义在于使并矢中的两个向量前后换位。

如有二张量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的相乘 (点乘) 构成的张量 $\boldsymbol{AB}$，则

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{v}$$

但

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bv})=(\boldsymbol{Bv})\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{Bv}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}$$

于是得出

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.2.9}$$

又可证：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{1.2.10}$$

为使转置运算规律对张量和向量是一致的，最好把并矢 $\boldsymbol{ab}\equiv\boldsymbol{ab}\cdot$ 记作 $\boldsymbol{ab}^{\mathrm{T}}$，这样式 (1.2.8) 成为

$$(\boldsymbol{ab}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}} \tag{1.2.11}$$

从这里又可看出 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{b}\cdot$ 相当。两个向量的点积 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 又可记作 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$。

1.3 张量的表象

在三维空间中任取一组线性无关的 (不共面的，但不一定互相垂直) 三个向量 $\boldsymbol{e}_j\,(j=1,2,3)$ 作为**基**，则向量 $\boldsymbol{u}$ 可表示为三个向量之和 (参看图 1.3.1)：

$$\boldsymbol{u}=u^j\boldsymbol{e}_j \tag{1.3.1}$$

u^j 叫做 $\boldsymbol{u}$ 在基向量 $\boldsymbol{e}_j$ 上的 (斜角) 分量。

另选一组倒易向量 $\boldsymbol{e}^i\,(i=1,2,3)$ 组成**倒易基**

$$\boldsymbol{e}^i=\frac{\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k}{V},\quad V=|\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k|=[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k] \tag{1.3.2}$$

这里指标 i，j，k 按 1，2，3 的次序循环选取，则向量 u 也可在倒易基上分解 (参看图 1.3.2)：

$$\boldsymbol{u}=u_j\boldsymbol{e}^j \tag{1.3.3}$$

u_j 叫做 $\boldsymbol{u}$ 在倒易基向量 $\boldsymbol{e}^j$ 上的 (斜角) 分量。

由倒易基的定义 (1.3.2) 可见

$$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta^i_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{1.3.4}$$