



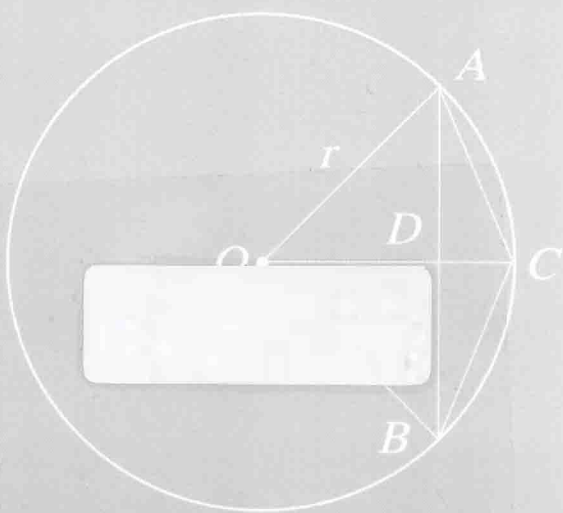
一课研究丛书·图形与几何系列

主编 朱乐平

圆的面积

教学研究

邵虹◎著



教育科学出版社

Educational Science Publishing House



一课研究丛书·图形与几何系列

主编 朱乐平

圆的面积

教学研究 | 邵虹◎著

教育科学出版社
· 北 京 ·

出版人 所广一
策划编辑 郑 莉
项目统筹 郑 莉
责任编辑 谭文明
版式设计 宗沅雅轩 贾艳凤
责任校对 贾静芳
责任印制 曲凤玲

图书在版编目 (CIP) 数据

圆的面积教学研究 / 邵虹著. —北京: 教育科学出版社, 2014. 1
(一课研究丛书 / 朱乐平主编. 图形与几何系列)
ISBN 978 - 7 - 5041 - 8288 - 3

I. ①圆… II. ①邵… III. ①圆—面积—教学研究—小学 IV. ①G623. 502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 005303 号

一课研究丛书·图形与几何系列

圆的面积教学研究

YUAN DE MIANJI JIAOXUE YANJIU

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号

邮 编 100101

传 真 010 - 64891796

市场部电话 010 - 64989009

编辑部电话 010 - 64981277

网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

制 作 北京金奥都图文制作中心

印 刷 保定市中国画美凯印刷有限公司

开 本 169 毫米 × 239 毫米 16 开

印 张 15.5

字 数 234 千

版 次 2014 年 1 月第 1 版

印 次 2014 年 1 月第 1 次印刷

印 数 1—3 000 册

定 价 36.00 元

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

这是一套什么样的书？

你见过对一节课的研究形成一本十几万字的学术专著吗？

你见过查阅百年来课标（大纲）后综述对一节课的教学要求吗？

你见过对一节课的内容进行国内外多个版本教材比较吗？

你见过对主要杂志上关于一节课的研究成果进行综述吗？

你见过根据一节课的内容给出许多个不同的教学设计吗？

你见过对一节课的研究形成系列校本教研的活动方案吗？

你见过以作者与读者互动对话的形式写成的学术专著吗？

本丛书将让你见到上面所有的“样子”。

《一课研究丛书·图形与几何系列》（以下简称“丛书”）是对课的研究。其中的每一本都是围绕小学数学“图形与几何”领域的一节课（或两三节相关的课）进行多视角系统研究而形成。

研究的内容主要根据教师的课堂教学实践与理论水平提高的需要来确定。主要维度如下：

1. 数学知识维度。数学老师要上好一节课，就应该比学生有更多关于这节课的数学知识，即“上位数学知识”。它是指超越了小学数学一节课的内容，在初中、高中（或中等师范学校）以及大学数学中出现的相关数学知识。很显然，没有上位数学知识是无法上好一节课的，但只有上位的数学知识也远远不够，还必须能够从中获得教学的启示。也就是说，要把围绕一节课的上位数学知识与小学数学紧密结合，指导小学数学教学。这一维度的研究主要解决老师在知识上的“一桶水”问题。

2. 课程标准（教学大纲）维度。从理论上说，一个教师有了数学知识以后，首先要关注的就是课程标准（教学大纲）。这是因为数学课程标准（教学大纲）是一个规定了数学学科的课程性质、目标、内容和实施建议的教学指导性文件。对一节课展开研究应该从最高的纲领性文件入手，明确这节课的目标定位。丛书中所涉及的每一节课，其作者都查阅了自20世纪初到现在的一百多年来国内所有和国外部分数学课程标准（教学大纲），从标准的视角，展现出一节课教学要求的历史沿革过程并从中获得启示。

3. 教材比较维度。数学教材为学生学习一节课的内容提供了基本线索和知识结构，它是重要的数学课程资源。丛书对一节课的教材从多个角度进行比较研究。从时间的角度看，进行了纵向与横向比较研究。纵向比较研究是对不同时期出版的教材进行比较，特别是对同一个出版社或同一个主编不同时期编写的教材进行多角度比较，从历史的沿革中感悟一节课不同时期的编写特点；横向比较研究是对同一时期出版的多种不同版本教材进行比较。从地域的角度看，进行了中国大陆与港、澳、台教材的比较，以及国内外教材的比较。教材比较研究可以为研究这节课或去给小学生上这节课的老师开阔视野，帮助找到更多有价值的课程资源。丛书的每一本不但在正文中对教材进行了比较，而且还在附录中完整呈现了多个版本的相关教材，供读者进一步研究参考。

4. 理论指导维度。我们知道，没有实践的理论是空虚的，没有理论的实践是盲目的。要上好一节课，自然需要理论的指导。奇怪的是，虽然有许多教育理论，但要真正系统地指导一节课的时候，特别是要指导一节课进入实践操作时，却又常常是困难的。丛书在数学教育理论指导课堂教学方面做了探索，努力做到让理论进入课堂教学实践，使得实践者能够真正感受到理论的力量。

5. 学生起点维度。学生是学习的主体，要进行一节课的教学，自然要研究学生的起点。丛书不仅阐述了如何了解学生起点的方法，而且还围绕一节课的学习，对学生起点情况进行分析与研究，以便更好地进行教学设计。

6. 教学设计维度。有了上述五个维度的研究后，我们就可以进入教学设计的研究维度。丛书首先对一节课的教学设计进行综述，就是把散见在多种重要杂志和专著上的教学设计成果进行整理（比如，查阅《小学数学教师》《小学教学》等刊物自创刊以来的全部内容），试图明确这节课迄今为止的所有研究成果。然后再根据学生的情况和多个不同的角度设计出新的不同的教学过程。这些新的教学设计都可以直接进入课堂教学实践。

7. 课堂教学维度。有了教学设计就可以进入课堂教学研究。这一维度主要是对一节课进行课堂教学的观察与评价，具体阐述了如何从多个角度了解教师与学生的情况，如何对教师的教与学生的学进行观察与评价。

8. 课后评价维度。课后评价维度是指在学生学习了一节课以后，对学生的学习情况进行了解与评价。丛书主要从情感态度与“四基”（基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验）内容两大方面，对学生进行测查评价，包括如何进行课后测查与访谈，学生容易掌握的内容和容易出错的地方的调查与研究，等等。

9. 校本教研维度。校本教研的重要性不言而喻。丛书主要围绕一节课提供校本教研的活动方案。即提供了老师们对一节课开展系列研究的活动方案，以便在更广的范围内对一节课进行全面深入系统的研究。

上述九个维度是丛书研究的基本视角，丛书中每一本书的作者还会根据课的具体内容与特点有所侧重地展开研究。所以，每本书既有自己的个性，又有丛书的共性。

从写作形式来说，丛书中每一本书的目录基本都采用了问题形式，以便读者能够快速查到自己感兴趣的内容。正文中的阐述方式采用了平等对话的形式，并提出了一些问题让读者思考。这样的写作形式，试图拉近作者与读者的距离，增加读者的参与度，让读者更感亲切。

这套书是如何形成的？

时间与人员：丛书撰写历时五年。丛书作者 25 人，有省特级教师、省优秀教师、省市教坛新秀和骨干教师。他们都是“朱乐平小学数学名师工作室”的成员，是经过自愿报名、笔试、面试后，在众多的报名者中脱颖而出者。

目标与问题：丛书撰写的目标是为了与大家分享成果，试图在分享中促进数学老师的专业发展，让更多的老师能够减轻工作负担，提高数学教学水平。如何真正促进数学教师的专业发展？有人说，要“实践—认识—再实践—再认识”。这很正确，但任何一个专业要发展都应该如此。也有人说，要“多读书，多交流”。这很对，但对所有专业的发展都适用。还有人说，要“多实践，多反思”。这也很有道理，但缺少了教师专业发展的特点。

观念与操作：通过课例研究，促进专业发展——这是具有教师职业特点的专业发展之路。数学教师主要通过一节课一节课的教学体现出自己的专业水平，学生主要通过一节一节数学课的学习而成长。可见，对一节节课进行研究的重要性怎么强调都不会过分。数学教师通过一节一节课的研究定能提高自己的专业水准，而研究出的成果又可以与同行分享，并有可能减轻同行的工作负担。正是基于上面的这些想法，我们才花五年时间写出了这套丛书，希望同行们能够从中得到一些启迪。

由于水平所限，书中一定存在不足甚至错误，敬请读者批评指正。

目 录

1 上位数学知识研究

1.1 上位数学知识解读 / 3

1.1.1 圆的面积的定义及其理解 / 3

什么是面积? / 4

什么是正多边形? / 4

什么是圆内接正多边形? / 5

什么是圆外切正多边形? / 5

什么是极限? / 6

1.1.2 圆周率的定义、性质及计算 / 6

如何用圆周长和直径来定义圆周率? / 6

如何用圆面积和半径来定义圆周率? / 7

圆周率有哪些性质? / 8

圆周率的值是怎样算出来的? / 9

如何理解圆周率精确度的价值? / 11

1.1.3 圆的面积的计算方法 / 11

刘徽如何用割圆术求圆的面积? / 11

教材中用什么方法计算圆的面积? / 13

1.1.4 圆的面积与周长的关系 / 16

1.1.5 小学阶段研究圆面积计算公式用到的数学思想方法 / 17

出入相补原理 / 18

化归法 / 18

类比法 / 20

1.2 上位数学知识对圆的面积教学的启示 / 20

如何理解圆面积计算公式推导的特殊性? / 20

如何把握平面图形面积计算的教学顺序? / 21

如何促使圆面积计算公式的推导更科学? / 22

如何理解圆拼成长方形后的长边与 $\frac{C}{2}$ 之间的

关系? / 22

如何引导学生探究圆面积与半径之间的关系? / 23

如何让学生进一步体会极限思想? / 23

如何处理 π 与其近似值3.14之间的关系? / 24

2 课程标准(教学大纲)研究

2.1 我国历年课程标准(教学大纲)对圆的面积的教学要求 / 27

2.1.1 从哪年起开始出现圆的面积的教学要求? / 27

2.1.2 从哪年起对圆的面积的教学提出了具体要求? / 27

2.1.3 如何理解2011版课标对圆的面积教学提出的新要求? / 28

2.2 国外课程标准对圆的面积的教学要求 / 30

2.2.1 美国的教学要求 / 30

2.2.2 英国的教学要求 / 31

2.2.3 德国的教学要求 / 32

2.2.4 芬兰的教学要求 / 33

2.2.5 日本的教学要求 / 34

2.2.6 韩国的教学要求 / 35

2.3 国内外课程标准(教学大纲)比较的启示 / 35

2.3.1 如何理解国内课标(大纲)中内容编排的变化? / 35

2.3.2 如何理解国内课标(大纲)中教学要求的变化? / 36

2.3.3 国外课程标准中的教学要求有哪些特点? / 36

3 教材比较研究

3.1 同种教材不同时期编写情况的纵向比较 / 41

3.1.1 人教版教材不同时期的编写情况 / 41

教材结构是怎样的? / 41

教材的引入部分是怎样编写的? / 42

圆面积计算公式的推导是怎样编写的? / 43

安排了哪些类型的练习题? / 45

3.1.2 刘静和、张天孝主编的教材在不同时期的编写情况 / 49

编写背景有何差异? / 49

教材结构是怎样的? / 50

教材的引入部分是怎样编写的? / 51

圆面积计算公式的推导是怎样编写的? / 54

安排了哪些类型的练习题? / 57

3.2 同一时期不同教材编写情况的横向比较 / 59

3.2.1 教学大纲指导下各版本教材的编写情况 / 59

引入部分是怎样编写的? / 60

圆面积的定义是否出现? 怎样编写? / 61

公式推导部分是怎样编写的? / 61

公式应用部分是怎样编写的? / 63

3.2.2 实验稿课标指导下各版本教材的编写情况 / 65

教材引入采用了哪些方式? / 66

各版本教材对圆的面积如何定义? / 67

圆面积计算公式推导的教学顺序有何差异? / 68

在圆面积计算公式推导前是否进行估计与
猜测? / 68

- 研究素材有何差异? / 71
- 采用哪些方法探究圆面积计算公式? / 72
- 安排了哪些练习题? / 76
- 3.2.3 港澳台地区教材的编写情况 / 77
 - 香港教材的编写有哪些特点? / 78
 - 澳门教材的编写有哪些特点? / 78
 - 台湾教材的编写有哪些特点? / 79
- 3.3 各版本教材比较研究的启示 / 82

4 教学前学情调查与分析

- 4.1 学生学习起点研究 / 87
 - 测试的问题 / 87
 - 测试的对象 / 87
 - 测试与访谈过程 / 87
 - 4.1.1 学生情感态度测试 / 88
 - 测试的内容 / 88
 - 测试的方法与结果 / 89
 - 4.1.2 学生已有知识与技能测试 / 100
 - 测试的内容 / 100
 - 测试的方法与结果 / 100
- 4.2 学生起点研究对教学的启示 / 104
 - 学生对圆特征与本质属性的了解停留在表象 / 104
 - 学生缺乏对圆面积研究中相关性因素分析的思考 / 105
 - 对研究方法的指导是圆面积教学的核心目标 / 105

5 教学设计比较研究

- 5.1 教学目标设定的差异 / 109
 - 5.1.1 20 世纪八九十年代教学目标的表述 / 109

- 5.1.2 2001 年以来教学目标的表述 / 110
- 5.2 教学过程的不同设计 / 112
 - 引入采用了哪些方式? / 112
 - 如何定义概念? / 115
 - 怎样引导学生探究计算公式? / 116
 - 安排了哪些练习题? / 122
- 5.3 同课异构教学设计 / 127
 - 5.3.1 范希尔理论指导下的教学设计 / 127
 - 什么是范希尔几何思维水平? / 128
 - 如何体现在几何教学阶段? / 129
 - 教学设计示例 / 130
 - 5.3.2 积累数学活动经验的教学设计 / 139
 - 什么是数学活动经验? / 139
 - 如何积累数学活动经验? / 140
 - 如何设计有效的数学活动? / 140
 - 教学设计示例 / 141
 - 5.3.3 重视合作交流与数学语言表达的教学设计 / 149
 - 为什么要重视合作交流? / 150
 - 重视数学表达有何意义? / 150
 - 教学设计示例 / 151
- 5.4 教学设计比较的启示 / 157

6 课堂观察与评价

- 6.1 怎样进行课堂观察? / 161
 - 6.1.1 课堂观察的基本步骤 / 161
 - 6.1.2 课堂观察的研究维度 / 162
- 6.2 如何分析与评价课堂观察的结果? / 162
 - 6.2.1 课堂教学情况 / 162
 - 6.2.2 课堂教学过程时间分配 / 175

- 6.2.3 课堂教学语言互动分析 / 176
- 6.2.4 师生问答水平及行为分析 / 178
- 6.2.5 听课教师反馈评价 / 196

7 教学后学情分析

- 7.1 教学后学生情感态度的发展 / 203
 - 7.1.1 情感态度的调查内容 / 203
 - 7.1.2 情感态度的调查结果 / 204
- 7.2 教学后学生知识技能的掌握 / 213
 - 7.2.1 知识技能的调查内容 / 213
 - 7.2.2 知识技能的调查结果 / 215

参考文献 / 223

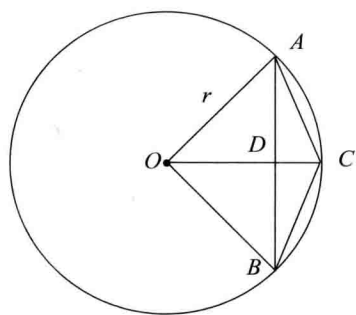
附 录 / 225

- 1 根据实验稿课标编写的“圆的面积”教材图片 / 227
- 2 “圆的面积”知识技能教学前测试卷 / 234

后 记 / 235

1

上位数学知识研究



在基础教育课程改革的背景下，教师已然成为教学研究的主体。新课程倡导，未来的教师不仅要具有基本的教育理论修养，而且要具备扎实的学科知识素养。对于小学数学教师而言，需要具备的特定学科知识，就是上位数学知识。

那么，如何用现代数学观点阐述小学数学内容呢？具体可以从三个方面展开。首先，要补充构建小学数学的相对严密的框架。限于小学生的年龄特点，小学数学教材里的数学知识不可能是严密的，教师应当知道它们的内在逻辑结构，准确把握数学本质。其次，小学数学教学中，出现了一些“与时俱进”的数学问题，教师需要了解在小学数学知识之上的初中、高中，甚至大学的数学知识，避免科学性错误。此外，要以相关观点指导处理具体教学的问题。针对一节课的研究，积累丰富的教学实践案例，获得教学启示，便可高屋建瓴地指导课堂教学。因此，上位知识既是教师成长的基础，也是教师专业发展的必要条件。

1.1 上位数学知识解读

数学的研究对象是现实世界的数量关系和空间形式。“图形与几何”是我国小学数学重要的课程内容，以发展学生的空间观念、几何直观、推理能力为核心展开。课程内容主要包括：图形的认识、图形的测量、图形的运动和图形的位置。

圆是最基本的平面图形之一，在几何学中有着广泛的应用，也是各个国家基础教育数学教学中必不可少的教学内容。圆的度量，即圆的周长和面积的计算，在几何学中占有极为重要的地位，它是在对形的认识与探测的历程中，由“直”跨入“曲”的关键一步，也是数学思想从“有限”进入“无限”的一次飞跃。

圆的面积上位数学知识主要指与小学数学中圆面积相关的初中、高中甚至大学的数学知识。作为数学教师，了解这部分内容，可以开阔眼界，深入、准确地把握小学数学教学中有关圆面积的知识，以便于高屋建瓴地指导小学数学教学。为了更好地理解与把握这部分内容的上位数学知识，我们不妨采用提出问题和问题解读的方式进行研究。

1.1.1 圆的面积的定义及其理解

思考

你认为“圆的面积”是如何定义的？回忆一下教材中是否进行了定义？如果有，它是怎样表述的？

通过查阅现行的小学、初中、高中数学教材，查阅《解析几何》《几何原本》《几何概念解析》等相关著作，我们发现“圆的面积”的定义有多种不同的表述方式，在教材中的定义通常有以下两种：

定义1：圆所占平面的大小叫做圆的面积。

定义2：圆的内接或外切正多边形，当边数无限递增时，其面积的极限叫做圆的面积。

对圆的面积定义进行解读，可以通过解读定义中的关键词和提问的方式帮助理解。

什么是面积？

思考

还记得“面积”的定义吗？面积公理是怎样的？了解它对圆面积的教学有何帮助？

面积的概念很早就已经形成。在古代埃及，尼罗河每年泛滥，洪水抹去了田地间的界限标志。水退后，人们需要重新画出地的界限，这就需要重新丈量 and 计算田地。于是，逐渐有了面积的概念。

面积是一个二维图形，我们可以直观地感觉到它所占有的区域具有一定大小。对于二维图形的表面进行度量后，可用唯一的非负实数与它对应，如果这种对应满足：

① 边长为 1 个长度单位的正方形作为面积单位，与数 1 相对应；

② 运动不变性，即全等图形与相同的实数相对应；

③ 有限可加性，即将一个图形分成两个至多只有公共边界的部分图形的并集，该图形所对应的数就等于两个部分图形所对应数的和。面积相等的图形不一定是全等形。

将以上这些性质放在一起，就成为了面积公理的内容。提出面积公理的基本想法是：既然图形是一个集合，而相应的图形面积是一个数，则面积是定义在集合族之上的一个函数。这个集合函数显然是非负函数，而且正方形的面积是 1。运动不变性是指图形通过有限次的平移、旋转或反射后（即刚体运动），它的面积保持不变。当然，两个不重叠的图形相并的面积，等于这两个图形的面积之和，这就是面积的“有限可加性”。了解面积定义、面积公理，能更好地为探索圆面积计算公式的推导服务。

什么是正多边形？

正多边形亦称正多角形，它是一类重要的几何图形。各条边相等且各个角也相等的多边形称为正多边形。各边都相等的多边形称为等边多边形，各内角都相等的多边形称为等角多边形。正多边形既是等边多边形也是等角多边形。边数 n 的正多边形称为正 n 边形，当 n 为 3 和 4 时，分别称做正三角形和正方形。

思考

正多边形与圆的关系密切，你知道圆内最大的正方形与正方形内最大的圆吗？如果用内接和外切的方式，又该如何表述？如何理解呢？

什么是圆内接正多边形？

圆内接正多边形是一类重要的正多边形。顶点都在同一圆周上的正多边形，称为圆内接正多边形。把圆分成 n ($n \geq 3$) 等分，顺次连接各分点而得到圆内接正 n 边形。如图 1-1， $ABCDE$ 是已知圆 O 的内接正五边形，而圆 O 叫做五边形 $ABCDE$ 的外接圆。

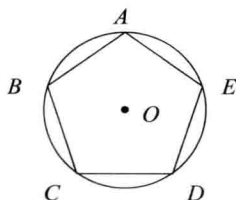


图 1-1

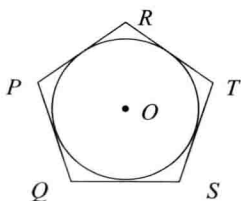


图 1-2

什么是圆外切正多边形？

我们知道，直线与圆有三种位置关系：相离、相切和相交。如果正多边形的各边都与同一个圆相切，那么这个正多边形叫做这个圆的外切正多边形。把圆分成 n ($n \geq 3$) 等分，经过各分点作圆的切线，以相邻切线交点为顶点的多边形是这个圆的外切正 n 边形。如图 1-2， $PQSTR$ 是已知圆 O 的外切正五边形，圆 O 叫做五边形 $PQSTR$ 的内切圆。

由此可见，我们平时所说的圆内接正三角形、圆内接正四边形、圆内接正五边形或者圆外切正三角形、圆外切正四边形、圆外切正五边形，就是通过以上方法得到的。

圆内接正多边形随着边数无限递增（如图 1-3），它的面积越来越逼近圆的面积。同理，圆外切正多边形的边数无限递增时，它的面积也越来越逼近圆的面积。