

清华大学“985”名优教材建设项目

清华大学动力学与控制丛书

“十二五”国家重点图书出版规划项目

计算动力学

(第2版)

张雄 王天舒 刘岩 编著

清华大学出版社

清华大学“985”名优教材建设项

清华大学动力学与控制丛书

“十二五”国家重点图书出版规划项目

计算动力学

(第2版)

张雄 王天舒 刘岩 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书将计算结构动力学、计算冲击动力学和计算多体系统动力学内容有机整合,系统讲授工程结构和机械系统在各种瞬态载荷作用下动力学行为的数值分析方法和程序实现技术。

全书分为3篇,共有16章和4个附录。第1章从加权余量法出发,讲述达朗贝尔-拉格朗日原理、哈密顿原理和广义变分原理。第2章以平面三结点三角形单元为例,讲述有限元法的一般过程,详细讨论了有限元法的程序实现方法,并给出了有限元法示例程序STAP90。第3章详细讲述大型特征值问题的求解方法及误差估计问题,给出了广义雅可比法、子空间迭代法和Lanczos迭代法的FORTRAN 90程序。第4章阐述大型离散系统运动方程的求解方法,给出了时间积分示例程序TIP90。第5章讲述大型复杂系统动力分析的有效方法——动态子结构法。第6章简要讲述结构动力学问题的频域分析方法,并给出了响应谱计算程序RespSpec。第7章讲述连续介质力学基础,包括物体运动和变形的描述方法、应变及应力的度量方法和守恒方程。第8章讲述拉格朗日有限元法,并给出显式有限元程序EFEP90。第9章讲述材料模型及其程序实现方法。第10章讲述任意拉格朗日-欧拉法。第11章讲述无网格法,包括伽辽金型无网格法、光滑质点流体动力学方法和物质点法。第12章简要介绍并行计算方法和并行程序设计,并给出了并行版的高速碰撞分析显式有限元程序PEFEP90。第13章讲述刚体运动学基础。第14章讲述多刚体系统的运动学分析。第15章讲述多刚体系统的动力学分析,并给出示例程序MBSim。第16章讲述柔性多体系统动力学建模方法。附录A简要地介绍张量指标记号、Voigt记号和张量运算法则。附录B介绍Tecplot进行有限元后处理的相关功能。附录C介绍如何用ParaView进行有限元后处理。附录D讲述FEAP程序的使用方法、程序结构以及进行二次开发的方法,便于学生在FEAP程序的基础上快速开展自己的研究工作。

本书可作为力学、机械、航空航天、土木水利、汽车等专业的研究生和高年级本科生教材及科研人员的参考书。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

计算动力学/张雄,王天舒,刘岩编著.--2版.--北京:清华大学出版社,2015
(清华大学动力学与控制丛书)

ISBN 978-7-302-38833-3

I.①计… II.①张… ②王… ③刘… III.①动力学—研究 IV.①O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 305672 号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:常雪影

责任校对:赵丽敏

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:36 字 数:875 千字

版 次:2007 年 12 月第 1 版 2015 年 3 月第 2 版 印 次:2015 年 3 月第 1 次印刷

印 数:1~2500

定 价:65.00 元

产品编号:052655-01

作者简介

张 雄 清华大学教授、博士生导师。1992 年获大连理工大学博士学位, 2004 年入选教育部首批新世纪优秀人才支持计划, 先后获教育部自然科学奖二等奖(第 1 完成人)和一等奖(第 6 完成人)、北京市教育创新标兵、北京市高等教育教学成果奖二等奖、ICACM Fellows Award 等奖励。兼任中国力学学会理事、北京振动工程学会副理事长、International Journal of Mechanics and Materials in Design 副主编、International Journal of Computational Methods 编委、Coupled Systems Mechanics 编委、Acta Mechanica Sinica 编委、HKIE Transactions 国际顾问、计算力学学报编委、计算机辅助工程编委、国际华人计算力学协会(ICACM)常务理事等。近年来主要从事计算力学基本理论、数值方法及其在科学与工程中的应用等方面的研究工作, 尤其是强冲击载荷作用下材料与结构力学行为的多尺度、多介质、多物理场耦合数值分析方法的研究。已发表论文 120 余篇, 与他人合作出版了《无网格法》、《物质点法》、《计算动力学》、《弹性力学及有限元》、《理论力学》、《理论力学课堂教学多媒体系统》、《理论力学教学网》、《理论力学网络试题库系统》和《理论力学多媒体素材库》等专著和教材。

王天舒 清华大学教授、博士生导师, 兼任中国自动化学会空间及运动体控制专业委员会委员, 中国空间科学学会空间机电与空间光学专业委员会委员、中国宇航学会空间遥感专业委员会委员、中国力学学会一般力学专业委员会多体系统动力学组组长、北京市力学学会理事、动力学与控制专业委员会副主任委员。主要研究领域为卫星总体设计、多体航天器动力学与控制、充液航天器动力学。已发表论文 50 余篇, 其中 SCI 收录 20 余篇, EI 收录 30 余篇, 先后获国家科技进步二等奖(第 4 获奖人), 总装备部技术进步一等奖、二等奖、三等奖, 航天部科技进步二等奖。

刘 岩 清华大学副教授。2007 年获清华大学博士学位, 主要研究领域为计算力学、冲击动力学。已发表期刊论文 35 篇, 与他人合作出版了专著《无网格法》、《物质点法》, 论著 SCI 他引 170 余次。曾获教育部自然科学奖二等奖(第 2 完成人)、杜庆华工程计算方法优秀青年学者奖、国际华人计算力学协会 ICACM Young Investigator Award 等奖项。

第 2 版前言

根据本书第 1 版多年来在清华大学和兄弟院校中的使用情况，并结合作者近年来的教学和科研实践，第 2 版在第 1 版的基础上做了较大幅度的修订，主要体现在：

1. 在 2.6 节中补充了稀疏矩阵的行压缩存储格式，简要介绍了高性能大规模稀疏对称和非对称线性方程组求解器 PARDISO，并删除了活动列求解器 COLSOL 的源代码（共 2 页），读者可从本教材的网站 (<http://books.comdyn.cn>) 下载。

2. 进一步改写了 STAP90 程序，增加了内存管理模块 memAllocate，显著地提高了 STAP90 程序的易读性，并重写了 2.6.5 节。

3. 在 1.4 节中补充了拉格朗日乘子法的可解性条件、闭锁问题和迭代解法的内容，并增加了 Nitsche 法。Nitsche 法结合了拉格朗日乘子法和罚函数的优点，在发展新型数值方法中受到了关注。

4. 为了节约篇幅，从第 3 章中删除了求解大型系统特征值问题的子程序 JACOBI90、SSPACE90 和 LANCZOS90 的源代码（共 34 页），读者可从本教材的网站上下载。

5. 时域分析需要求解关于时间的二阶常微分方程组，对于复杂结构问题计算量很大，且不利于分析结构在地震、风和海浪等随机载荷作用下的响应问题。另外，许多工程问题更关心结构的最大响应，而不是其时间历程。因此第 2 版增加了结构动力学问题的频域分析方法（第 6 章），包括频响函数与快速傅里叶变换、响应谱分析方法及其应用和随机振动数值分析初步。

6. 对计算冲击动力学部分进行了大幅度修改和扩充，增加了爆炸模拟中常用的欧拉描述的控制方程（含非守恒形式和守恒形式），扩展了应力率内容并给出了其 Lie 导数解释，补充了接触算法的增广拉格朗日乘子法，扩充了接触面搜索算法。另外，为了公式表达简洁，除了指标记号外，还补充了部分常用公式的张量实体表达形式。

7. 将材料模型作为单独一章并进行了大幅度扩充，详细讲述了亚弹性模型和亚弹性-塑性模型的本构积分算法——返回映射法，并给出了线性亚弹性、理想弹塑性、各向同性硬化弹塑性、Johnson-Cook 塑性和 Drucker-Prager 模型的理论和实现方法；增加了模拟流体的线性多项式状态方程和模拟炸药的 JWL 状态方程，补充了失效模型。

8. 增加了任意拉格朗日-欧拉法一章，详细讲述了任意拉格朗日-欧拉描述的运动描述方法、守恒方程及其有限元离散格式（含彼得罗夫-伽辽金有限元）和网格更新算法，并讲述了求解欧拉法和任意拉格朗日-欧拉法控制方程的算子分裂法和输运算法。

9. 鉴于近年来物质点法在模拟冲击爆炸等涉及材料破坏的问题中发展迅速，第 2 版重写了物质点法部分，并简要介绍了本课题组用 C++ 语言研发的三维物质点法数值仿真

软件 MPM3D。MPM3D 的 FORTRAN 90 简化版 MPM3D-F90 已经开源, 可从本教材网站上下载。

10. 近年来多核计算机发展迅速, 因此在并行计算部分中补充了用于共享内存并行编程的 OpenMP 编程方法。

11. 将原第 9 章改为第 III 篇, 并重整为 4 章。

12. 增加了用 ParaView 进行后处理的内容 (附录 C)。ParaView 可以对极大规模的数据进行快速可视化, 功能强大、操作简单灵活。ParaView 是开源、跨平台软件, 其数据处理规模和效率远高于 Tecplot 软件, 还可以基于原始数据做多种多样的数据提取和再分析。

除此之外, 第 2 版还对第 1 版做了其他大量的修订, 不再一一列出。

王天舒负责修订计算多体动力学部分, 刘岩负责编写第 6 章 (频域分析方法) 和 1.4.3 节, 张雄负责修订其余部分并统稿。廉艳平博士编写了附录 C, 并将 MPM3D 软件中的 Drucker-Prager 模型移植到 EFEP90 程序中, 同时补充了边坡失效模拟算例。陈享补充了第 10 章中的三维输运算法 (10.6.5 节) 和结点变量的输运 (10.6.6 节) 算法中的交错网格法部分。

本教材受到清华大学“985”三期名优教材建设项目资助, 特此致谢。

第 1 版前言

动力学问题在国民经济和科学技术的发展中有着广泛的应用。当物体的局部位置受到扰动（如载荷作用、参数变化等）时，该扰动就会逐渐传播到未扰动的区域去，这种现象称为应力波的传播。当载荷作用时间短（即载荷变化快）且受力物体在加载方向上的尺寸又足够大时，应力波的传播就显得特别重要。此时，材料对外载荷的动态响应必须通过应力波来研究。例如，无限介质中的局部扰动引起的动态响应、半无限介质表面受到撞击以及爆炸和高速冲击所引起的动态响应都属于这类问题。它的研究在结构的抗震设计、人工地震勘探、无损探伤、动能武器、穿甲、空间碎片防护等领域都有广泛的应用背景。

对于薄板、薄壳以及梁、拱这样一类结构，如果外载的作用时间较长并且变化较缓慢，应力波在结构中的传播时间比外载的作用时间要短的多，应力波在其中来回反射多次后应力趋于均匀化，结构的动态响应主要表现为结构的变形并且随时间而发展，甚至引起结构的断裂、贯穿或破坏。这类问题称为结构动力学问题。例如，地面的高层建筑和厂房、核电站的安全壳和热交换器、近海工程的海洋石油平台等在强风、水流、地震以及波浪等各种动力载荷作用下的响应问题。这类结构的破裂、倾覆和垮塌，将给人民的生命财产造成巨大的损失，因此对其进行正确分析和设计，在理论和实际上都具有重要的意义。

应力波的传播问题将物体的动态响应作为一个过程来研究，而结构动力学则忽略扰动传播过程，直接研究结构的变形、断裂及其与时间的关系。

工程中除了房屋建筑、桥梁等结构外，在机械、航空航天、汽车、机器人等领域中存在大量的机构。结构在正常工况下构件间没有相对运动，而机构在运行过程中部件间存在相对运动，如航空航天器、机车与汽车、操作机械臂、机器人等复杂系统。这些复杂机械系统可以模型化为多个物体通过运动副连接的系统，称为多体系统。随着科技的发展，机械系统的构型越来越复杂，因此研究多体系统的动力学特性具有很重要的理论和实际意义。

本教材将计算结构动力学、计算冲击动力学和计算多体系统动力学内容有机整合，系统讲授工程结构和机械系统在各类瞬态载荷作用下动力学行为的数值分析方法和程序实现技术。

王天舒负责编写第 9 章，张雄负责编写其他章节及全书的统稿。本教材的讲义已在清华大学航天航空学院试用了多年，许多研究生都作出了重要贡献。邢向华参与编写了 4.10 节和 4.12 节，并编写了时间积分法示例程序 TIP90，马上参与编写了 6.10 节、6.11 节、8.4 节和附录 B，刘岩参与编写了 4.8 节，汪敏参与编写了附录 C 和 Lanczos90 程序，王汉奎参与编写了第 7 章。

本书具有以下特点:

1. 注重基本概念的阐述, 力图使学生在掌握各类方法基本原理的同时, 理解各类方法之间的内在联系与区别。

2. 注重培养学生的程序设计能力。本课程要求学生除掌握基本原理以外, 还必须具有较强的程序阅读和设计能力, 因此本书中给出了大量的源程序, 如结构分析程序 STAP90、特征值分析程序 JACOBI90、SSPACE90 和 LANCZOS90、时间积分程序 TIP90 (包括中心差分法、Houbolt 法、Newmark 法、Wilson θ 法、精细积分法和基于伽辽金弱形式的时间积分方法)、高速碰撞显式有限元分析程序 EFEP90 和多刚体系统动力学程序 MBSIM。这些程序均可在本教材的网站 <http://xzhang.comdyn.cn/comdyn> 下载。

3. 力图反映相关研究领域中的最新研究进展, 如精细积分法、基于伽辽金弱形式的时间积分法、无网格法、光滑粒子流体动力学法 (SPH)、物质点法 (MPM) 等, 使学生尽快进入到相关的研究领域中。

全书共分为 9 章和 3 个附录。运动微分方程要求在求解域内任意点任意时刻均满足, 对于一些简单问题可以解析求解, 但对于复杂问题只能通过数值方法寻求其近似解。第 1 章从加权余量法出发, 讲述了达朗贝尔-拉格朗日原理、哈密顿原理和广义变分原理, 将运动微分方程转化为等效积分弱形式或泛函 (哈密顿作用量) 的驻值问题, 不再要求微分方程在求解域内任意点任意时刻均满足, 而只要求微分方程在某种平均意义下满足, 便于构造近似解。第 2 章以平面三结点三角形单元为例, 讲述了在复杂求解域上建立近似解的常用方法——有限元法的一般过程, 建立了离散系统的运动方程, 详细讨论了有限元法的程序实现方法, 并给出了有限元法示例程序 STAP90^{*}。求解无阻尼系统的自由振动问题最终转化为求解特征值问题, 因此第 3 章详细讲述了大型特征值问题的求解方法及误差估计问题, 并给出了广义雅可比法、子空间迭代法和 Lanczos 迭代法的 FORTRAN 90 程序。第 4 章阐述了大型离散系统运动方程的求解方法, 包括振型叠加法和直接积分法, 并给出了时间积分示例程序 TIP90。用有限元法离散大型复杂结构 (如高层建筑、飞机结构等) 时系统的自由度数可达几十万甚至几百万, 仅按第 3 章和第 4 章讲述的方法求解是很困难的, 因此第 5 章讲述了大型复杂系统动力分析的有效方法——动态子结构法。

第 6 章讲述了几何非线性、材料非线性和边界条件非线性动力学问题的有限元分析方法, 重点阐述了冲击和爆炸等高速动力学问题的模拟方法, 也兼顾了非线性结构动力学的模拟问题, 并给出了高速碰撞分析显式有限元程序 EFEP90。对于大型复杂结构的非线性动力学问题, 在单机上求解是很困难的, 需要采用并行计算技术, 因此第 7 章简要地介绍了并行计算方法, 并给出了并行版的高速碰撞分析显式有限元程序 PEFEP90。

在用拉格朗日法求解金属冲压成形、高速冲击、裂纹动态扩展、流固耦合、局部化等涉及特大变形的问题时, 有限元网格可能发生严重扭曲, 不仅需要网格重构, 而且严重影响解的精度, 甚至导致计算失败。无网格法是近年来发展起来的一种近似方法, 它采用基于点的近似, 可以彻底或部分地消除网格, 不需要网格的初始划分和重构, 不仅可以保证计算的精度, 而且可以大幅度减小网格生成的工作量, 在涉及特大变形的问题中具有诱人的应用前景。第 8 章讲述了伽辽金型无网格法的基本原理, 并详细阐述了在冲击爆炸等

^{*}STAP90 是在 K. J. Bathe 教授用 FORTRAN IV 编写的 STAP 程序^[1]的基础上用 FORTRAN 90 语言改写而成的, 其结构与 SAP 和 ADINA 程序结构类似。

问题中应用较为成功的 SPH 和物质点法。

第 9 章讲述了多刚体系统和柔性多体系统动力学的建模和数值求解方法，并给出了多刚体系统动力学分析示例程序 MBSim。

为了叙述和推导方便，本书使用了指标记号和张量运算。附录 A 简要地介绍了指标记号、Voigt 记号和张量运算法则。有限元分析结果的数据量很大，必须借助于后处理软件对计算结果进行可视化处理。Tecplot 是功能强大的数据可视化软件，可以将科学或工程计算中得到的大量数据形成直观图形，包括绘制 XY 曲线、轮廓图、云图、等值线、向量图、离散点图等。Tecplot 也能够读取和处理二维和三维的有限元网格的数据，绘制应力云图，可作为有限元程序的后处理软件。附录 B 介绍了 Tecplot 进行有限元后处理的相关功能。

FEAP 程序是与 O. C. Zienkiewicz 和 R. L. Taylor 编写的教材 (The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, 2005 年第 5 版) 配套的教学程序，由美国加州大学伯克利分校土木与环境工程系 Robert L. Taylor 教授研制开发。该程序采用宏命令程序设计方法，用户可以很方便地在 FEAP 中增加自己的命令，实现相应的功能。FEAP 程序也可以作为本课程的教学程序，让学生在 FEAP 程序的基础上完成课程的项目训练，以便于学生将来在 FEAP 程序的基础上快速开展自己的研究工作。因此附录 C 讲述了 FEAP 程序的使用方法、程序结构以及进行二次开发的方法。

本书可作为力学、机械、航空航天、土木水利、汽车等专业的研究生和高年级本科生教材及科研人员的参考书。

目录

第 I 篇 计算结构动力学	1
第 1 章 线弹性动力学变分原理	3
1.1 加权余量法	3
1.2 达朗贝尔-拉格朗日原理	7
1.3 哈密顿原理	8
1.4 约束条件的施加方法	14
1.5 广义变分原理	20
习题	22
第 2 章 有限元离散	23
2.1 三结点三角形单元	23
2.2 运动方程	28
2.3 质量矩阵	31
2.4 阻尼矩阵	35
2.5 刚度矩阵	35
2.6 有限元程序实现	38
2.7 STAP90 程序	49
习题	52
第 3 章 大型系统特征值问题	53
3.1 特征解的性质	54
3.2 误差估计	57
3.3 向量迭代法	59
3.4 变换法	69
3.5 瑞利-里兹法	79
3.6 子空间迭代法	83
3.7 Lanczos 迭代法	87
习题	93

第 4 章 运动方程的解法	94
4.1 振型叠加法	94
4.2 直接积分法的稳定性	97
4.3 中心差分法	99
4.4 Houbolt 法	106
4.5 Newmark 法	112
4.6 Wilson θ 法	118
4.7 广义 α 法	125
4.8 精细积分法	128
4.9 时间域离散	133
4.10 基于伽辽金法弱形式的时间积分法	136
4.11 各种方法的比较	144
4.12 显式和隐式积分方法的综合	148
4.13 时间积分程序 TIP90	152
习题	156
第 5 章 动态子结构方法	158
5.1 静力凝聚和静力子结构法	158
5.2 固定界面模态综合法	161
5.3 自由界面模态综合法	167
5.4 复模态理论	171
习题	175
第 6 章 频域分析方法	176
6.1 频响函数与快速傅里叶变换	176
6.2 响应谱分析方法及其应用	182
6.3 随机振动数值分析初步	191
习题	200
第 II 篇 计算冲击动力学	201
第 7 章 连续介质力学基础	203
7.1 物体运动和变形的描述方法	203
7.2 应变度量	207
7.3 应力度量	211
7.4 守恒方程	217
第 8 章 拉格朗日有限元法	224
8.1 网格描述	224
8.2 更新拉格朗日格式	228
8.3 完全拉格朗日格式	234

8.4	方程求解	235
8.5	人工体积粘性	242
8.6	沙漏模态	243
8.7	接触-碰撞算法	249
8.8	显式有限元程序 EFEP90	268
第 9 章	材料模型	275
9.1	应力更新	275
9.2	强度模型	277
9.3	状态方程	301
9.4	失效模型	302
9.5	材料模型程序实现	303
第 10 章	任意拉格朗日-欧拉法	314
10.1	运动描述	314
10.2	守恒方程	315
10.3	有限元离散	317
10.4	网格更新	320
10.5	算子分裂	324
10.6	输运算法	326
第 11 章	无网格法	340
11.1	移动最小二乘近似	343
11.2	伽辽金型无网格法	352
11.3	光滑质点流体动力学方法	366
11.4	物质点法	373
第 12 章	并行计算	385
12.1	并行计算和并行机	385
12.2	任务分配	386
12.3	并行程序设计	389
12.4	EFEP90 程序并行化	400
第 III 篇 计算多体动力学		405
第 13 章	刚体运动学基础	407
13.1	参考系运动学	407
13.2	刚体的有限转动	410
13.3	刚体的姿态坐标	413
13.4	小结	421

第 14 章 多刚体系统的运动学分析	424
14.1 约束及约束方程	424
14.2 多刚体系统的运动学分析	435
第 15 章 多刚体系统的动力学分析	438
15.1 多刚体系统的动力学方程	438
15.2 静力学分析和逆动力学分析	449
15.3 多刚体系统的动力学分析	450
15.4 多刚体系统动力学分析示例程序	455
第 16 章 柔性多体系统动力学建模方法	484
16.1 基于模态坐标柔性多体系统动力学建模方法	485
16.2 柔性多体系统动力学方程的有限元格式	493
附录 A 张量	503
A.1 指标记号与求和约定	503
A.2 张量运算	505
A.3 Voigt 记号	509
附录 B 用 Tecplot 进行后处理	511
附录 C 用 ParaView 进行后处理	516
C.1 一个实例	517
C.2 数据格式	522
附录 D FEAP 程序	535
D.1 FEAP 程序	535
D.2 程序结构	538
D.3 单元子程序的执行过程	541
D.4 时间积分法的实现过程	543
D.5 特征值求解过程	546
索引	549
参考文献	555

第 I 篇

计算结构动力学

本篇共分为 6 章，主要讲述结构运动方程的建立方法和结构振动特性与响应分析方法。第 1 章讲述线弹性动力学的变分原理，将运动微分方程转化为等效积分弱形式或泛函(哈密顿作用量)的驻值问题，便于构造近似解；第 2 章简要讲述了有限元法的一般过程，建立了离散系统的运动方程，详细讨论了有限元法的程序实现方法，并给出了有限元法示例程序 STAP90；第 3 章详细讲述了大型特征值问题的求解方法及误差估计问题，并给出了广义雅可比法、子空间迭代法和 Lanczos 迭代法的 FORTRAN 90 程序；第 4 章阐述了大型离散系统运动方程的求解方法，包括振型叠加法和直接积分法，并给出了时间积分示例程序 TIP90；第 5 章讲述了大型复杂系统动力分析的有效方法——动态子结构法；第 6 章讲述了结构动力学问题的频域分析方法。

第 1 章

线弹性动力学变分原理

为了讨论方便, 本书采用小写字母下标 i, j 表示与各空间坐标方向对应的物理量, 如用 x_i 表示 (x, y, z) , 用 u_i 表示 (u, v, w) 。线弹性动力学的控制方程为

$$\text{运动方程} \quad \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (1.1)$$

$$\text{应变-位移关系} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

$$\text{应力-应变关系} \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.3)$$

$$\text{边界条件} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (1.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \quad (1.5)$$

$$\text{初始条件} \quad u_i|_{t=0} = \bar{u}_i^0 \quad (1.6)$$

$$\dot{u}_i|_{t=0} = \dot{\bar{u}}_i^0 \quad (1.7)$$

其中 σ_{ij} 、 ε_{ij} 和 u_i 分别为应力张量、应变张量和位移矢量, $\bar{f}_i$ 、 $\bar{T}_i$ 和 $\bar{u}_i$ 分别是域 V 中的体力、边界 S_σ 上的给定面力和边界 S_u 上的给定位移, 它们都是时间 t 和空间坐标 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 的函数。 $\bar{u}_i^0$ 和 $\dot{\bar{u}}_i^0$ 分别为初位移矢量和初速度矢量。本章中采用了重复指标求和约定, 即重复下标表示对该下标在其取值范围内求和, 见附录A。

1.1 加权余量法

对于一些简单问题, 可以采用解析方法求出其精确解, 它在域 V 中任一点任一时刻均满足运动方程(1.1), 在边界 S_σ 上任一点任一时刻均满足边界条件(1.4)。然而, 对于复杂的实际问题, 只能采用数值方法来求其近似解。近似解通常不能精确满足运动方程(1.1)和边界条件(1.4), 即

$$R_i = \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i \neq 0 \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (1.8)$$

$$\bar{R}_i = \sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i \neq 0 \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (1.9)$$

式中 R_i 和 $\bar{R}_i$ 分别为运动方程(1.1)和边界条件(1.4)的余量。

加权余量法 (weighted residual methods) 是求解微分方程近似解的一种常用方法, 它允许运动方程和边界条件在各点都存在余量, 但要求这些余量在域 V 中和边界 S_σ 上的加

权积分为零, 即要求满足余量方程:

$$\int_V R_i v_i dV = 0 \quad (1.10)$$

$$\int_{S_\sigma} \bar{R}_i \bar{v}_i dS = 0 \quad (1.11)$$

式中 v_i 和 $\bar{v}_i$ 分别为定义在域 V 内和边界 S_σ 上的权函数(test function)。

若积分方程(1.10)和(1.11)对任意权函数 v_i 和 $\bar{v}_i$ 都成立, 则微分方程(1.1)在域 V 内任一点任一时刻都满足, 边界条件(1.4)在边界 S_σ 上任一点任一时刻都满足, 因此式(1.10)和式(1.11)是微分方程(1.1)和边界条件(1.4)的等效积分形式。

一般可将近似解取为一族已知函数的线性组合, 即

$$u_i = \sum_{I=1}^N \phi_I a_{iI} \quad (1.12)$$

其中 a_{iI} 为待定参数, 它们由式(1.10)和式(1.11)确定。 ϕ_I 为定义在整个求解域上的已知函数, 称为试探函数(trial function)(或基函数、形函数), 它取自完全的函数序列 (即任一函数都可以用此函数序列展开), 并且是线性独立的。加权余量法实质上是通过选择合适的待定参数强迫余量在某种平均意义下为零。

任何相互独立的完备函数集都可以作为权函数, 选取不同的权函数就得到不同的加权余量法。为了简单起见, 在下面的讨论中, 假设近似函数精确满足边界条件 (即 $\bar{R}_i = 0$), 因此只考虑域内余量。权函数可以取为 N 个函数的线性组合, 即

$$v_i = \sum_{I=1}^N W_I b_{iI} \quad (1.13)$$

式中 b_{iI} 为待定系数。将上式代入式(1.10)中, 考虑到待定系数 b_{iI} 的任意性, 得

$$\int_V R_i W_I dV = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.14)$$

下面将讨论几种常用的权函数。

1.1.1 配点法

权函数取为 Dirac- δ 函数:

$$W_I = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I), \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.15)$$

将上式代入式(1.14)中, 并利用 Dirac- δ 函数的性质可得

$$R_i(\mathbf{x}_I) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (1.16)$$

这种方法相当于简单地强迫余量在域内的 N 个离散点 (称为配点) 上为零。上式共有 $3N$ 个方程, 可以解出 $3N$ 个待定系数 a_{iI} 。