概率论与数理统计
学习指导与同步训练

主编　刘玉霞　相丽驰　鲁立刚

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

概率论与数理统计
学习指导与同步训练

主编 刘玉霞 相丽驰 鲁立刚

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导与同步训练/刘玉霞，相丽驰，鲁立刚主编. —长沙：中南大学出版社，2014.8
ISBN 978-7-5487-1160-5

Ⅰ.概… Ⅱ.①刘…②相…③鲁… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 177655 号

概率论与数理统计学习指导与同步训练

刘玉霞　相丽驰　鲁立刚　主编

□责任编辑　刘　辉
□责任印制　易建国
□出版发行　中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路　　邮编：410083
发行科电话：0731-88876770　　传真：0731-88710482
□印　　装　长沙印通印刷有限公司

□开　　本　787×1092　1/16　□印张 10.25　□字数 253 千字　□插页
□版　　次　2014 年 8 月第 1 版　□2014 年 8 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-5487-1160-5
□定　　价　28.00 元

前　言

“概率论与数理统计”是高等学校理工类、经管类专业的重要课程之一。它与其他学科有紧密的联系，是近代数学的重要组成部分，其理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中。与其他学科相结合发展成为边缘学科，成为概率论与数理统计发展的一个新趋势。概率论与数理统计不仅是学习其他专业课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目之一。通过概率论与数理统计课程的学习，可以提高学生分析问题、解决问题以及综合运用等能力，可以让学生了解和掌握认识随机性现象的方式、方法。

为了帮助学习者更好的掌握概率论与数理统计的内容、方法，提高学习效率，我们编写了《概率论与数理统计学习指导与解题能力训练》。编写中突出以下特点：①增加选择题目、填空题目的数量；②注重应用问题的选取；③选择题目难易适度，即有基本题目又有各年考研题目。

本书是刘玉霞、相丽驰、鲁立刚、伍宪彬、李炎华、李春华等老师工作长期积累、不断提炼的结果。编写参考了鲁立刚等老师主编的《概率论与数理统计学习指导与同步训练》，胡庆军老师主编的《概率论与数理统计学习指导》，张瑰等老师主编的《概率论与数理统计全程学习指导与习题精讲》等，充分汲取他们书中的优点和长处。本书的编写和出版得到本教学部门同仁的大力支持和帮助，以及中南大学出版社的支持，在此向他们表示感谢！

由于水平有限，书中会有些错误和疏漏，敬请批评指正，编者将不断改进，并深表谢意！

编　者

2014 年 6 月 30 日

目　录

第 1 章　事件与概率 …… (1)
1.1　学习指导 …… (1)
1.2　典型例题 …… (5)
1.3　能力训练习题 …… (8)
1.4　能力训练习题答案 …… (12)
第 2 章　随机变量及其分布 …… (17)
2.1　学习指导 …… (17)
2.2　典型例题 …… (22)
2.3　能力训练习题 …… (26)
2.4　能力训练习题答案 …… (35)
第 3 章　多维随机变量及其分布 …… (53)
3.1　学习指导 …… (53)
3.2　典型例题 …… (57)
3.3　能力训练习题 …… (64)
3.4　能力训练习题答案 …… (71)
第 4 章　随机变量的数字特征 …… (82)
4.1　学习指导 …… (82)
4.2　典型例题 …… (86)
4.3　能力训练习题 …… (90)
4.4　能力训练习题答案 …… (95)
第 5 章　数理统计的基础知识 …… (105)
5.1　学习指导 …… (105)
5.2　典型例题 …… (108)
5.3　能力训练习题 …… (110)
5.4　能力训练习题答案 …… (112)

第 6 章　参数估计 …… (116)

6.1　学习指导 …… (116)
6.2　典型例题 …… (119)
6.3　能力训练习题 …… (122)
6.4　能力训练习题答案 …… (126)

第 7 章　假设检验 …… (132)

7.1　学习指导 …… (132)
7.2　典型例题 …… (135)
7.3　能力训练习题 …… (138)
7.4　能力训练习题答案 …… (140)

附录　2007—2013 年硕士研究生入学考试真题 …… (145)

第 1 章　事件与概率

1.1　学习指导

1.1.1　基本要求

(1) 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，熟练掌握事件之间的关系及运算规律；

(2) 理解事件频率的概念，了解概率的统计定义和公理化定义；

(3) 理解概率的古典定义，会计算古典概型概率；

(4) 理解条件概率的概念，掌握概率的加法公式和乘法公式，了解全概率公式和贝叶斯公式；

(5) 掌握事件的独立性概念，会用事件独立性进行概率计算；

(6) 理解重复独立试验的概念，会用二项公式计算事件的概率.

1.1.2　主要内容

1. 随机试验

若一个试验满足下列三个特点：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且可以预知试验的所有可能结果；

(3) 一次试验之前，不能确定出现的是哪一个结果；

则称这一试验为随机试验.

2. 样本空间、随机事件

在一个试验中，不论可能的结果有多少种，总可以从中找出这样一组基本结果，满足：

(1) 每进行一次试验，必然出现且只能出现一个基本结果；

(2) 任何事件，都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件，称为基本事件，或称为样本点，记为 ω. 随机事件 E 的全体样本点组成的集合称为试验 E 的样本空间，记为 Ω. 随机事件是指样本空间中样本点的某个集合，简称事件一般记为 A，或 B，C，等等.

所谓事件 A 发生，是指在一次试验中，当且仅当 A 中包含的某个样本点出现. 在每次试验中一定发生的事件称为必然事件. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，每次试验它必然发生，它就是一个必然事件. 必然事件用 Ω 表示，它是样本空间 Ω 的一个子集. 在每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$. 它是样本空间的一个空子集.

3. 事件的互不相容(互斥)、对立事件

若$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B是互不相容的，或称A与B是互斥的. A与B互不相容，是指事件A与事件B不能同时发生. 例如，基本事件是两两互不相容的.

若$A\cap B=\varnothing$，且$A\cup B=\Omega$，则称事件A与事件B互为对立事件，或称A与B互为逆事件. A与B对立，是指事件A与事件B既不能同时发生又不能同时不发生，即在每次试验中，A与B有且仅有一个发生. 若A与B互为逆事件，则称B为A的对立事件. A的对立事件记为$\overline{A}$，显然$\overline{A}=\Omega-A$.

4. 概率的统计定义

在n次重复试验中，若事件A发生了m次，则称$\dfrac{m}{n}$为事件A发生的频率. 在相同的条件下，重复进行n次试验，事件A发生的频率稳定地在某一常数p附近摆动，且一般地，n越大，摆动幅度越小，则称常数p为事件A发生的概率，记为$P(A)$.

5. 概率的古典定义

若某试验E满足

(1)有限性：样本空间$S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$；

(2)等可能性：$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$.

若事件A包含了m个基本事件，则事件A发生的概率可用$P(A)=\dfrac{m}{n}$来表示，这里e_1，e_2，$\cdots$，e_n是一完备事件组.

6. 概率的性质

若对随机试验E对应的样本空间Ω中的每一事件，均赋予一实数$P(A)$，若函数$P(A)$满足：

(1)非负性：对每一事件A，$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：设A_1，A_2，$\cdots$，且两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

是一列两两互不相容的事件，即

$$A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j),\ i,j=1,2,\cdots$$

则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称$P(A)$为事件A的概率.

(4)有限可加性：设A_1，A_2，$\cdots$，A_n是n个两两互不相容的事件，即

$$A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j),\ i,j=1,2,\cdots,n$$

则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

(5)单调不减性：若事件 $A \subset B$，则

$$P(A) \leqslant P(B)$$

(6)若事件：设 A、B 是两个事件，则

$$P(A-B) = P(A) - P(AB)$$

特别地，若 $B \subset A$ 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

(7)加法公式：对任意两事件 A、B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

该公式可推广到任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的情形：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$1 \leqslant i < j \leqslant n,\ 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$$

(8)互补性：

$$P(\overline{A}) = A - P(A)$$

(9)可分性：对任意两事件 A，B，有

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

7. 条件概率的定义、性质

设 A、B 为两个事件，且 $P(B)>0$，则称 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率，记为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

根据条件概率定义，不难验证它具有下列三个性质，即

(1) $P(A|B) \geqslant 0$;

(2) $P(\Omega|B) = 1$;

(3)若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_i$ 是两两互不相容的，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

8. 概率的乘法公式

设 A、B 为两个事件，若 $P(A)>0$，则由条件概率定义，得

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

一般地，设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

9. 全概率公式

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots$ 为 Ω 的一个完备事件组，设 A 为样本空间 Ω 的事件，且 $P(B_i)>0(i=1, 2, \cdots)$，则

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots$$

10. 贝叶斯(Bayes)公式

设 A 为样本空间 Ω 的事件，B_1, B_2, …为 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A)>0$, $P(B_i)>0$, 则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A|B_i)} \quad i=1,2,\cdots$$

11. 独立性

若事件 A、B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A, B 是相互独立的.

对于 3 个事件 A, B, C, 若下面 4 个等式同时成立：

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 相互独立，若仅前三式成立则称 A, B, C 两两独立.

注意两两独立推不出相互独立.

12. 独立试验序列模型

设随机试验满足

(1)在相同条件下进行 n 次重复试验；

(2)每次试验只有两种可能结果，A 发生或 A 不发生；

(3)在每次试验中，A 发生的概率均一样，即 $P(A)=p$;

(4)各次试验是相互独立的，则称这种试验为贝努里(Bernoulli)概型，或称为 n 重贝努里试验.

在 n 重贝努里试验中，人们感兴趣的是事件 A 发生的次数，若用 $P_n(k)$ 或 $b(n, p, k)$ 表示 n 重贝努里试验中 A 出现 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率，由于

$$P(A)=p, \ P(\overline{A})=1-p=q$$

则有

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \ k=0, 1, 2, \cdots, n$$

1.1.3 学习提示

(1)关于概率的定义，主要有统计定义、古典定义、公理化定义等.

(2)利用古典概型的计算公式时要注意满足有限性和等可能性两个条件.

(3)遇到求“至少”或“至多”等事件的概率问题，从正面考察事件，往往是诸多事件的和或积，求解繁琐，可以考虑“至少”“至多”事件的对立事件，简单、概率易求.

条件概率的计算方法有两种，一是限制样本空间，例如求 $P(B|A)$，事件 A 已经发生，因此样本空间不属于 A 的点就可排除，样本空间可缩减为 $S'=A$，在 A 中计算事件 B 的概率.

二是直接应用定义，例如计算 $P(B|A)$，我们可先计算 $P(AB)$，$P(A)$，再利用条件概率的定义来计算.

不要把事件的条件概率与积事件概念混淆.

(5) 全概率公式是把较复杂的事件概率计算分解为较简单的事件概率计算，而 Bayes 公式往往用于从结果分析原因时的概率计算，帮助追查事件起因. 使用时注意样本空间划分，必须是完备事件组.

(6) 二项概率公式用于计算在 n 重 Bernoulli 试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率，是一个应用广泛的公式. 注意“恰好出现 k 次”“至多出现 k 次”“至少出现 k 次”的区别.

(7) 对于事件的独立性，往往不根据定义，而是根据实际背景判定. 注意事件的“相互独立”与“互不相容”的区别. 一般两事件独立与两事件互不相容是没有关系的.

(8) 小概率事件应从两个方面认识. 一方面，小概率事件 A 在一次试验中几乎是不发生；另一方面，在不断地独立重复试验中，小概率事件 A 迟早会发生的概率为 1. 忽视任何一方面都要犯错误. 例如，一个人在山林里乱扔烟头，他认为扔一个烟头引起火灾(一个小概率事件)几乎是不可能发生的，的确是这样；但他忽略了另一面，如果很多人都乱扔烟头(不断独立重复试验)，则火灾(小概率事件)迟早会发生的概率为 1(即火灾几乎一定会发生).

1.2　典型例题

例 1　设一个试验有 10 种可能的结果，记该试验的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，事件 A，B，C 分别是 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$. 求下列事件：(1) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$；(2) $\overline{A(\overline{BC})}$.

解　由德 · 摩根律

(1) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\overline{A\cup B}}=A\cup B=\{2,3,4,5\}$.

(2) $\overline{A(\overline{BC})}=\overline{A}\cup\overline{\overline{BC}}=\overline{A}\cup BC=\{1,5,6,7,8,9,10\}\cup\{5\}=\{1,5,6,7,8,9,10\}$.

例 2　设两两相互独立的事件 A、B 和 C 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$，求 $P(A)$.

解
$$\begin{aligned}\frac{9}{16}&=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=3P(A)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)=3P(A)-3(P(A))^2\end{aligned}$$

即 $(P(A))^2-P(A)+\dfrac{3}{16}=0$，亦即 $\left(P(A)-\dfrac{3}{4}\right)\left(P(A)-\dfrac{1}{4}\right)=0$，由于 $P(A)<\dfrac{1}{2}$，得 $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

例 3　设随机事件 A 与 B 为互不相容事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列结论中一定成立的有(　　).

A. A，B 为对立事件　　　　B. $\overline{A}$，$\overline{B}$ 为对立事件

C. A，B 不独立　　　　D. A，B 相互独立

分析： A 与 B 互不相容，只说明 $AB=\varnothing$，但并不一定满足 $A\cup B=\Omega$，则 A 与 B 不一定是对立事件，当然 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也不一定是对立事件，又由于 $AB=\varnothing$，有 $P(AB)=0$，但 $P(A)P(B)$

>0，即 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，所以 A 与 B 不独立，故选 C.

例 4 设随机事件 A，B 同时发生的概率和同时不发生的概率相等，且 $P(A)=a$，求 $P(B)$.

解 根据题意 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$，从而 $P(A)+P(B)=1$，即 $P(B)=1-a$.

例 5 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

解 $P(B|A\cup\overline{B})=\dfrac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\dfrac{0.7-0.5}{0.7+0.6-0.5}=\dfrac{1}{4}$

例 6 已知 $P(A)=P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.5$，试计算概率 $P(A|B)$；$P(A-B)$；$P(A|\overline{B})$.

解 由加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=2\times0.4-0.5=0.3$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.3=0.1$$

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A-B)}{1-P(B)}=\frac{0.1}{0.6}=\frac{0.1}{0.6}=0.17$$

注：这里 $P(A|\overline{B})\neq1-P(A|B)$.

例 7 一射手向一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为$\dfrac{80}{81}$，求该射手的命中率.

解 设该射手的命率为 P，X 表示四次射击命中的次数，则

$$\frac{80}{81}=P\{X\geqslant1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-P)^4$$

$$(1-P)^4=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$$

解得 $P=\dfrac{2}{3}$.

例 8 设 A，B 是两个随机事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1. 证明：$P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

证法一：由事件 A 的概率不等于 0 和 1，知题中两个条件概率都存在.

充分性. 由事件 A 与 B 独立，知事件 $\overline{A}$ 与 B 独立，因此

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

类似地，$P(B|\overline{A})=P(B)$，即 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$.

必要性. 由 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB),\ P(AB)=P(A)P(B)$$

因此 A 与 B 独立.

证法二： 由事件 A 的概率不等于0和1，知题中两个条件概率都存在.

$$P(B|A)=P(B|\bar{A})\Leftrightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}\Leftrightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$\Leftrightarrow P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow A$ 与 B 独立.

例9　甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.6和0.5，现已知目标被命中，它是甲射中的概率为是多少？

解　求 A =“甲射击一次命中目标”，B =“乙射击一次命中目标”，则要求的概率为

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times0.5}=\frac{6}{8}=0.75$$

例10　一年级共有学生100名，其中男生60人，女生40人，来自北京的有20人，其中男生12人，若任选一人发现是女生，问该女生是来自北京的概率是多少？

解　设 A =“任选一人是女生”，B =“该生来自北京”. 显然北京的学生中有女生8名，这是条件概率问题，即求 $P(B|A)$. 由于 $P(A)=\frac{40}{100}$，$P(AB)=\frac{8}{100}$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ $=\frac{1}{5}$.

例11　某人有5把钥匙，其中有一把能打开房门，因为忘记哪一把是房门钥匙，逐一去试开，求(1)恰好第3次打开门的概率；(2)前三把能打开房门的概率.

解　设 A_i =“恰好第 i 次打开房门”$(i=1,2,3,4)$

(1) $P(A_1)=\frac{1}{5}$；由于 $A_2=\bar{A}_1A_2$ 且 A_1 与 A_2 相互独立，故

$$P(A_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

(2) 设 B =“前三次打开房门”，由于 A_1，A_2，A_3 互不相容，故

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{3}{5}$$

例12　假设有两箱同种零件，第一箱内装50件，其中10件一等品；第二箱内装30件，其中18件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机地取出两个零件(取出的零件均不放回)，试问

(1)先取出的零件是一等品的概率；

(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率.

解　设 B_j =“第 j 次取出的零件是一等品，$(j=1,2)$，A_i =“被挑出的是第 i 箱”$(i=1,2)$，依题意

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2},\ P(B_1|A_1)=\frac{1}{5},\ P(B_1|A_2)=\frac{3}{5}$$

(1)由所设知所求的概率为 $P(B_i)$，根据全概率公式，知

$$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

(2)由所设知所求的概率为 $P(B_2|B_1)$，由条件概率定义和全概率公式，如

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1B_2|A_1)+P(A_2)P(B_1B_2|A_2)}{P(B_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{10\times9}{50\times49}+\frac{18\times17}{30\times29}\right)}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)\approx0.4856$$

思考题

(1)谈谈古典概型应用的广泛性及分类，这些概率模型可以解决哪些问题. 如解决 n 个人中至少2个人生日相同的问题($n=10$, 17, 23, 50).

(2)用贝努里概型解决银行服务窗口问题:

例如：某居民区有 n 个人，设有一个银行，开 m 个窗口，每个窗口都办理业务，假定在每一指定时刻，这 n 个人是否去银行是独立的，每人去银行的概率都是 p，现要求“在营业中任一时刻每个窗口的排队人数(包括正在被服务的那个人)不超过 s”这个事件的概率不小于 a(一般取 $a=0.80$, 0.90 或 0.95)，则银行至少开设多少个服务窗口合理?

此模型还可以解决哪些现实问题并举例说明. 如碰运气能否通过英语四级考试?

(3)如何理解条件概率，它与无条件概率有何区别? 举例说明条件概率(在保险、财务管理、会计、生物、食品等方面)的应用.

(4)阐述全概率公式，贝叶斯公式，就其应用举例说明(不少于2例).

(5)了解小概率事件，通过实例谈谈对小概率事件的认识及小概率原理在生活中的应用.

(6)基于概率本质的一些思考，谈谈概率与直觉的关系，阐述概率的重要性、魅力及对生活的指导.

1.3　能力训练习题

一、选择题

1. 若事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则(　　).

A. A 和 B 不相容　　　　B. AB 是不可能事件

C. $AB=\varnothing$未必成立　　　　D. $P(A)>0$ 或 $P(B)>0$

2. 设当事件 A 与 B 同时发生，事件 C 也发生，则(　　).

A. $P(C)=P(AB)$　　　　B. $P(C)=P(A\cup B)$

C. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　　　D. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

3. 设事件 A, B 相互独立，则 $P(A\cup B)=$(　　).

A. $P(A)+P(B)$　　　　B. $P(\bar{A})+P(\bar{B})$

C. $1-P(\bar{A})P(\bar{B})$　　　　D. $1-P(A)P(B)$

4. 设 A 和 B 为任意两个事件，且 $A\subset B$, $P(B)>0$，则下列选项中必然成立的是(　　).

A. $P(A)<P(A|B)$　　　　B. $P(A)\leqslant P(A|B)$

C. $P(A)>P(A|B)$　　　　D. $P(A)\geqslant P(A|B)$

5. 进行一系列独立的试验，每次试验成功的概率为 P，则在成功 2 次之前已经失败了 3 次的概率为(　　).

A. $4P^2(1-P)^3$　　B. $4P(1-P)^3$

C. $10P^2(1-P)^3$　　D. $P^2(1-P)^3$

6. 每次试验成功率为 P，$(0<P<1)$，进行重复试验，直到第 10 次试验才取得 4 次成功的概率为(　　).

A. $C_{10}^4P^4(1-P)^6$　　B. $C_9^3P^4(1-P)^6$

C. $C_9^4P^4(1-P)^5$　　D. $C_9^3P^3(1-P)^6$

7. 若 $P(B|A)=1$，则下列命题中正确的是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $B\subset A$

C. $A-B=\varnothing$　　D. $P(A-B)=0$

8. 设一次试验中事件 A 发生的概率为 p，现重复进行 n 次独立试验，则事件 A 至少发生一次的概率为(　　).

A. $1-p^n$　　B. p^n

C. $1-(1-p)^n$　　D. $(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$

9. 随机事件 A 与 $\overline{B}$ 相互独立，则下面结论成立的是(　　).

A. $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$　　B. $(1-P(B))P(\overline{A})=P(\overline{B}\cap\overline{A})$

C. $P(\overline{A})P(B)\neq P(B)P(\overline{A})$　　D. $P(\overline{A\cup B})=(1-P(B))(1-P(\overline{A}))$

10. 对于任意两个事件 A、B，(　　).

A. 若 $AB=\varnothing$，则 A 与 B 一定独立　　B. 若 $AB\neq\varnothing$，则 A 与 B 可能独立

C. 若 $AB\neq\varnothing$，则 A 与 B 一定独立　　D. 若 $AB=\varnothing$，则 A 与 B 一定不独立

11. 设 A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则某对立事件 $\overline{A}$ 表示(　　).

A. 甲种产品滞销，乙种产品畅销　　B. 甲种产品畅销，乙种产品畅销

C. 甲种产品滞销，乙种产品滞销　　D. 甲种产品滞销或乙种产品畅销

12. 设 A、B 为对立事件，$0<P(B)<1$，则下列概率值为 1 的是(　　).

A. $P(\overline{A}|\overline{B})$　　B. $P(B|A)$

C. $P(\overline{A}|B)$　　D. $P(AB)$

13. 设 $AB=\varnothing$，则有(　　).

A. $P(A)=1-P(B)$　　B. $P(A|B)=0$

C. $P(A|\overline{B})=1$　　D. $P(\overline{AB})=0$

14. 设事件 A，B 为互不相容事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列结论一定成立的有(　　).

A. A，B 为对立事件　　B. $\overline{A}$，$\overline{B}$ 互不相容

C. A，B 不独立　　D. A，B 相互独立

15. 某射手向同一目标独立的射击 5 枪，若每次击中靶的概率为 0.6，则恰有两枪脱靶的概率是(　　).

A. $0.6^2\times0.4^3$　　B. $0.6^3\times0.4^2$

C. $C_5^2 0.6^2\times0.4^3$　　D. $C_5^2 0.6^3\times0.4^2$

16. 设 A，B 满足 $P(B|A)=1$，则(　　).

A. A 是必然事件　　B. $P(B|\overline{A})=0$

C. $A\supset B$　　D. $P(A)\leqslant P(B)$

17. A, B, C 是任意事件，在下列各式中，不成立的是(　　).

A. $(A-B)\cup B=A\cup B$　　B. $(A\cup B)-A=B$

C. $(A\cup B)-AB=A\overline{B}\cup\overline{A}B$　　D. $(A\cup B)\overline{C}=(A-C)\cup(B-C)$

18. 设事件 A 和 B 的概率为 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, 则 $P(AB)$可能为(　　).

A. 0　　B. 1

C. 0.6　　D. 1/6

19. 设 A, B, C 为随机事件，则$\overline{A\cup BC}=$(　　).

A. $\overline{A}\,\overline{B}C$　　B. $\overline{A}B\cup C$

C. $(\overline{A}\cup\overline{B})C$　　D. $(\overline{A}\cup\overline{B})\cup C$

二、填空题

1. 设 A, B 是两个随机事件，已知 $A\cup B=A$, 则 A 与 B 应满足的关系是__________；若 $AB=A$, 则 A 与 B 应满足的关系是__________.

2. 从0, 1, 2, …, 9 这十个数字任意选出三个不同的数字，设 A 为“含 1 但不含 9”的事件，则事件 A 的概率 $P(A)=$__________.

3. 设 A, B 为随机事件，$P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(\overline{AB})=$__________.

4. 设对于事件 A, B, C, 有 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\frac{1}{8}$, 则 A, B, C 三个事件中至少出现一个的概率为__________.

5. 设随机事件 A, B 相互独立，且 A, B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$__________.

6. 某射手在三次射击中至少命中一次的概率为 0.875, 则这射手在一次射击中命中率为__________.

7. 有两只口袋，甲袋中装有 3 只白球，2 只黑球；乙袋中装有 2 只白球，5 只黑球，现任选一袋，并从中任取一球，则此球为白球的概率为__________.

8. 设 A, B 是两个随机事件，$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, 则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$__________.

9. 甲、乙两人独立的对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为__________.

10. 设随机事件 A, B 及 $A\cup B$ 事件的概率分别为 0.5, 0.3 和 0.7, 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，则 $P(A|\overline{B})=$__________.

11. 一年级共有学生 100 名，其中男生 52 人，女生 48 人，来自北京的有 20 人，其中男生 12 人，若任选一人发现是女生，该女生是来自北京的概率是__________.

12. 三人独立地翻译一份密码，已知各人能译出的概率分别为$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，问三个中至少有一个能将此密码译出的概率是__________.

13. 设随机事件 A，B 及 $A\cup B$ 事件的概率分别为 0.4，0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，则 $P(\overline{A}B)=$__________.

14. 已知 $P(\overline{B})=0.2$，$P(\overline{A}B)=0.6$，则 $P(A|B)=$__________.

15. 设随机事件 A，B 及事件 $A\cup B$ 的概率分别为 0.5，0.4 和 0.7，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，则 $P(\overline{B}|A)=$__________.

16. $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$__________.

三、计算题

1. 设 A，B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B|\overline{A})=0.4$，求(1)$P(\overline{A}B)$；(2)$P(AB)$；(3)$P(A\cup B)$.

2. 袋中有 1，2，…，N 号球各一只，采用(1)无放回；(2)有放回两种方式摸球，试求在第 k 次摸球时首次摸到 1 号球的概率.

3. 已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.1$，求

(1)$P(A-B)$；(2)$P(A\cup B)$；(3)$P(\overline{A};\overline{B})$；(4)$P(A\overline{B})$.

4. 瓶中装有 50 片药，其中有 3 片次品，今自瓶中任取 5 片，求所取 5 片中有 2 片次品的概率.

5. 已知 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.2$，求 $P(A|\overline{A}\cup B)$.

6. 设有甲、乙两袋，甲袋中装有 n 只白球，m 只红球；乙袋中装有 N 只白球，M 只红球，今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球，问取到白球的概率是多少.

7. 已知随机变量 $X\sim P(1)$，即 X 有概率分布律 $P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，并记事件 $A=\{X\geqslant 2\}$，$B=\{X<1\}$. 求：(1)$P(A\cup B)$；(2)$P(A-B)$；(3)$P(B|\overline{A})$.

8. 设有 4 张卡片分别标以数字 1，2，3，4. 今任取两张，设事件 A 为取到 1 和 2，事件 B 为取到 1 和 3. 试问：

(1)A 与 B 是否相不相容，为什么？

(2)A 与 B 是否互为对立事件，为什么？

(3)A 与 B 是否相互独立，为什么？

9. 为了防止意外，在矿内同时设两种报警系统 A 与 B，每种系统单独使用时，其有效的概率系统 A 为 0.92，系统 B 为 0.93，在 A 失灵的条件下，B 有效的概率为 0.85，求：

(1)发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；

(2)B 失灵的条件下，A 有效的概率.

10. 由长期统计资料得知，某一地区在 4 月份下雨(记作事件 A)的概率为$\frac{4}{15}$，刮风(用 B 表示)的概率为$\frac{7}{15}$，既刮风又下雨的概率为$\frac{1}{10}$，求 $P(A|B)$；$P(B|A)$；$P(A\cup B)$.