

增补

《详解九章算法》释注

【宋】杨辉◎原著
吕变庭◎释注



科学出版社

增补
《详解九章算法》
释注

【宋】杨 辉◎原著
吕变庭◎释注

科学出版社

北 京

图书在版编目 (CIP) 数据

增补《详解九章算法》释注/(宋)杨辉原著;吕变庭释注.—北京:科学出版社,2014

ISBN 978-7-03-042255-2

I. ①增… II. ①杨…②吕… III. ①数学—中国—古代 ②《九章算术》—研究 IV. ①O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 245601 号

责任编辑:郭勇斌 樊 飞 卜 新 / 责任校对:胡小洁

责任印制:赵德静 / 封面设计:铭轩堂

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 12 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2014 年 12 月第一次印刷 印张:16 1/4

字数:300 000

定价:79.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

—

杨辉,约生活在南宋末,具体生卒年不可考,钱塘(今杭州市)人,是当时著名的数学教育家。他一生著述颇丰,而成书于景定辛酉年(1261)的《详解九章算法》是其早年研习《九章算术》的心得,在中国古代数学发展历史上占有重要地位。

可惜,此著作没有被完整地保留下来。这是造成人们对《详解九章算法》本身的内容以及逻辑结构形成不同认识甚至分歧的根本原因。

关于《详解九章算法》的目录,杨辉在《详解九章算法·纂类》里已有详尽说明,然《宜稼堂丛书》本因系从《永乐大典》“算”字条中辑出,故辑出者按照北宋元丰刊本《九章算术》的章目将其分门归类,并没有按照杨辉原著的体例编排,这就造成了解读上的不便。

我们知道,《详解九章算法》的蓝本系北宋贾宪著《黄帝九章算法细草》,因此,《详解九章算法》的章目与《黄帝九章算法细草》的章目应当是一致的。这样,通过还原《详解九章算法》的本来面貌就可以间接窥知《黄帝九章算法细草》的思想内容,而笔者增补《详解九章算法》主要用意亦在于此。

故为了还原《详解九章算法》的本来面貌,此次释注特依据杨辉《详解九章算法·纂类》所列章目进行重新编排。

杨辉对原本《九章算术》和《详解九章算法》的章目做过如下比较。他说:

“古本二百四十六问:方田三十八问(并乘除问),粟米四十六问(乘除六问,互换三十一,分率九问),衰分二十问(互换十一,衰分九问),少广二十四问(合率十一,勾股十三),商功二十八问(叠积二十七,勾股一问),均输二十八问(互换十一,合率八问,均输九问),盈不足二十问(互换三问,分率四问,合率一问,盈朒十一,方程一问),方程一十八问(并本草问),勾股二十四问(并本草问)。”^①

以上是北宋元丰刊本《九章算术》的章目,下面则是杨辉重新编排后的章目:

“乘除四十一问(方田三十八,粟米三问),除率九问(粟米五问,盈不足四),合率二十问(少广章十一,均输章八问,盈不足一问),互换六十三问(粟米三十八,衰分十一,均输十一,盈朒三问),衰分一十八问(本章九问,均输九问),叠积二十七问(并商功章),盈不足十一问(并本章),方程一十九问(盈朒一问,本章一十八问),勾股三十八问(少广十

^① 杨辉:《详解九章算法·纂类》,载郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(以下简称通汇本),郑州:河南教育出版社,1995:1004-1005.

三,商功一问,本章二十四)。题兼二法者十二问:衰分,方程(九节竹),互换,盈朒(故问粃米、持钱之属,油自和漆),合率,盈朒(瓜瓠求逢),分率,盈朒(玉石隐互,二酒求价,金银易重,善恶求田),方程,盈朒(二器求容,牛羊直金),勾股,合率(勾中容方)。”^①

从《九章算术》的演变看,其篇目前后变化较大,孙文青先生对此有专论,请参见《九章算术篇目考》(载1932年《师大月刊》第3期)。

经孙文青考证,《九章算术》有两个基本来源:一是汉代马续以前的篇目,计有方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢(盈)不足、旁要、今有、重差、夕桀及勾股,共13目;二是马续以后的篇目,计有方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程及勾股,共9目。^②值得注意的是,杨辉《详解九章算法》所据为北宋贾宪《黄帝九章算法细草》本,与秦九韶《数书九章》所据《九章算术》之篇目略有不同,分别为方田、粟米、少广、商功、均输、盈朒、方程、句股、重差、夕桀,共10目。至于秦九韶所据何本,不得而知,但它的出现表明在南宋晚期尚有多种《九章算术》版本流行。

究其《详解九章算法》的体例和内容,实际上,杨辉在“自序”中说得已经十分明确。他说《详解九章算法》:

“择八十题以为矜式,自余一百六十六问,无出前意,不敢废先贤之文。删留题次,习者可以闻一知十。恐问隐而添题解,见法隐而续释注,刊大小字以明法草,僭比类题以通俗务。凡题法解白不明者,别图而验之,编乘除诸术以便入门。纂法问类次见之章末,总十有二卷。虽不足补前贤之万一,恐亦可备故来之观览云尔。”^③

据此可知,《详解九章算法》共12卷,计“图验卷第一”,“乘除卷第二”(包括方田三十八问和粟米三问),“除率卷第三”(包括粟米五问和盈不足四问),“合率卷第四”(包括少广章十一问、均输章八问及盈不足一问),“互换卷第五”(包括粟米三十八问、衰分十一问、均输十一问及盈朒三问),“衰分卷第六”(包括原衰分九问和均输九问),“垒积卷第七”(原商功章),“盈不足卷第八”(原盈不足章),“方程卷第九”(包括原方程一十八问和盈朒一问),“勾股卷第十”(包括少广十三问、商功一问及原勾股章二十四问),“题兼二法者卷第十一”(如“九节竹”、“故问粃米”等),“详解九章算法·纂类”。因此,与《九章算术》的篇章相比,《详解九章算法》颇多创新。

按照自己的方式来理解传统和诠释传统,是两宋文化人的共同特点,所以宋人的所谓传统往往被打上了鲜明的个性特征。杨辉《详解九章算法》在清朝有“石研斋抄本”和“宜稼堂丛书”本流传,均非完整本。为了尽量还原其原貌,杨辉《详解九章算法·纂类》是重要的依据和参考。

① 杨辉:《详解九章算法·纂类》,通汇本:1005.

② 孙文青:《九章算术篇目考》,《师大月刊》,1932,(3):70-71.(略有改动)

③ 杨辉:《详解九章算法·自序》,通汇本:951.

二

理清杨辉《详解九章算法》的逻辑脉络并不容易。这是因为：

第一，如何认识两个《详解》本之间的关系。一般史家认为，《详解九章算法》有两个传抄本：一是《详解九章算法》12卷，二是《详解算法》若干卷。^①如《永乐大典》引录的杨辉著作共计五种：《详解算法》、《详解九章算法》、《摘奇算法》、《日用算法》和《纂类》。然目前的传本，却仅见《详解九章算法》，而不见《详解算法》。那么，《详解算法》究竟是一部怎样性质的算书呢？由于此书已佚，今人已无法窥知全貌，故笔者只能从《永乐大典》的片段中略作“只见树木”一类的局部阐释，姑且论之，未必确当。

李俨在《中国数学大纲》(上册)中曾说：

“(杨辉)景定辛酉(公元1261年)作《详解九章算法》，后附《纂类》，总十二卷。今所传者，非全帙。又《详解算法》若干卷，尽乘除，九归，飞归之蕴。”^②

此为一种意见。与之相对，还有另一种观点。例如，郭书春先生在《详解九章算法提要》中认为，杨辉的著作有《详解九章算法》及《杨辉算法》(包括《日用算法》、《乘除通变本末》、《续古摘奇算法》)^③，没有《详解算法》。很显然，郭书春将《详解九章算法》与《详解算法》视为同一种书。而近人严敦杰则直接把《详解算法》改成《详解[九章]算法》。^④其实，杨辉在《习算纲目》里对《详解算法》的内容做了非常清晰的解释。杨辉说：

“《详解算法》第一卷，有乘除立问一十三题，专说乘除用体。玩味注字，自然开晓。”

“学九归，若记四十四句念法，非五七日不熟。今但于《详解算法》九归题‘术’中，细看注文，便知用意之隙，而念法用法，一日可记也。”

“穿除，又名飞归，不过就本位商数除数而已。《详解》有文，一见而晓，加减至穿除，皆小法也。”

“《九章》二百四十六问，固是不出乘除开方之术。”^⑤

按照杨辉重新分类编排之后的《详解九章算法》，第1卷确实是“乘除”，对此，《详解九章算法·纂类》讲得很仔细。是谓《详解九章算法》与《详解算法》本系一书的证据之一。另外，从《详解算法》的体例结构看，与《详解九章算法》如出一辙。譬如，《永乐大典》卷16343录有《详解算法》多题，内容均分“题问”、“解题”、“草”，只是省略了《九章算术》中的“术”文，这可能与《详解算法》作为一部算术教材的性质有关。其中

① 郭熙汉：《杨辉算法导读》，武汉：湖北教育出版社，1997：3。

② 李俨：《中国数学大纲》上册，北京：商务印书馆，1932：157。

③ 郭书春：《详解九章算法提要》，通汇本：946。

④ 参见吴文俊主编：《中国数学史大系》第5卷《两宋》，北京：北京师范大学出版社，2000：554。

⑤ 杨辉：《算法通变本末》卷上《习算纲目》，通汇本：1048-1049。

有一道“粟米换易”题为：

“钱一十八贯七百元九十八陌，欲展七十七陌官省，问得几何？”

答曰：二十三贯八百元。

解题：粟米换易之问，盖钱陌求钱陌所以不深于法也。

草曰：九十八陌乘总钱，此要者乘以九十八陌，乘一十八贯七百元，得十八贯三百二十六文足。以官省七十七除之。十上定百，得所答数。

又草曰：《指南》用加四减一，以代乘除。一贯一百文，九十八陌，可展七十七陌。钱一贯四百，故用加四减一之法。置总钱，一十八贯七百元，加四，得二十六贯一百八十文，减一，所得答问。”

与此相同的体例也见于《详解九章算法》，如：

“股十五尺，弦十七尺，问：为勾几何？”

解题：长袤问阔。

草曰：股自乘，减弦自乘，余六十四尺，开方得勾，合问。”^①

视《详解九章算法》与《详解算法》为一书的第三个证据是“开方作法本源”，既见于《详解九章算法》，同时又见于《详解算法》，且两者的内容完全相同。因此，《详解算法》与《详解九章算法》的区别仅仅是由于教学的实际需要，杨辉将自己编写的例题和贾宪新出的研究内容单独抽取出来，故名《详解算法》，实则仍然属于《详解九章算法》的组成部分。

第二，杨辉《详解九章算法·纂类》，对于《详解九章算法》的编排体例，出现了两种不同方式：一种方式如前所述；另一种方式即《纂类》本身所采用的方式，共分乘除、互换、合率、分率、衰分、垒积、盈不足、方程及勾股 9 类。然而，后一种方式显然与杨辉在《详解九章算法》序言中所说“总十有二卷”不一致。于是，严敦杰提出了杨辉《详解九章算法》原著 12 卷的复原应为：

“卷首，全书插图。据《乘除通变算宝》卷上说：‘《九章》二百四十六问……列于卷首。’又据《永乐大典》存本书残章少广云：‘立草在《九章》卷首布置图内。’

卷一，对基本运算的说明。《乘除通变算宝》卷上：‘《详解九章算法》第一卷有乘除，立问一十三题，专说乘除。’可以证明。

卷二，方田。全卷无存。

卷三，粟米。今《永乐大典》卷 16343 算法十四尚可辑出 3 题，余无存。

卷四，衰分。在《永乐大典》卷 16343 算法十四中尚可辑出 1 题，余全佚。

卷五，少广。在《永乐大典》卷 16343 算法十五中尚可辑出整卷，杨辉还补了开四次方 1 题。贾宪增乘方法都在此卷。又《田亩比类乘除捷法》卷下也说：‘开方带从段数草图活法，详载《九章》少广。’

^① 杨辉：《详解九章算法》，通汇本：974.

卷六,商功。仅存 13 题,缺 15 题。

卷七,均输。存 19 题,缺 1 题。

卷八,盈不足。整卷全。

卷九,方程。存 16 题,缺 4 题。

卷十,勾股。整卷全。

卷末,纂类。整卷全。”^①

这种编排不能说没有道理,但宋人喜欢标新立异,杨辉亦不例外。所以他在《详解九章算法·纂类》序录中坦言:“类题,以物理分章,有题法又互之讹。今将二百四十六问,分别门例,使后学亦可周知也。”^②不独杨辉对“九章”的编排不同于古本“九章”,秦九韶《数书九章》对“九章”的编排也独树一帜,另辟蹊径。例如,秦九韶的“九章”分别是:“大衍第一”、“天道第二”、“田域第三”、“测望第四”、“赋役第五”、“钱谷第六”、“营建第七”、“军旅第八”、“市易第九”。与古本“九章”差异十分显著。有鉴于此,笔者综合各种因素,认为还是以杨辉自己所述为准,有必要重新建构《详解九章算法》的编写体例。当然,这仅仅是一次探索和尝试。

三

比较古本《九章算术》与《详解九章算法》的特点,我们可以得出下面两点认识:

第一,《九章算术》的术文并不整齐划一,有的题目多且内容比较复杂,有的较为浅显,有的则多题无术文,方法非常灵活,似无死板之规。反观残本《详解九章算法》,其编写结构亦不一定。例如,有的题分六个层次:“问答”、“术”、“解题”、“比类”、“草”、“法”(系新添的术文)。有的题分五个层次:“问答”、“术”、“解题”、“比类”、“草”。还有的题分四个层次:“问答”、“术”、“解题”、“草”;有的题分三个层次:“问答”、“术”、“草”……“比类”题的内容亦相差较多。例如,有的题分四个层次:“问答”、“解题”、“法”、“草”。有的题分三个层次:“问答”、“术”、“草”。有的题分两个层次:“问答”、“草”或“问答”、“术”。有的题,仅仅列一个“问答”。这种看似混乱的编排体例,实则体现了宋人的一种学术意识,不拘一格,不为成规所束缚。所以,我们在还原《详解九章算法》的本来面貌时,尽量遵守杨辉的逻辑思想,将其所阙部分,依古本《九章算术》的内容,分别补入,包括问答和术文。

第二,《详解九章算法》至少包括贾宪的《黄帝九章算经细草》和杨辉的《详解算法》。关于《黄帝九章算经细草》一书的主要内容和特色,郭书春认为:“它以魏刘徽注、唐李淳风等注释的《九章算术》为底本,在有关的术、题后别立法(术)、草,有时新

① 吴文俊主编:《中国数学史大系》第 5 卷《两宋》,北京:北京师范大学出版社,2000,554-555.

② 杨辉:《详解九章算法·纂类》,通汇本:1004.

设题目,取得了若干重大成就,使贾宪成为宋元数学的主要推动者之一。”^①杨辉的《详解算法》有不少古本《九章算术》里没有的算题,至于这些新的算题是杨辉之创造还是贾宪之所出,尚待考证。但无论怎样,这些超出《九章算术》范围的题目,如何融合到古本《九章算术》之中,是杨辉面临的新问题。贾宪的《黄帝九章算经细草》相对于古本《九章算术》是一种不落窠臼的再创造,同样,杨辉的《详解九章算法》相对于贾宪的《黄帝九章算经细草》,又是一种不落窠臼的再创造。其最突出的创新就是体例的重新结构。

我们知道,杨辉的《详解九章算法》是从《九章算术》的246道算题中精选80道编纂而成,其体例仍依《九章算术》,分九卷。可惜,《详解九章算法》原文阙失比较严重,因此,杨辉精选出来的80道算题,一一复原几乎已不可能。但为了客观反映杨辉与《九章算术》之间的学术继承关系,我们有必要依据《纂类》(现传本全)所载录的《九章算术》原题,并按照杨辉的编撰体例,尽力向读者完整地呈现其《详解九章算法》的历史面貌。

杨辉在《详解九章算法·自序》中说:

“择八十题以为矜式,自余一百六十六问,无出前意,不敢废先贤之文,删留题次,学者可以闻一知十。”

鲍澣之说:“虽有细草,类皆简捷残缺,懵于本原,无有刘徽、李淳风之旧注者,古人之意,不可复见。”

可见,《详解九章算法》是在保留《九章算术》原题次的前提下,重点对其中的80道算题做了创造性的阐释。故为了恢复《详解九章算法》的原貌,我们一方面以前揭杨辉本《九章算术》的体例为参照,对现传本《详解九章算法》的内容做了重新编排;另一方面需在“自余一百六十六问”,“题次”后面补上“刘徽、李淳风之旧注”。当然,关于杨辉重新结构后的《详解九章算法》,目前学界对其内容已经研究得非常深入,笔者不必弄斧班门。但为彰显杨辉的数学精神起见,笔者还是想在这里就杨辉的“解题”思想及其成就,特转引郭书春的论说如下,以作为本文的结语:

“杨辉的‘解题’包括名词和题目、术文的解释、应用。值得注意的是对贾宪新设开三乘方题目的解题是‘三度相乘,其状扁直’,形象地表示了四次方,开后来李善兰尖锥术以图形表示高次方之先河。”^②

吕变庭

2014年2月14日

^① 郭书春:《详解九章算法提要》,通汇本:944.

^② 郭书春:《详解九章算法提要》,通汇本:946.

刘徽《九章算术注》序

昔在包牺氏，始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术，以合六爻之变。暨于黄帝神而化之，引而申之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉。记称隶首作数，其详未之闻也。按周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黷，览之者思过半矣。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。《周官·大司徒》职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中。说云，南戴日下万五千里。夫云尔者，以术推之。按《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差、句股，则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之时。以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地为句、股，为之求弦，即日去人也。以径寸之筩南望日，日满筩空，则定筩之长短以为股率，以筩径为句率，日去人之数为大股，大股之句即日径也。虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美，辄造《重差》，并为注解，以究古人之意，缀于《句股》之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

荣 棨 序

夫算者，数也。数之所生，生于道。老子曰：“道生一”是也。数之所成，成于九。列子曰：“九者究”是也。爰昔黄帝，推天地之道，究万物之始，错综其数，列为九章，立术二百四十有六。始之以方田，终之以勾股，其为大用也。若施之于圭表，则穹窿之天可考，推日月之晦明，步五星之盈缩，验晨昏昼夜不移，行气候寒暑无忒。若施之于勾股，则磅礴之地可度，望山岳之高低，测江海之深浅，筹道里广远之积，方田畴形体之畧。若施之于诸术，则万物之情可察，经纬天地之间，笼络覆载之内，凡言数之见者，又焉得逃于此乎？变交质之息耗，衰贵贱之等差，均役输远近之劳，商功徒轻重之力，盈朒明隐互之形，方程正错综之失，至于物物不齐，囊囊无尽，该贯总摄，区分派别，广大纤微，莫不悉举，可谓包括三才，旁通万有之术也。是以国家尝设算科取士，选《九章》以为算经之首，盖犹儒者之六经，医家之《难》、《素》，兵法之《孙子》欤？后之学者，有倚其门墙，瞻其步趋，或得一二者，以能自成一书，显名于世矣。比尝较其数，譬若大海汲水，人力有尽，而海水无穷。又若盘之走圆，横斜万转，终其能出于盘哉？由是自古迄今，历数千余载，声教所被，舟车所及，凡善数学者，人人服膺而重之。奈何自靖康以来，罕有旧本，间有存者，狃于末习，不循本意，或隐问答以欺众，或添歌象以炫己，乖万世益人之心，为一时射利之具，以至真术淹废，伪本滋兴，学者泥于见闻，依然入于迷途，可胜计邪？居仁由义之士，每不平之。愚向获善本，不敢私藏，而今而后，圣人之法，暗而复明，仆而复起，学之者得睹其全经，悟之者必达微旨矣。不亦善乎？谨命工镂板，庶广其传，四方君子，得以鉴焉。时圣宋绍兴十八年戊辰岁八月旦丙戌日。寓临安府汴阳学算荣棨序。

鲍澣之序

《九章算经》九卷，周公之遗书，而汉丞相张苍之所删补者也。算数之书，凡数十家，独以《九章》为经之首。以其九数之法，无所不备，诸家立术，虽有变通，推其本意，皆自此出，而且知后人无以易周汉之旧也。自唐有国，用之于取士，本朝崇宁亦立于学官。故前世算数之学，相望有人。自衣冠南渡以来，此学既废，非独好之者寡，而《九章算经》亦几泯没无传矣。近世民间之本，题之曰《黄帝九章》，岂以其为隶首之所作欤？名已不当。虽有细草，类皆简捷残缺，懵于本原，无有刘徽、李淳风之旧注者，古人之意，不可复见，每为慨叹。庆元庚申之夏，余在都城，与太史局同知算造杨忠辅德之论历，因从其家得古本《九章》，乃汴都之故书，今秘馆所定著亦从此本，写以送官者也。谨案：《晋志》刘徽所注《九章》，实魏之景元四年。观其序文，以谓‘析理以辞，解体用图’，又造《重差》于《勾股》之下。辞乃今之注文，其图至唐犹在，今则亡矣。《重差》之法，今之《海岛算经》是也。又李淳风之注见于《唐志》，凡九卷，而今之盈不足、方程之篇，咸缺淳风注文。意者此书岁久传录，不无错漏，犹幸有此存者。今此乃是合刘、李二注，而为一书云。其年六月一日乙酉，迪功郎新兴隆府靖安县主簿括苍鲍澣之仲祺谨书。

杨辉《详解九章算法·自序》

夫习算者，以乘法为主，凡布置法者，欲其得宜；定位呼数，欲其不错。除不尽者，以法为分母，实为分子，繁者约之，复通分而还源，此乘除之规绳也。题有分者，随母通之；母不同者，齐子并之；田不匠者，折并直之；数皆求者，互乘换之；等差除实，别而衰之；垒垒积者，以形测之；数隐互者，维乘并之；(方程)为问，正负入之；勾股旁要，开方求之；节题匿积，演段取之；此算法之尽理也。《黄帝九章》备全奥妙，包括群情，谓非圣贤之书不可也。靖康以来古本浸失，后人补续，不得其真，致有题重法缺，使学者难入其门，好者不得其旨，辉虽慕此书，未能贯理，妄以浅也，聊为编述。择八十题以为矜式，自余一百六十六问，无出前意，不敢废先贤之文，删留题次，学者可以闻一知十。恐问隐而添题解，见法隐而续释注。刊大小字，以明法、草。僭比类题，以通俗务。凡题法解白不明者，别图而验之。编乘除诸术，以便入门。纂法问类次，见之章末。总十有二卷。虽不足补前贤之万一，恐亦可备故来之观览云尔。景定二年辛酉岁正月十七己卯日，钱塘杨辉谨序。

目 录

前言	i
刘徽《九章算术注》序	vii
荣棨序	ix
鲍澣之序	xi
杨辉《详解九章算法·自序》	xiii
图验卷第一	1
乘除卷第二	2
除率卷第三	16
合率卷第四	19
互换卷第五	32
衰分卷第六	49
叠积卷第七	68
盈不足卷第八	97
方程卷第九	112
勾股卷第十	138
题兼二法卷第十一	197
详解九章算法·纂类	217

图验卷第一

(已阙)

乘除卷第二

杨辉题录载此卷共 41 问：方田 38 问，粟米 3 问。但《详解九章算法·纂类》仅存《粟米》2 问，阙 1 问。包括直田法、里田方田法、圭田法、斜田法、圆田法、畹田法、弧田法、环田法、约分法、合分法、课分法、平分法、乘分法、除分法、经分法等 15 种算法。

1. 直田法

直田法曰：广、从相乘为实（或为积）如亩法而一。

(1) 广十五步，从十六步。问：为田几何？

答曰：一亩。^①

(2) 广十二步，从十四步。问：为田几何？

答曰：一百六十八步。^②

方田术曰：广从步数相乘得积步。此积谓田畹。凡广从相乘谓之畹。臣淳风等谨按：经云广从相乘得积步，注云广从相乘谓之畹。观斯注意，积畹义同。以理推之，固当不尔。何则？畹是方面单布之名，积乃众数聚居之称。循名责实，二者全殊。虽欲同之，窃恐不可。今以凡言畹者据广从之一方；其言积者举众步之都数。经云相乘得积步，即是都数之明文。注云谓之畹，全乖积步之本意。此注前云积为田畹，于理得通。复云谓之畹，繁而不当。今者注释，存善去非，略为料简，遗诸后学。以亩法二百四十步除之，即亩数。百亩为一顷。臣淳风等谨按：此为篇端，故特举顷、亩二法。余术不复言者，从此可知。一亩之田，广十五步，从而疏之，令为十五行，则每行广一步而从十六步。又横而截之，令为十六行，则每行广一步而从十五步。此即从疏横截之步，各自为方，凡有二百四十步。一亩之地，步数正同。以此言之，则广从相乘得积步，验矣。二百四十步者，亩法也；百亩者，顷法也。故以除之，即得。

2. 里田方田法

里田方田法曰：方自乘为积，里以一里之积三百七十五亩乘之。

(3) 方田，一里。问：为田几何？

答曰：三顷七十五亩。^③

(4) 广二里，从三里。问：为田几何？

① 长方形的面积 $S = \text{长} \times \text{宽} = 15 \times 16 = 240 \text{ 步}^2 = 1 \text{ 亩}$ 。

② 长方形的面积 $S = \text{长} \times \text{宽} = 12 \times 14 = 168 \text{ 步}^2$ 。

③ 1 里：汉代为 300 步。方田：指正方形或长方形。设边长为 a ，则

正方形的面积 $S = a^2 = 300^2 = 90000 \text{ 步}^2$ 。换算为田亩，1 顷 = 100 亩，故 $S = \frac{90000}{240} = 375 \text{ 亩} = 3 \text{ 顷} 75 \text{ 亩}$ 。

答曰：二十二顷五十亩。^①

里田术曰：广从里数相乘得积里。以三百七十五乘之，即亩数。按：此术广从里数相乘得积里。方里之中有三顷七十五亩，故以乘之，即得亩数也。

3. 圭田法

圭田^②法曰：半广以乘正从^③，或半正从以乘广。

(5) 圭田，广十二步，正从二十一步。问：为田几何？

答曰：一百二十六步。^④

(6) 圭田，广五步二分步之一，从八步三分步之二。问：为田几何？

答曰：二十三步六分步之五。^⑤

术曰：半广以乘正从。半广知，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。按：半广乘从，以取中平之数，故广从相乘为积步。亩法除之，即得也。

4. 斜田法

斜田^⑥法曰：并两斜，半之，以乘正从；或并两广乘半从；或并两广乘从，折半。

(7) 斜田，南广三十步，北阔四十二步，从六十四步。问：为田几何？

答曰：九亩一百四十四步。^⑦

(8) 斜田，正广六十五步，一半从一百步，一半从七十二步。问：几何？

答曰：二十三亩七十步。^⑧

术曰：并两斜而半之，以乘正从若广。又可半正从若广，以乘并。亩法而一。并

① 因 1 里² 为 375 亩，故长方形的面积 $s = 2 \text{ 里} \times 3 \text{ 里} = 6 \text{ 里}^2 \times 375 \text{ 亩/里}^2 = 2250 \text{ 亩} = 22 \text{ 顷} 50 \text{ 亩}$ 。

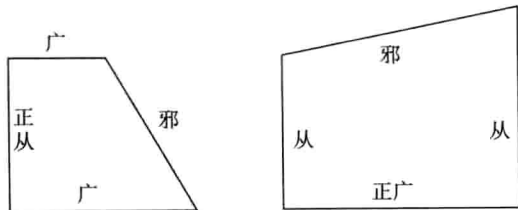
② 指等腰三角形之田。

③ 即“正纵”，指三角形的高。

④ 设圭田的底边长为 a ，高为 h ，则圭田面积 $s = \frac{a}{2} \times h = 12 \div 2 \times 21 = 126 \text{ 步}^2$ 。

⑤ 圭田面积 $s = \frac{a}{2} \times h = \frac{5 \frac{1}{2}}{2} \times 8 \frac{2}{3} = \frac{11}{4} \times \frac{26}{3} = \frac{286}{12} = 23 \frac{5}{6} \text{ 步}^2$ 。

⑥ 邪通“斜”，“斜田”就是直角梯形，“正从”即高，“正广”即直角梯形两直角间的边，“两邪”即与边相邻的两广或两从，如图所示。



⑦ 设斜田的广为 a_1, a_2 ，高为 h ，则斜田的面积 $s = \frac{a_1 + a_2}{2} \times h = \frac{30 + 42}{2} \times 64 = 2304 \text{ 步}^2$ ， $\frac{2304}{240} = 9 \text{ 亩} 144 \text{ 步}^2$ 。

⑧ $s = \frac{a_1 + a_2}{2} \times h = \frac{100 + 72}{2} \times 65 = 5590 \text{ 步}^2$ ， $\frac{5590}{240} = 23 \text{ 亩} 70 \text{ 步}^2$ 。