21世纪高职高专规划教材

应用数学简明教程

YINGYONG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

主 编 戈西元

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用数学简明教程

21世纪高职高专规划教材

应用数学简明教程

主　编　戈西元

副主编　张立新　邢春峰　崔海英

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 提 要

本书是一本专门为理工科等高职高专教育编写的数学教材.内容包括:函数、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用、常微分方程、无穷级数、矩阵及其应用、概率论与数理统计初步.本书的特点:内容丰富,阐述简明扼要、通俗易懂,在强调基本概念与基本运算的同时加强了几何意义及实际应用的叙述.本书适用于高职高专院校及其他高校理工类、管理类等各专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学简明教程/戈西元主编.--北京:北京邮电大学出版社,2010.6

ISBN 978-7-5635-2143-2

Ⅰ.①应… Ⅱ.①戈… Ⅲ.①应用数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 075829 号

书 名	应用数学简明教程
主 编	戈西元
责任编辑	付小霞
出版发行	北京邮电大学出版社
社 址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部) 010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经 销	各地新华书店
印 刷	北京忠信诚胶印厂
开 本	787 mm×960 mm 1/16
印 张	13
字 数	266 千字
版 次	2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2143-2 定价:22.00 元

前　言

在科学技术迅速发展的社会，知识和技术在各个领域对于人们来说有了更高的要求，它也同样促进了高等职业教育的发展.

本书是一本专门为理工、管理等高职高专教育编写的数学教材，是编者根据多年高职高专教学的经验，结合国家高等职业教育专业人才培养的要求，借鉴国内外先进职教的思想编写而成. 教材内容包括：函数、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用、常微分方程、无穷级数、矩阵及其应用、概率论与数理统计初步. 本书采用了模块化、宽接口的方式，以一元函数微积分（函数、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用）为基础模块，以方程、级数、矩阵、概率统计为配套模块，供不同专业按不同需求进行选用.

在编写过程中，编者遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则，突出基本概念、基本思想和基本方法；强调直观描述和几何解释，适度淡化理论证明和推导.

在内容叙述上，尽量采用通俗语言，力求简洁明了，易学易懂. 同时也保证内容阐述的科学性与准确性.

本书第 1 章、第 6 章由戈西元编写，第 2 章、第 3 章由张立新编写，第 4 章、第 5 章由邢春峰编写，第 7 章由崔海英编写. 全书的框架结构、统稿、定稿由戈西元负责.

北京联合大学王信峰教授认真审阅了本书的原稿，提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免会有不当之处，恳请同行教师和读者不吝赐教，批评指正.

编　者

目　录

第1章 函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，极限是研究变量的一种基本思想，连续则是函数的一个重要性态. 本章作为微积分学的基本内容，为以后的学习奠定了必要的基础.

1.1 函 数

在日常生活和科学实验中会遇到各种各样的数量或数量关系，各种各样的数量可分为两种情况，一种是始终不变的量——称为常量，一种是不断变化的量——称为变量. 变量不仅是不断变化的，而且不同变量间的变化有可能是相互联系的. 这种变量间的相互依赖关系反映到数学上就是函数，它描述了自然现象中数量的变化规律.

1.1.1 函数的概念与性质

1. 函数的概念

定义 1 设 x,y 是两个变量，若对非空数集 D 中每一个值 x，按照一定的对应法则 f，总有唯一确定的数值 y 和它对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量，数集 D 为定义域，f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则. 函数符号也可由其他字母来表示，如 g,F,G 等. 例如，圆的面积公式 $S=\pi r^2$，这里半径 r 为自变量，面积 S 为因变量，π 为常数.

当自变量取定 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中的每一个值时，对应的函数值组成的集合称为函数的值域，通常记作 R_f.

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f(0),f(1),f(-x),f(x^2+1)$.

解 $f(0)=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$； $f(1)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$；

$f(-x)=\dfrac{-x-1}{-x+1}=\dfrac{x+1}{x-1}$； $f(x^2+1)=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1+1}=\dfrac{x^2}{x^2+2}$.

例 2 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$； (2)$y=\sqrt{1-x}+\log_2(x+1)$.

解 (1)要使 $y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$有意义,则分母

$$x^2-5x+6\neq 0,$$

解得 $x\neq 2$ 且 $x\neq 3$,所以函数的定义域为$(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(2)要使 $y=\sqrt{1-x}+\log_2(x+1)$有意义,则有

$$\begin{cases}1-x\geqslant 0,\\ x+1>0,\end{cases}$$

解得 $-1<x\leqslant 1$,所以函数的定义域为$(-1,1]$.

由函数的定义可知,定义域和对应法则是构成函数的两个基本要素,如果两个函数具有相同的定义域和对应法则,那么它们就是同一个函数.

例 3 下列各对函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$； (2)$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x},g(x)=\sin x$.

解 (1)因为 $f(x)$的定义域为 $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域为 $D_g=(0,+\infty)$,显然两个函数的定义域不同,所以 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(2)因为 $f(x)$和 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,又因 $f(x)$的值域为 $R_f=[0,1]$,而 $g(x)$的值域为 $R_g=[-1,1]$,所以 $f(x)\neq g(x)$.

2. 函数的表示

函数的表示通常有 3 种形式,举例说明:

(1)解析式

用一个算术表达式确定两个变量间的依赖关系. 如

$$y=\frac{1}{2}\ln(x-1)$$

表示 y 是 x 的函数,其定义域 $D=(1,+\infty)$.

(2)表格式

用一系列数对排成的表格表示的函数关系. 例如,某商店一年内每月洗衣机的零售量如表 1-1 所示.

表 1-1

t(月份)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T(零售量)	80	95	83	60	76	57	46	32	34	69	58	71

这是以表格形式建立了零售量 T(因变量)与月份 t(自变量)之间的函数关系,其定义域 $D=[1,2,3,\cdots,12]$.

(3)图像式

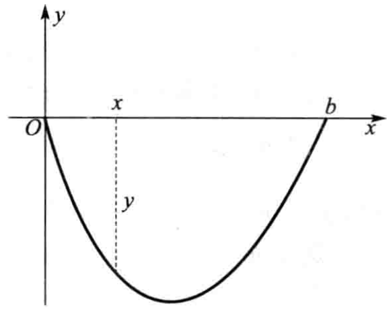


图 1-1

用图形描绘的函数关系. 例如，一河道的横断面如图 1-1 所示，其深度 y(函数)与一岸边 O 到测量点的距离 x(自变量)之间的对应关系由图中曲线所示. 其定义域 $D=[0,b]$.

3. 函数的性质

(1)单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的；对于区间 I 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的.

例如，函数 $y=x^2$，在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的.

(2)奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 内有定义，若对于任意的 $x\in I$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数；函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数.

(3)周期性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个不为零的实数 T，对于任意的 $x\in I$，有 $(x+T)\in I$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是周期函数. 实数 T 称为周期. 注意 T 应是满足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数.

例如，函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x, y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

(4)有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，对于任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界；否则无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，因此，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但在 $(0,2)$ 是无界的.

4. 反函数、分段函数

(1)反函数

在研究两个变量之间的依赖关系时，根据具体问题的实际情况，需要选定其中一个为自变量，那么，另一个就是因变量(函数).

例如,在商品销售中,已知某商品的价格为 p(单价). 如果要想用该商品的销售量 x 来计算该商品的销售收入 y,则有函数关系 $y = px$. 这时,x 是自变量,y 是因变量.

反过来,如果想以这种商品的销售收入来计算其销售量,就是把 y 作为自变量,x 作为因变量,并由关系式 $y = px$ 解出 x 关于 y 的函数关系 $x = \dfrac{y}{p}$. 这时称 $x = \dfrac{y}{p}$ 为 $y = px$ 的反函数,$y = px$ 也称为直接函数.

定义 6　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 R_f,如果对任意一个 $y \in R_f$,D_f 内只有一个数 x 与 y 对应,使得 $y = f(x)$,这时把 y 看做自变量,x 看做因变量,就得到一个新的函数,称为直接函数 $y = f(x)$ 的反函数,记作 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上,把函数 $y = f(x)$ 的反函数写作 $y = f^{-1}(x)$. 反函数的定义域记为 $D_{f^{-1}}$,值域记为 $R_{f^{-1}}$. 显然 $D_{f^{-1}} = R_f$,$R_{f^{-1}} = D_f$.

注意　$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

例 4　求函数 $y = 2x - 1$ 的反函数.

解　由直接函数 $y = 2x - 1$ 解出 $x = \dfrac{y+1}{2}$,得到所求反函数 $y = \dfrac{x+1}{2}$,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

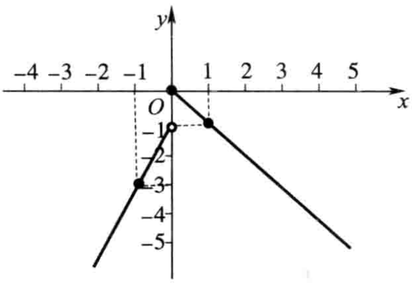


图 1-2

(2)分段函数

在研究函数关系时我们会发现,有些函数需要用几个式子来表示. 例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0, \\ -x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数,当 $x < 0$ 时,$f(x) = 2x - 1$;当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x) = -x$. (见图 1-2)

通常,我们把有两个或两个以上表达式的函数称为分段函数.

注意　分段函数是用几个表达式合起来表示的一个函数,而不是几个函数.

例 5　一工厂生产某产品 1 000 吨,每吨定价 120 元. 销售量在 800 吨以内(含 800 吨)时,按原价出售;销售量超过 800 吨时,超过部分按九折出售. 试求销售收入与销售量之间的函数关系.

解　设销售量为 x,销售收入为 y,则由题意得

当 $0 \leqslant x \leqslant 800$ 时,$y = 120x$;

当 $800 < x \leqslant 1\,000$ 时,$y = 120 \times 800 + (x - 800)120 \times 0.9$;

所以函数关系为

$$y = \begin{cases} 120x, & 0 \leqslant x \leqslant 800, \\ 96\,000 + 120 \times 0.9(x - 800), & 800 < x \leqslant 1\,000. \end{cases}$$

例 6　已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1.\end{cases}$

(1)求 $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f(0)$ 和 $f(3)$;(2)求函数的定义域;(3)画出函数图形.

解　(1)当 $x=\frac{1}{4}$ 时,条件 $0\leqslant x\leqslant 1$ 成立,按表达式 $f(x)=2\sqrt{x}$ 计算,从而

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1.$$

当 $x=0$ 时,仍有条件 $0\leqslant x\leqslant 1$ 成立,仍按表达式 $f(x)=2\sqrt{x}$ 计算,有

$$f(0)=2\times\sqrt{0}=0.$$

当 $x=3$ 时,条件 $x>1$ 成立,按表达式 $f(x)=1+x$ 计算,从而

$$f(3)=1+3=4.$$

(2)函数定义域为函数自变量的所有可能取值,由函数表达式的取值条件可以看到,函数的定义域应为:$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{x\mid x>1\}$,即 $[0,+\infty)$.

(3)函数 $f(x)$ 图形由函数 $y=2\sqrt{x}$ 的 $[0,1]$ 段与直线 $y=1+x$ 的 $(1,+\infty)$ 段组成,分别将两个图形对接在同一图中,就得到了给定函数的图形,如图 1-3 所示.

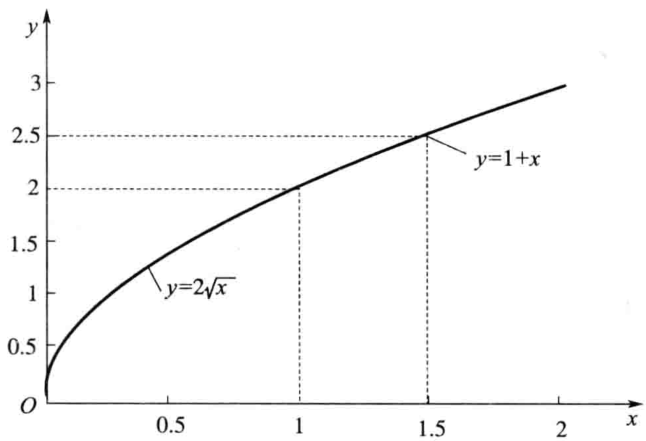


图 1-3

1.1.2　初等函数

1. 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数:

(1)常值函数:$y=C$;

(2)幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为任意实数);

(3)指数函数：$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(4)对数函数：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

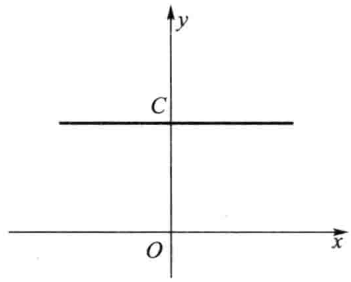
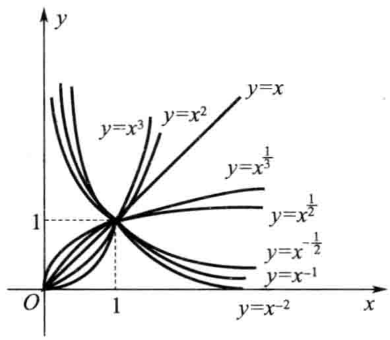
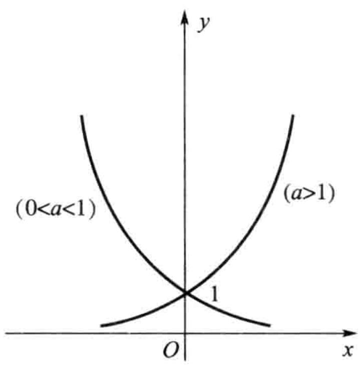
(5)三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

(6)反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

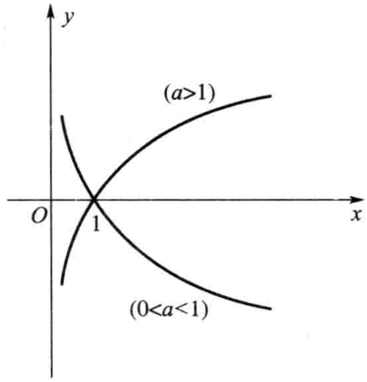
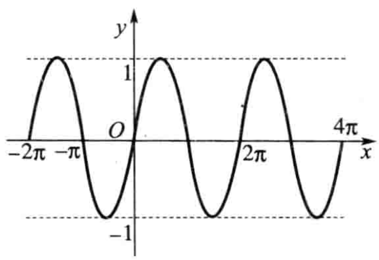
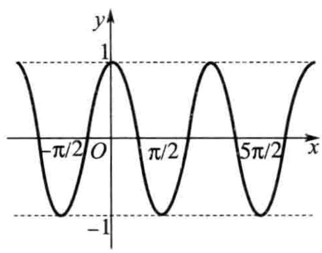
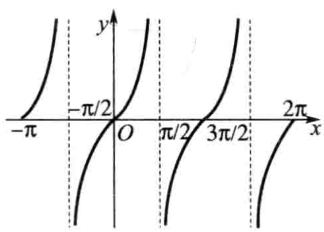
其中指数函数与对数函数、三角函数与反三角函数互为反函数.

基本初等函数是中学已经学过的函数，在此，将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质列表，如表 1-2 所示.

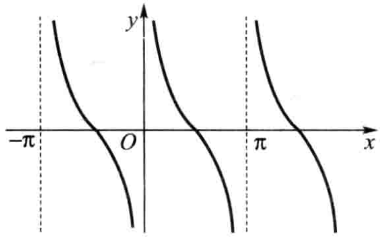
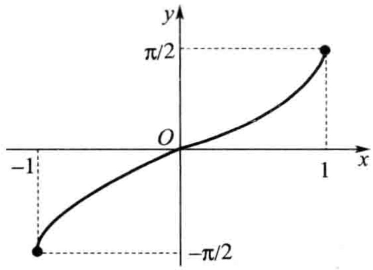
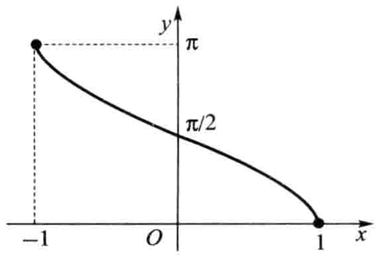
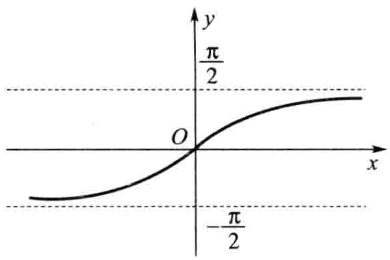
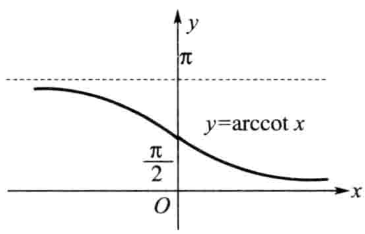
表 1-2

名称	表达式	定义域	图形	特性
常值函数	$y=C$	$(-\infty,+\infty)$		图像为平行于 x 轴的一条直线.
幂函数	$y=x^{\alpha}$	随 α 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有定义.		经过点 $(1,1)$. 在第一象限内当 $\alpha>0$ 时，x^{α} 为增函数；当 $\alpha<0$ 时，x^{α} 为减函数.
指数函数	$y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，且都通过点 $(0,1)$，当 $0<a<1$ 时 a^x 是减函数；当 $a>1$ 时，a^x 是增函数.

续表

名称	表达式	定义域	图形	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，且都通过点 $(1,0)$，当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数，当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数．
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数(图形关于原点对称)，有界，即 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$．
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数(图形关于 y 轴对称)，有界，即 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$．
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数；在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内曲线单调上升．

续表

名称	表达式	定义域	图形	特性
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数. 在 $(0,\pi)$ 内曲线单调下降.
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加的奇函数,值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少,值域为 $[0,\pi]$.
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加的奇函数,值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少,值域为 $(0,\pi)$.