燎原高数

高等数学辅导领导品牌

高等院校教材同步辅导及考研复习用书

高等数学
辅导及习题精解

同济·第七版 下册

主编 张天德

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

沈阳出版社

高等数学

辅导及习题精解

高等数学

辅导及习题精解

同济·第七版 下册

主　编　张天德
副主编　杜世田　张焕玲

沈阳出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导及习题精解：同济第7版．下册 / 张天德主编．— 沈阳：沈阳出版社，2014.12

ISBN 978-7-5441-6339-2

Ⅰ．①高… Ⅱ．①张… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 290492 号

出 版 者：沈阳出版社

（地址：沈阳市沈河区南翰林路 10 号　邮编：110011）

网　　址：http://www.sycbs.com

印 刷 者：淄博恒业印务有限公司

发 行 者：沈阳出版社

幅面尺寸：170 mm×240 mm

印　　张：18

字　　数：330 千字

出版时间：2015 年 1 月第 1 版

印刷时间：2015 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑：杨　静　海丽丽　高玉君

封面设计：燎原视觉设计中心

版式设计：燎原视觉设计中心

责任校对：何召龙

责任监印：杨　旭

书　　号：ISBN 978-7-5441-6339-2

定　　价：19.80 元

联系电话：024—24112447　024—62564911

E-mail：sy24112447@163.com

前言

高等数学是理工类专业重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助读者学好高等数学，编者根据多年的教学经验编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》（第七版）完全配套的《高等数学辅导及习题精解》上、下册。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与技巧，提高应试能力和数学思维水平。本书章节的划分和内容设置与同济第七版教材完全一致。

讲解结构五大部分

一、本章内容概览：对本章知识进行简要的概括。

二、本章知识图解：用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

三、本节内容讲解：包含本节考查要点、教材知识全解、典型例题解析三大模块。

1. 本节考查要点：对本节出现的知识点简洁而全面的梳理。

2. 教材知识全解：用表格形式对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点；

3. 典型例题解析：这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题深入讲解，使您对每一个知识点扎实掌握，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，从而获得实际应用应试能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”，更是巧妙点拨，让您举一反三、触类旁通。

四、本章整合：包含本章知识总结、考研真题精析、本章同步自测三大模块。

1. 本章知识总结：对本章所学的知识进行系统的回顾，帮助读者更好的复习与总结。

2. 考研真题精析：针对每一个基本题型，精选最新研究生入学考试真题，做了精心深入的解答。

3. 本章同步自测：精选部分有代表性、测试价值高的题目（部分题目选自历年全国研究生入学考试试题），以此检测、巩固读者的学习效果，提高应试水平。

前言

五、教材习题详解：对教材里各章节全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了"思路探索"以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有"归纳总结"来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：所有重点、难点、考点统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导书，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目录

教材知识全解

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材习题详解

教材知识全解

第八章　向量代数与空间解析几何

本章内容概览

空间解析几何是用代数方法研究空间中的几何问题，主要工具是向量代数. 正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何是学习多元微积分的重要基础.

本章知识图解

- 向量代数与空间解析几何
  - 向量代数
    - 向量的概念
      - 表示方法
      - 模、方向、方向角、方向余弦
    - 向量的运算
      - 线性运算
      - 数量积、向量积
      - 混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
    - 向量的位置关系
      - 两向量垂直、平行
      - 三向量共面
  - 解析几何
    - 平面方程
      - 点法式
      - 一般式
      - 截距式
    - 直线方程
      - 一般式
      - 对称式
      - 参数式
    - 线面关系
      - 面面关系
        - 夹角
        - 平行、垂直
      - 线线关系
        - 夹角
        - 平行、垂直
      - 线面关系
        - 夹角
        - 平行、垂直
    - 曲面
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
    - 曲线
      - 投影曲线
      - 参数式、一般式方程

第一节　向量及其线性运算

本节考查要点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1. 利用向量的线性运算求解几何问题.

2. 向量的坐标表达式及其运算.
3. 求向量的模、单位向量、方向余弦、方向角、投影.

教材知识全解

1. 空间直角坐标系的概念

名称	定义	说明
空间直角坐标系	在空间取定一点 O,和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,就确定了三条以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴),y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴). 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系.	通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴是铅垂线,它们的正向符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时,大拇指的指向就是 z 轴的正向.
坐标面	三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面.	x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面,y 轴和 z 轴确定 yOz 面,z 轴和 x 轴确定 zOx 面.
卦限	三个坐标面把空间分成的八个部分.	一共八个卦限,分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 来表示.
空间中点的坐标	空间中任一点 M 在三条坐标轴上的投影 P,Q,R 在各自坐标轴上的坐标记为 x,y,z,则点 M 与有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系,称 (x,y,z) 为点 M 的坐标.	点 M 称为以 (x,y,z) 为坐标的点.
点间的距离	$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,则 M_1 和 M_2 之间的距离为 $d=\lvert M_1M_2\rvert$.	$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

2. 向量的有关定义和性质

名称	定义	说明
向量(矢量)	既有大小又有方向的量称为向量.	(1) 常用有向线段表示向量,如 $\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}$ 等. (2) 将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合,则其终点的坐标 (x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 或 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. (3) 设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$,则 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. (4) 大小相等、方向相同的两向量相等.

续表

名称	定　义	说　明
向量的模	向量的大小(或长度)	(1) 向量$\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}$的模依次记作$\|\overrightarrow{AB}\|$,$\|\boldsymbol{a}\|$. (2) 模为0的向量叫作零向量,记作$\boldsymbol{0}$或$\vec{0}$,它的方向可看作是任意的.模为1的向量叫作单位向量.与$\boldsymbol{a}$模相同,方向相反的向量叫作$\boldsymbol{a}$的负向量,记作$-\boldsymbol{a}$. (3) 设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. (4) 对空间中任意两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,有$\|\overrightarrow{M_1M_2}\|=\|M_1M_2\|$ $=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.
向量的方向余弦	设向量$\boldsymbol{a}$与三坐标轴正向的夹角分别为α,β,γ,则$\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦.	(1) 如果$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$,$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$. (2) $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$恰为与$\boldsymbol{a}$方向相同的单位向量,$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
向量的投影	已知向量$\overrightarrow{M_1M_2}$和u轴,M_1,M_2在u上的投影分别为M'_1,M'_2,那么u上的有向线段$\overrightarrow{M'_1M'_2}$的值$\|\overrightarrow{M'_1M'_2}\|$即为$\overrightarrow{M_1M_2}$在$u$上的投影.	(1) 若$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{a}$与$u$轴的夹角为$\varphi$,则$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\cos\varphi$. (2) (投影定理)向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在$u$轴上的投影等于向量的模乘轴与向量的夹角$\varphi$的余弦,即$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{M_1M_2}=\|\overrightarrow{M_1M_2}\|\cos\varphi$. (3) 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和,即$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$. (4) 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积,即$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$. (5) 向量在与其方向相同的轴上的投影为其模;在与其方向垂直的轴上的投影为0. (6) $\boldsymbol{a}$在x,y,z轴上的投影坐标分别为$\|\boldsymbol{a}\|\cos\alpha$,$\|\boldsymbol{a}\|\cos\beta$,$\|\boldsymbol{a}\|\cos\gamma$,其中$\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$为向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦.

3. 向量的线性运算

名称	坐标表示	说　明
向量的数乘	$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.	当$\lambda>0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向;当$\lambda<0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向,其模$\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\|\boldsymbol{a}\|$.
向量的加法	$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$.	(1) 对向量的加法有平行四边形法则和三角形法则. (2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线$\Leftrightarrow$存在不全为零的数$\lambda,\mu$使得$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

典型例题解析

基本题型Ⅰ:有关向量的线性运算、模、方向角、方向余弦、向量的坐标表示等问题

【例1】 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角相等,与 z 轴正向的夹角是前者的两倍. 求与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

【思路探索】 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量就是以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量. 故问题求解的关键在于求出向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解:设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角为 α,则它与 z 轴正向的夹角为 2α. 那么,$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别是 $\cos\alpha,\cos\alpha,\cos2\alpha$,故有 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2(2\alpha)=1$,即 $2\cos^2\alpha-1+\cos^2(2\alpha)=0$,由此得到

$\cos2\alpha(\cos2\alpha+1)=0$. 所以 $\cos2\alpha=0$ 或 $\cos2\alpha=-1$. 又因为 $2\alpha\in[0,\pi]$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$.

则 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos2\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=0,\cos\alpha=0,\cos2\alpha=-1$.

因此,所求的单位向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 或 $(0,0,-1)$.

方法点击: 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 满足关系式:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

【例2】 设 $\boldsymbol{a}=(4,5,-3),\boldsymbol{b}=(2,3,6)$,求 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

解:与 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量,因此

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}(4,5,-3)=\left(\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{5}{\sqrt{50}},\frac{-3}{\sqrt{50}}\right).$$

又 $\boldsymbol{b}^\circ=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}(2,3,6)=\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7}\right)$,从而,$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{7},\cos\beta=\dfrac{3}{7},\cos\gamma=\dfrac{6}{7}$.

【例3】 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=(8,9,-12)$ 的方向取长为 34 的线段 $\overline{AB}$,求点 B 的坐标.

解:设点 B 坐标为 (x,y,z),则 $\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z-7)$.

由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致,故存在实数 $\lambda>0$,使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}$,即 $(x-2,y+1,z-7)=\lambda(8,9,-12)$,得 $x-2=8\lambda,y+1=9\lambda,z-7=-12\lambda$.

又 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=34$,得 $\sqrt{289\lambda^2}=34$,得 $\lambda=2$,所以

$x=8\lambda+2=18,y=9\lambda-1=17,z=-12\lambda+7=-17$.

点 B 坐标为 $(18,17,-17)$.

方法点击: $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

基本题型Ⅱ:利用向量的运算与性质证明结论

【例4】 用向量的方法证明:三角形的中位线平行于底边,且它的长度等于底边的一半.

证明:设 $\triangle ABC$ 中,D、E 分别为 AB、AC 的中点,

$\because \overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,

$\therefore \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,

即 $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

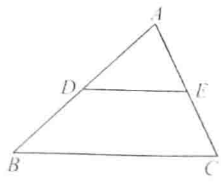

图 L8-1

故$\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$且$|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，结论得证.

【例5】 设空间四边形$ABCD$各边的中点依次为P、Q、R、S. 证明：(1) 四边形$PQRS$是平行四边形；(2) 四边形$PQRS$的周长等于四边形$ABCD$的两对角线的长度之和.

证明：设四边形$ABCD$中，AC、BD为两条对角线.

(1) 在$\triangle ABD$中，由中位线定理知，$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. 同理，$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$，即$\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{QR}$且$|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{QR}|$，故$PQRS$是平行四边形.

(2) 分别在$\triangle ABC$及$\triangle DAC$中应用中位线定理，得$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$.

同理，$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

$\therefore |\overrightarrow{PS}| + |\overrightarrow{SR}| + |\overrightarrow{QR}| + |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|$，

即四边形$PQRS$的周长等于四边形$ABCD$的两条对角线的长度之和.

方法点击：用向量的方法证明两线段平行：

(1) 各线段分别用向量表示；

(2) 证明表示各线段的向量方向相同.

第二节 数量积 向量积 *混合积

本节考查要点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面：

1. 与数量积、向量积、混合积公式有关的运算.
2. 两向量垂直或平行的条件及判断两向量的位置关系.
3. 向量积的几何应用.

教材知识全解

1. 向量的运算

名称	定 义	说 明
数量积（内积，点乘）	两向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的数量积$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert \lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$，$\theta$是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.	(1) 若$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. (2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$. (3) $(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$. (4) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$. (5) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角余弦为$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$. (6) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$即$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$.

续表

名称	定义	说明
向量积(外积,叉乘)	两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一向量 $\boldsymbol{c}$,其模为 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin\theta$,其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面(即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$,又垂直于 $\boldsymbol{b}$),且 $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-b_ya_z,a_zb_x-b_za_x,a_xb_y-b_xa_y)$. (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. (3) $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$. (4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$. (5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角正弦 $\sin\theta=\dfrac{\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$. (6) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$,其中 b_x,b_y,b_z 中有一个为0时,如 $b_x=0$,应理解为 $a_x=0$. (7) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相邻边的平行四边形的面积为 $\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert$;若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为三角形的任意两边,则三角形面积为 $\dfrac{1}{2}\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert$.
混合积	对向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积,记作 $[\boldsymbol{abc}]$.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,则有 $[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$. (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$. (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$. (4) $\lvert[\boldsymbol{abc}]\rvert$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积,并且当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 成右手系时,$[\boldsymbol{abc}]$ 为正,当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 成左手系时,$[\boldsymbol{abc}]$ 为负. (5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的 λ、μ 和 υ,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\upsilon\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

典型例题解析

基本题型Ⅰ:有关向量的数量积、向量积与混合积的运算及性质问题

【例1】 设未知向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线,且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$. 求 $\boldsymbol{x}$.

解:方法一:由于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,故设 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$,

$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=(2,-1,2)\cdot(2\lambda,-\lambda,2\lambda)=9\lambda=-18$,$\therefore\lambda=-2$,

故 $\boldsymbol{x}=(-4,2,-4)$.

方法二:由于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,故可设 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}$,则

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\lambda\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2=\lambda[2^2+(-1)^2+2^2]=9\lambda=-18$,$\therefore\lambda=-2$.

故 $\boldsymbol{x}=(-4,2,-4)$.

方法点击:证明两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线的方法:

(1) $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,证明存在 $\lambda\neq0$ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$;

(2) 证明 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$;

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

【例 2】 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $|\boldsymbol{c}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$, 求 $[\boldsymbol{abc}]$.

【思路探索】 由定义, $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})$. 故应先求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 及 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})$.

解: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=6\times3\times\sin\frac{\pi}{6}=9$,

又 $\because \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$, $\therefore \boldsymbol{c}\,/\!/\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 故 $\boldsymbol{c}$ 与 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 的夹角 $\theta=0$ 或 π.

因此, $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta=\pm27$.

【例 3】 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$, $\boldsymbol{b}=(3,-4,5)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, 问 λ 为何值时, $|\boldsymbol{c}|$ 最小?并证明:当 $|\boldsymbol{c}|$ 最小时, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

解: $|\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\lambda^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\lambda+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$,

所以当 $\lambda=-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=-\frac{12}{50}=-\frac{6}{25}$ 时 $|\boldsymbol{c}|$ 最小, 此时

二次函数最小值问题.

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=0$,

所以 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

【例 4】 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为 3 个不共面的向量, 并设 $\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ 共面, 则 $k=$ ________.

【思路探索】 用向量代数法, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$.

解:
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}&=[(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})\\&=[3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-10(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(3k+7)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})+(k-21)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})-\\&\quad 7k(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})\\&=(k-21)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(3k+7)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}+30(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=(k-21-3k-7+30)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(2-2k)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=0.\end{aligned}$$

$\because \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为 3 个不共面的向量, $\therefore (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq0$, $\therefore 2-2k=0$, $\therefore k=1$.

方法点击:三个向量共面,一般用混合积为零来解决.

基本题型 Ⅱ:关于向量的平行、垂直、共面关系及夹角的问题

【例 5】 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, 求一单位向量 $\boldsymbol{m}$, 使 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{c}$, 且 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

解:设所求向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$, 依题意, 有 $|\boldsymbol{m}|=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$,

$$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{c}=0\Rightarrow2x-2y+z=0.$$

$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面 $\Rightarrow[\boldsymbol{mab}]=0$, 即 $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=2y+z=0$.

以上三式联立, 解得 $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$ 或 $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=\frac{2}{3}$,

$\therefore \boldsymbol{m}=\pm\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

方法点击:涉及共面问题时,常用混合积.

【例 6】 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 和 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直, 求非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解:由 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$, 得

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\qquad ①$$

由$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，得

$$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0, \quad ②$$

①－②得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-23|\boldsymbol{b}|^2=0$，

即 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2. \quad ③$$

将③代入①，得 $7|\boldsymbol{a}|^2=7|\boldsymbol{b}|^2$，即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

从而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$. $\therefore \cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，$\therefore (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{3}$.

基本题型Ⅲ：利用向量的几何意义求面积、体积

【例7】 已知三角形三个顶点坐标是 $A(2,-1,3)$，$B(1,2,3)$，$C(0,1,4)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【思路探索】 以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解：由向量积的定义，可知 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

由于$\overrightarrow{AB}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,1)$，因此$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$.

【例8】 求以 $A(1,3,4)$，$B(3,5,6)$，$C(2,5,8)$，$D(4,2,10)$ 为顶点的四面体的体积 V.

【思路探索】 四面体的体积是对应平行六面体体积的$\frac{1}{6}$，而平行六面体的体积 $V=|[\boldsymbol{abc}]|$.

解：由题设条件知$\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，$\overrightarrow{AD}=(3,-1,6)$. 根据混合积的几何意义知

$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{6}|(4,-6,2)\cdot(3,-1,6)|=\frac{1}{6}\times30=5$.

基本题型Ⅳ：以向量为工具的证明题

【例9】 试用向量方法证明正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

【思路探索】 由于正弦定理涉及三角形的边与它们的夹角，并且是夹角的正弦. 这使我们想到涉及正弦运算的向量积.

证明：在 $\triangle ABC$ 中，$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\times\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$，$\therefore \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$，

两边取向量的模，有 $b\cdot c\cdot\sin A=|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=c\cdot a\cdot\sin B$，由此得到$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，同理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中，有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

【例10】 证明：三角形的三条高线交于一点.

解：设三角形的顶点为 A、B、C，AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的两条高线，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{AC}$.

设 AD 与 BE 交于 F，要证三条高线交于一点，只要证明$\overrightarrow{FC}\perp\overrightarrow{AB}$.

由于$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}$，因此

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FC}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC},$$

$\because \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{FA}=0$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{FC}$. 故结论得证.

第三节 平面及其方程

本节考查要点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面：

1. 利用平面方程的几种形式建立平面方程.
2. 求两平面的夹角；两平面的位置关系；点到平面的距离.

教材知识全解

1. 平面方程

名　称	方程形式	说　明
点法式方程	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上任一点，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面法向量.
一般式方程	$Ax+By+Cz+D=0$	$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面法向量.
截距式方程	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	a,b,c 为平面在三坐标轴上的截距，但要求 a,b,c 均不为零.

2. 两平面的夹角

设 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，

则 π_1,π_2 的夹角可由 $\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\times\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ 确定，且有

$$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0,\pi_1\,//\,\pi_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

3. 点到平面的距离

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

典型例题解析

基本题型 Ⅰ：求平面方程的问题

【例 1】 求过三平面 $2x+y-z-2=0,x+y+z-3=0,x-3y+z+1=0$ 的交点且与平面 $x+y+2z=0$ 平行的平面.

【思路探索】 平面与已知平面平行，故已知平面的法向量可作为所求平面的法向量，又三平面的交点易求，故由点法式可解决问题.

解：由 $\begin{cases}2x+y-z-2=0,\\x+y+z-3=0,\\x-3y+z+1=0\end{cases}$ 得交点坐标为 $M(1,1,1)$，而平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$，则所求平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$，即 $x+y+2z-4=0$.