

好玩的

数学

修订版

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

进位制与数学游戏

李友耕_二著

数学枯燥，游戏有趣，
数学游戏可以化枯燥为有趣，
在有趣中提高思维能力。

$\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}$	2	3	4	5	6	7	...
2							
3							
4							
5							
6							
7							
$\vdots$							



科学出版社

好玩的

数学

(修订版)

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报报“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

进位制与数学游戏

李友耕 著

科学出版社

内 容 简 介

本书在较系统、全面论述进位制知识的基础上,分别介绍了涂色游戏、猜测游戏、演变游戏、火柴游戏、配对游戏、戥秤称珠游戏、天平称珠游戏以及砝码·链条·链环等游戏的玩法及进位制知识在其中的应用原理。本书集趣味性、知识性与科学性于一体,奇妙严密,通而不俗,充分展示数学思维之美妙与深刻。

本书读者主要为数学研究人员、数学专业的大学生、爱好数学的中学生以及对数学感兴趣的大众读者。

图书在版编目(CIP)数据

进位制与数学游戏/李友耕著. —修订本. —北京:科学出版社, 2015. 3

(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-043572-9

I. ①进… II. ①李… III. ①数学—普及读物 IV. ①01-49
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 044249 号

责任编辑:霍羽升 胡升华 / 责任校对:钟 洋

责任印制:张 倩 / 整体设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 4 月第 三 版 开本:720×1000 1/16

2015 年 4 月第一次印刷 印张:16

字数:254 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书修订版前言

“好玩的数学”丛书自2004年10月出版以来，受到广大读者欢迎和社会各界的广泛好评，各分册先后重印10余次，平均发行量近45 000套，被认为是一套叫好又叫座的科普图书。丛书致力于多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有深刻哲理的内容最大限度地通俗化，努力使读者“知其然”并“知其所以然”；尽可能地把数学的好玩提升到了更为高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。

丛书于2004年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一，2009年荣获“国家科学技术进步奖二等奖”。但对于作者和编者来说，最高的奖励莫过于广大读者的喜爱关心。十年来，收到不少热心读者提出的意见和修改建议，数学研究领域和科普领域也都有了新的发展，大家感到有必要对书中的内容进行更新和补充。要感谢各位在耄耋之年仍俯首案牍、献身科普事业的作者，他们热心负责地对自己的作品进一步加工，在“好玩的数学（普及版）”的基础上进行了修订和完善。出版社借此机会将丛书改为B5开本，以方便读者阅读。

感谢多年来关心本套丛书的广大读者和各界人士，欢迎大家提出批评建议，共同促进科普事业繁荣发展。

编者
2015年3月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会(ICM2002)期间,91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词,写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗?不同的人可能有不同的看法。

有人会说,陈省身先生认为数学好玩,因为他是数学大师,他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说,数学枯燥,数学难懂,数学一点也不好玩。

其实,陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩,才兴致勃勃地玩个不停,才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以,小孩子也可能觉得数学好玩。

当然,中学生或小学生能够体会到的数学好玩,和数学家所感受到的数学好玩,是有所不同的。好比象棋,刚入门的棋手觉得有趣,国手大师也觉得有趣,但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味,理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物,很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道:“但得此中味,勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学,要接触数学,或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前,人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说:“道生一,一生二,二生三,三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力:“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在,

它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i} = 1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》（此二书尚无普及版——编者注），分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清

楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》（此次普及版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注），把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高

阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x + 4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4)/5$$

$$b = 4(x+4)/25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数, 而 256 不能被 5 整除, 所以 $x+4$ 应是 3125 的倍数, 所以

$$x+4=3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时, $x=3121$

答案是, 这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法, 其实就是动力系统研究中常用的相似变换法, 也是数学方法论研究中特别看重的“映射 - 反演”法。小中见大, 也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节, 谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处, 在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中, 和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此, 华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明, 在所有分母不超过 336 的分数当中, 和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来, 在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中, 用连分数的方法证明, 在所有分母不超过 8000 的分数当中, 和 π 最接近的仍然是 $355/113$, 大大改进了 336 这个界限。有趣的是, 只用初中里学的不等式的知识, 竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上!

根据 $\pi = 3.1415926535897 \dots$, 可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$, 如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π , 一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$, 所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。

但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

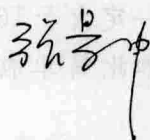
数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目

都有名家做过。从书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。



2004年9月9日

前言

数学枯燥，游戏有趣，数学游戏可以化枯燥为有趣，在有趣中提高思维能力。

——题记

进位制是人们既熟悉而又有待进一步探索的知识，从进位制中展现、挖掘出数学游戏，既饶有趣味，又富于思考，特别有助于青少年学生激发兴趣、开发智力、增长知识，进行形象思维与逻辑思维的训练，有助于素质教育、创新教育的实施。笔者在42年的教学生涯中，一向对饱含数学要素的游戏深感兴趣，认为数学与游戏是存在着默契的。为此，笔者有意收集，不断构思，写成了这本数学读物。

本书在介绍进位制知识的基础上，通过与进位制有关的一些典型事例，向读者展现数学游戏的某些侧面。数学游戏不同于一般游戏。一般游戏主要是通过某种活动，唤起人们情感的愉悦和共鸣，而数学游戏则主要是通过抽象和深思，给予人们以理智的满足和神往。当你对数学游戏所揭示的规律浮想联翩时，当你对复杂深奥的数学问题豁然开朗时，当你对数学本身的简洁和谐回味无穷时，当你对中华民族的聪明智慧赞叹不已时，你的内心会有说不出的惊奇、喜悦和陶醉，你也就领悟到了数学游戏乃至数学本身的魅力。

人类在运用分析推理的同时，便开始运用自身的智慧，构造出形形色色的智力游戏，以磨炼自己或后代的思维。这些游戏大致可以分为两类：一类是以“巧”取胜，一类是以“迷”见长。以“巧”取胜者，巧中见智，智中含趣，集智巧和趣味

于一体。例如，古老的过河问题，经历了漫漫历史长河的大浪淘沙，至今依然不乏诱人的魅力。又如，我国民间源远流长的“九连环”、“七叠环”，构思奇妙，解法隽永，特性迥异，足以令人拍案叫绝。以“迷”见长的游戏，源自古代，发于近代。再如，火柴游戏、戥秤称珠游戏、天平称珠游戏等，这类游戏，往往富有哲理内涵，让人“为伊消得人憔悴”，而“衣带渐宽终不悔”。这类游戏，为人们（特别是青少年学生）提供了一个“看得见、摸得着”的形象，使他们觉得既十分直观、容易理解，又饶有情趣、耐人寻味。这类游戏，因素繁多，信息量大，关系错综复杂，扑朔迷离，因而需要清晰的思路、精细的分析、严密的推理，有时会因一念之差，铸成谬误，以致陷于迷津，然而，进行这类游戏，却可以找到若干规律，苦中得乐，对于启迪青少年学生创新思维大有益处。

数学游戏是一种趣味性浓而思考性强的活动，适合于不同年龄、不同性别和不同社会阶层的人们，因而具有广泛的基础。本书在编写上，注意了知识性、趣味性、探索性的结合；在编排上，注意了由浅入深、先易后难。为了使有趣的游戏附于事理情节，本书的故事内容，有的取材于真实的资料，有的借助于古今中外的趣事传说，还有的根据现实生活创作而成。读者在使用本书时，可以循序阅读，也可以根据自己的情况，选读有关的内容，或者越过某些部分，往后阅读。

本书在编写的过程中，吸取和采用了有关书刊上的资料，特别是得到了不少同志的支持和指教，在此一并表示衷心的感谢。

由于笔者水平所限，疏漏之处在所难免。希望能够给广大读者以有益启迪，同时恳请大家批评指正。

李友耕

2007年12月1日于福州

目 录

丛书修订版前言

第一版总序

前言

01 进位制的知识	1
1.1 形形色色的进位制	1
1.2 k 进数的表示法	4
1.3 非十进数与十进数的互化	7
1.4 k 进数的大小比较	9
1.5 二进数的四则运算	12
1.6 奇特而有趣的乘法	13
1.7 二进制的优越性	15
1.8 进位制在中国	18
02 涂色游戏	23
2.1 四角同色矩形 (一)	23
2.2 四角同色矩形 (二)	25
2.3 四角同色矩形 (三)	30
2.4 展览馆的参观线路	32
2.5 警察抓小偷	35
03 猜测游戏	39
3.1 猜姓游戏	39
3.2 猜 $\times\times$ 游戏	42
3.3 猜数游戏	53
3.4 三进数的猜测游戏	61
3.5 奇妙猜姓	64
04 演变游戏	66

4.1	一位演变游戏	66
4.2	多位演变游戏	77
4.3	河中无岛的过河游戏 (一)	85
4.4	河中无岛的过河游戏 (二)	92
4.5	河中有岛的过河游戏	101
05	火柴游戏	104
5.1	火柴游戏	104
5.2	火柴游戏的变式	111
5.3	火柴游戏的变种	114
06	配对游戏	120
6.1	拉线开关游戏	120
6.2	对应标签游戏	123
07	戥秤称珠游戏	126
7.1	从 7 颗珠谈起	127
7.2	推广到一般情况	136
7.3	伪珠未必一颗 (一)	148
7.4	找出整盒的伪珠	157
08	天平称珠游戏	163
8.1	伪珠的颗重比真珠轻	163
8.2	“十二珠”游戏	170
8.3	伪珠的颗重与真珠不同	187
8.4	伪珠未必一颗 (二)	199
09	砝码·链条·链环	210
9.1	砝码游戏 (一)	210
9.2	砝码游戏 (二)	213
9.3	链条游戏 (一)	216
9.4	链条游戏 (二)	219
9.5	链环游戏 (一)	222
9.6	链环游戏 (二)	224
后 记		227
附 录		229

01

进位制的知识

1.1 形形色色的进位制

在日常生活和生产劳动中，人们几乎时刻都在跟数打交道，其中接触最多的是自然数。自然数有无穷多个。我们知道，读数要有名称，写数要有记号。对于每一个自然数，如果都用一个独立的名称和记号来表示它，那是办不到的，也是不便记忆和应用的。那么，该怎么办呢？

人类经过长期的实践，创造了用少量的名称和记号来表示任何一个自然数的记数办法。这个记数办法就是根据位值原则，用一定数量的数字来表示众多的自然数。所谓位值原则，就是把数字排成横列来表示一个自然数时，每一个数字除了表示本身的值以外，还有一个所在的位置赋予的值（即位置值）。位值原则又叫做数字和数位相结合的原则。这样，即使是同一个数字，由于它在所表示的自然数里有着不同的位置，也就表示着不同的数值。

不要小看位值原则，以为它平常得很。在历史上，位值原则是杰出而重要的思想，是人类文明的重要里程碑之一，也是数学史上无与伦比的一个光辉成就。当时发明这样一种方法的困难之大，正如数学家拉普拉斯(Laplace, 1749~1827)所指出的那样，可从如下事实中推断出来：甚至像阿基米德(Archimedes, 公元前 287~前 212)和阿波罗尼(Apollonius, 约公元前 260~前 170)这两位古代最伟大的天才也未能注意到它。现在看来，罗马数字未能采用位值原则也说明了这一论断。位值原则是千百年人类智慧的结晶，它给予记数的简化与计算的便当，为人们提供了极为有利的条件。对此，马克思曾经高度地评价过位值原则的出现，称赞它是“最美妙的数学发明”。

由于人类经常用双手来接触事物，也就经常用双手的 10 个指头来