

考研数学



2016

高等数学

17 Compulsory Courses of Advanced Math

必修17课


主编 杨超 陈秋成



不是最好的时光里有你们，
而是你们在，
我才**不虚**时光！

独创记忆口诀，助力记基本概念；
专属解题方法，灵活用数形结合。

● 赠 凭封底账号密码观看
● 送 986题重点讲解视频（详见封三）

 中国政法大学出版社



考研数学

高等数学必修17课

主 编 杨 超 陈秋成

- 声 明
1. 版权所有，侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题，由出版社负责退换。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学高等数学必修17课/杨超, 陈秋成主编. —北京: 中国政法大学出版社, 2015. 3
ISBN 978-7-5620-5981-3

I. ①考… II. ①杨… ②陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV.
①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第060202号

- 出 版 者 中国政法大学出版社
地 址 北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址 北京100088信箱8034分箱 邮编100088
网 址 <http://www.cuplpress.com> (网络实名: 中国政法大学出版社)
电 话 010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承 印 北京旺鹏印刷有限公司
开 本 710mm×1000mm 1/16
印 张 22
字 数 410千字
版 次 2015年3月第1版
印 次 2015年3月第1次印刷
定 价 36.80元

前 言

近年来考研数学的命题范式和内容,已经清楚地彰显了数学试卷题目中低难度,客观题型对“三基”(基本概念与定义、基本定理与性质、基本方法与结论)拓展的高要求,主观题型对考点灵活综合。显然,仅仅靠普通的大学数学教学的教材,肯定不能达到考研数学的要求,如何在教材基础上拓展和过渡到考研数学大纲应试的范围和要求,正是作者编著《考研数学高等数学必修 17 课》的源泉,旨在基本教材和考研内容要求之间,架设一座桥梁,帮助考生获得最有效的快速提升。

在多年考研数学辅导一线的教学实践中,作者创立了独特的导学桥训练新理念,其教学效果获得了考生共鸣。本书具有四大特色:

第一大特色是构架了完备的“三基”立体化体系

系统总结并列举了大纲要求的需要熟练和必记的“三基”具体内容,利用精选或原创低难度例题帮助考生逐个理解、模仿应用,避免无的放矢,提高复习效率,比如精确列举了大纲的全部考点拓展,做到不多余、不遗漏。如历年真题出现概率最多的基本无穷小等价关系,导数定义中 3 个隐含的信息、基本积分公式,多元积分中的常用对称性关系等等。这样做可以大幅度省去考生做多余的复习笔记的时间和总结提炼的精力,而使考生主要努力在消化吸收掌握应用方面。

第二大特色是方法的原创性

比如在多元函数微分内容部分,作者提出了大指针方略证明二重极限不存在,复合函数因变量对自变量求导是通过“对应法则对位置变量求导”这一桥梁进行的,这些新观点,大大提高了考生的接受能力和认知效率。另一方面,提供了作者解答实际数学题目的快速经验。

第三大特色是内容的完备性

利用题型题法理念弱化抽象概念,清晰解题思路,例题融合多个考点,使诸多知识点相互渗透融合,体现学而常习之的经典方法论。对每章内容分层面系统讲述,引导考生在解答问题时,判断题型,选用方法,如极限的 7 型 10 法训练,不定积分的 5 大换元集合等等。

第四大特色是重要结论的形象助记

众所周知,对一个概念和结论理解后,最终获得的知识是靠记忆体现的,作者结合当代先进教育心理学理论,摸索一套形象记忆法,非常有效。比如,函数的连续可以这样形象描述:函数连续像人的一张脸没有痘痘,皮肤越好说明可导的阶次越高;再如,求旋转体积的题型有 16 类,同时也有 16 个公式,死记困难,作者就编写了四句口诀:

上下原函横面积，
左右反函纵周长；
两轴轮换积分内，
平移减函莫忘记。

再举例向学生解析口诀的含义和使用方法，取得了非常好的效果。其次，灵活使用数形结合与整体视观等等。

《考研数学高等数学必修 17 课》的前期教学实践已经取得了显著的教学效果和良好的社会反响，希望它的出版能为教材基本知识和国家数学考研命题所要求的知识之间架设真正的桥梁，建议读者利用同济 6 或 7 版高数教材，与本书章节同步复习，利用本书提供的方法练习教材的习题，然后再配以历年真题和适量的其他习题集训练。

深度分析和研究教材和历年真题，善于提炼新的考研数学出版物精华，勤于总结创新，利用先进的教育心理学成果，利用文学备忘，不遗余力更新新一年的著作。这些工作除了耗费大量的精力和时间外，还要求辅导老师呕心沥血于教学实践，才能得到理想的辅导效果。

古人云“蒿草之下，或有兰香；茅茨之屋，或有良将”。我们考研界的每个教师如能相互学习，不断切磋业务和教学艺术，共同为莘莘考研学子投入智慧和心力是作者最大的心愿。

书中笔误和错误在所难免，希望广大考生和同行批评指教，作者将不断完善。

杨超 陈秋成
2015 年 3 月

目 录

第 1 课 函数极限与连续	(1)
第一节 映射与函数	(1)
第二节 数列的极限	(8)
第三节 函数的极限	(16)
第四节 无穷小与无穷大	(18)
第五节 函数极限的计算方法	(22)
第六节 函数的连续与间断	(31)
第七节 闭区间上连续函数的性质	(33)
第 2 课 一元函数微分学	(36)
第一节 导数的概念	(36)
第二节 一元函数求导十法	(44)
第三节 函数的微分	(51)
第 3 课 函数的十种性态	(55)
第 4 课 微分中值定理	(66)
第一节 等式的证明	(66)
第 5 课 微分中值定理不等式证明	(87)
第 6 课 零点问题的证明	(93)
第 7 课 一元函数积分学	(100)
第一节 原函数、变限积分与不定积分	(100)

第二节 定积分	(115)
第三节 反常积分	(128)
第四节 定积分的应用	(133)
第 8 课 微分方程	(147)
第一节 常微分方程解的共性理论	(147)
第二节 六类一阶方程的解法	(150)
第三节 各类二阶及高阶常微分方程的求解	(159)
第 9 课 向量代数与空解几何(数学一)	(166)
第一节 向量代数	(166)
第二节 直线方程的三基及其拓展	(171)
第三节 平面方程的三基及其延拓	(172)
第四节 曲面及其方程	(179)
第 10 课 多元函数微分学	(187)
第一节 全面极限	(187)
第二节 二元函数的五性关系	(190)
第三节 复合函数偏导的求法	(201)
第四节 多元函数微分学的几何应用(数学一)	(210)
第五节 二元函数的极值	(216)
第 11 课 二重积分	(224)
第一节 二重积分的定理与对称性	(224)
第二节 二重积分的计算方法	(230)
第 12 课 三重积分(数学一)	(244)
第 13 课 两类曲线积分(数学一)	(256)

第一节 两类曲线积分的对称性	(256)
第二节 第一类曲线积分的计算方法	(259)
第三节 第二类曲线积分的计算方法	(263)
第 14 课 两类曲面积分(数学一)	(274)
第一节 两类曲面积分的对称性	(274)
第二节 第一类曲面积分的计算方法	(275)
第三节 第二类曲面积分的计算方法	(279)
第四节 空间曲面表面积的计算方法	(288)
第 15 课 无穷级数(数学一、三)	(291)
第一节 级数的收敛性	(291)
第二节 同号级数敛散性的判据与常用技巧	(294)
第三节 变号级数敛散性的判据与常用技巧	(301)
第四节 幂级数	(305)
第 16 课 傅立叶级数(数学一)及无穷级数的证明	(320)
第 17 课 边际、弹性与差分方程(数学三)	(331)
第一节 导数的经济学应用——边际与弹性	(331)
第二节 差分方程(数学三)	(338)

第1课 函数极限与连续

第一节 映射与函数

一、区间、定义域与邻域

数学中区间、定义域和邻域使用集合来表示. 集合是指具有某种特定性质的事物总体, 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 集合主要有两种表示方法, 一种是列举法: 如 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; 另一种为描述法: 如 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 区间、邻域和定义域是三类特殊的集合.

区间形式为 $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$ 四种情形, 其中规定 $a < b$, 区间长度 $b - a \neq 0$.

定义域形式与区间形式一致, 唯一不同的是规定 $a \leq b$, 即长度可以等于零, 因此定义域可以是离散点, 比如函数 $y = \sqrt{\cos x - 1}$ 的定义域就是一系列离散的点 $x_k = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$. 基本初等函数的定义域长度都不为零, 而初等函数定义域长度可能为零, 所以, 基本初等函数在其定义域内无条件连续, 而初等函数只能在其定义区间内连续.

邻域分为有心和去心, x_0 点的有心邻域简称邻域, 表示为 $0 \leq |x - x_0| < \delta$, 其中 $\delta > 0$ 的任意实数, 而去心邻域表示为 $0 < |x - x_0| < \delta$, 注意 δ 可小可大, 不过, 在很多数学问题中, 大的 δ 对问题解答无影响, 常取 $0 < \delta < 1$ 的情形. 另外还有左邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和右邻域 $(x_0, x_0 + \delta)$.

二、映射与函数

2.1 函数是实数集之间的一类特殊映射

设两个非空集合 X, Y , 如果存在一个对应法则 f , 使得对 X 中的每个元素 x , 按照法则 f , 在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应, 则称 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射, 记作 $f: X \rightarrow Y$ 或记为 $y = f(x)$. 其中 y 称为映射 f 下 x 的像, x 称为映射 f 下 y 的逆像或原像; 集合 X 为映射 f 的定义域, 记为 D_f , 显然 $D_f = X$, 集合 X 中全部元素 x 在集合 Y 中的像称为映射 f 的值域, 记为 R_f , 由于集合 Y 中除了集合 X 对应的像外, 可能还有其余元素, 故一般 $R_f \neq Y$, 但 $R_f \subseteq Y$.

如对集合 X 中任意两个元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像也满足 $y_1 \neq y_2$, 则称 f 为单射; 如果 $R_f = Y$ 则称 f 为满射; 同时满足单射和满射称为一一映射, 此时的 f 是可逆映射, 其特征是两个集合中的元素一一对应.

如果上述集合 X, Y 中的元素都是实数, 且为满射, 则这种映射称为函数, 记作 $y = f(x)$, x 的取值范围称为函数的定义域 D_f , y 的取值范围称为函数的值域 R_f ,





集合 $X = D_f, Y = R_f$.

函数本质上是一种特殊的映射,它是一个动态的概念,函数对应的实体并不是变量,而是两个实数集,即变量的取值范围,变量符号 X, Y 只是借用的记号罢了,所以,函数用什么符号表示并没关系,而起决定作用的是定义域和对应法则. 对应法则并不抽象,如 $y = 2x + 1$, 则 $2x + 1$ 就是对应法则. 对应法则和变量复合形成复合函数,因变量对自变量的求导需要通过对应法则对复合变量求导作为桥梁. 变量复合形成的复合函数,如 $y = f(2x + 1)$, 其中 $2x + 1$ 称为复合变量; 对应法则复合形成的复合函数,如 $y = f(g(x))$, 其中 $u = g(x)$ 称为内层函数, $y = f(u)$ 称为外层函数; 对应法则和变量同时复合形成的复合函数,如 $y = f(g(2x + 1))$. 变量的复合又分为显式复合和隐式复合,显式复合如 $y = f(2x + 1)$, 特征是自变量和因变量分别位于等式的两边,隐式复合如 $y = f(x + y)$, 特征是自变量和因变量混合位于等式的两边,从而形成显式复合函数和隐式复合函数.

当 f 是可逆映射时,函数 $y = f(x)$ 存在反函数,反函数对应法则记号一般使用 f^{-1} 或另一个字母比如 g 表示,且满足对偶性 $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, 在求得反函数后一般还需要交换 x, y 两个变量,以保证习惯上使用 x 表示自变量.

【例 1】 设 $x^2 + y^2 = 1$, 讨论 y 与 x 的函数关系.

【解】 根据函数的概念,函数是实数集合之间的满射,映射首先要求,对 X 中的每个元素 x , 按照对应法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,显然方程 $x^2 + y^2 = 1$ 不满足映射条件,故 y 与 x 没有函数关系. 但若把 y 分为两个区间 $y \geq 0$ 和 $y < 0$, 则在每个区间内 y 与 x 存在函数关系. 函数标准表示法 $y = f(x)$ 一般称为显式函数,而 $x^2 + y^2 = 1$ 在每个区间内属于隐式表示,为隐函数,即 y 隐含为 x 的函数,这一点在求导时要特别注意.

隐函数存在定理: 若 $F(x, y, z) = 0$, 且 $F(x, y, z)$ 具有连续偏导数,当 $F_z(x, y, z) \neq 0$ 时可以唯一确定一个连续且具有连续偏导的函数 $z = z(x, y)$, 同理,若 $F_x(x, y, z) \neq 0$ 时可以唯一确定一个连续且具有连续偏导的函数 $x = x(y, z)$.

【例 2】 设 $f(x)$ 一阶可导, $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$, 求 $f'(1)$.

【解】
$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3x, \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 3.$$

【例 3】 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 求 $f\left(2x + \frac{1}{2}\right) + f(2x - 1)$ 的定义域.

【解】
$$\begin{cases} -1 < 2x + \frac{1}{2} < 1, \\ -1 < 2x - 1 < 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}, \\ 0 < x < 1, \end{cases}$$

则所求函数的定义域为 $0 < x < \frac{1}{4}$.

【例 4】 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 求 $\varphi(x)$ 的解析式及其定义域.

【解】 依题意得 $\sin\varphi(x) = 1 - x^2$, $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$.

由 $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$ 可知 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

故 $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$, $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

注意函数的复合要点是: 将内层函数代入外层函数的表达式和外层函数的定义域, 然后分别联立内层函数的值域和定义域不等式组, 求得复合函数的定义域和分段表达式.

【例 5】 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【解】 将内层函数 $g(x)$ 代入外层函数的表达式和定义域,

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1-g(x), & g(x) \leq 0, \\ g(x)+2, & g(x) > 0. \end{cases}$$

(1) 由 $\begin{cases} g(x) \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$ 得 $g(x) = -x \leq 0$ 即 $x \geq 0$, 所以 $x \geq 0$ 时 $f[g(x)] = 1+x$.

(2) 由 $\begin{cases} g(x) > 0, \\ x < 0 \end{cases}$ 即 $g(x) = x^2 > 0$ 得 $x < 0$,

所以 $x < 0$ 时, $f[g(x)] = x^2 + 2$.

故

$$f[g(x)] = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0, \\ 1 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

【例 6】 设 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $\psi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$

试求 $\varphi[\psi(x)]$, $\varphi\{\varphi[\varphi(x)]\}$.

【解】(1) 由于 $\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, & |\psi(x)| \leq 1, \\ 0, & |\psi(x)| > 1, \end{cases}$

且仅当 $|x| = 1$ 时, $\psi(x) = 1$; $|x| \neq 1$ 时, $1 < \psi(x) \leq 2$;

则 $\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| \neq 1. \end{cases}$

(2) 由于 $\varphi[\varphi(x)] = \begin{cases} 1, & |\varphi(x)| \leq 1, \\ 0, & |\varphi(x)| > 1, \end{cases}$ 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$,

故 $\varphi[\varphi(x)] \equiv 1$,

于是

$$\varphi\{\varphi[\varphi(x)]\} \equiv 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

【例 7】 求 $y = \sin x$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 的反函数.





【解】三角正弦函数定义在 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 区间上存在反函数,故必须把原区间

平移

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} y = \sin x = \sin(\pi - x) &\Rightarrow \pi - x = \arcsin y \\ &\Rightarrow x = \pi - \arcsin y \\ &\Rightarrow y = \pi - \arcsin x. \end{aligned}$$

【例8】设 $f(x) = \sin x |\sin x|$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, 求 $f^{-1}(x)$.

$$\text{【解】} y = f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\sin^2 x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1, \\ -\arcsin \sqrt{-y}, & -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \arcsin \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\arcsin \sqrt{-x}, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

【例9】设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数,求 $2f(3x+1)$ 的反函数.

【解】令 $y = 2f(3x+1) \Rightarrow \frac{y}{2} = f(3x+1)$, 两边作用 g 得

$$g\left(\frac{y}{2}\right) = g(f(3x+1)) = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\left(g\left(\frac{y}{2}\right) - 1\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).$$

2.2 四个常用的经典分段函数

$$(1) \text{绝对值函数 } y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \text{重要关系: } |x| = x \operatorname{sgn} x. \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

符号函数在积分或求导中可以视为常数处理,比如:

$$(x^k |x|)' = (x^{k+1} \operatorname{sgn} x)' = (k+1)x^k \operatorname{sgn} x = (k+1)x^{k-1} |x|,$$

$$\int |x| dx = \int x \operatorname{sgn} x dx = \operatorname{sgn} x \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sgn} x + c = \frac{1}{2} x |x| + c.$$

(3) 取整函数 $y = [x]$

即取不大于 x 的最大整数,简称“取近小”,即取距离 x 最近的小于等于 x 的第一个整数.

如 $[1] = 1, [1.01] = 1, [-1.01] = -2, [0.01] = 0, [-0.01] = -1$.

一般地 $\lim_{x \rightarrow k^+} [x] = k; \lim_{x \rightarrow k^-} [x] = k - 1; [x + n] = [x] + n$, 其中 k 为整数, n 是正整数.

(4) 狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} (\text{即 } x \text{ 为有理数}), \\ 0, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} (\text{即 } x \text{ 为无理数}), \end{cases}$ 注意任何两个有

理数之间有无穷个无理数, 任何两个无理数之间有无穷个有理数. 狄利克雷函数主要用于举反例中.

2.3 函数的四个基本性质

(1) 函数有界性

设函数定义域为 D_f , 数集 $D \subset D_f$, 任意 $x \in D, \exists$ 数 $K, f(x) \leq K$, 则函数在 D 上有上界; $f(x) \geq K$ 函数在 D 上有下界; $|f(x)| \leq K$ 函数在 D 上有界.

如果对于任何正整数 M , 总 $\exists x_1 \in D \Rightarrow f(x_1) > M$, 则函数在 D 上无界.

(2) 函数单调性

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调增加; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调减少.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调不减; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调不增.

(3) 函数奇偶性

若 $f(-x) = f(x)$ 称为偶函数, 偶函数的特征是关于 y 轴对称; 若 $f(-x) = -f(x)$ 称为奇函数, 奇函数的一个重要性质是 $f(0) = 0$. 奇函数求导一次后变为偶函数, 偶函数求导一次后变为奇函数; 奇函数积分一次后变为偶函数, 偶函数积分一次后不一定变为奇函数, 如 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ 就不是奇函数.

【例 10】 验证函数 $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ 为奇函数, 其中 $x \in (-1, 1)$.

【解】 $f(-x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$,

所以 $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ 为奇函数.

(4) 函数周期性

$f(x+T) = f(x)$ 称为周期函数, 函数的周期 T 是指最小的正周期.

如 $f(x) = x - [x]$,

因为 $f(x+n) = (x+n) - [x+n] = (x+n) - ([x]+n)$
 $= x - [x] = f(x)$,

故 $f(x)$ 为周期函数, 最小正周期为 1. 有些函数没有最小正周期, 例如狄利克雷函数.





三角函数 $\sin(ax+b)$ 周期为 $T = \frac{2\pi}{|a|}$; $\tan(ax+b)$ 周期为 $T = \frac{\pi}{|a|}$; 两个周期函数和差的周期必须是以 π 为单位的最小公倍数, 如 $\sin 2x + \tan 3x$ 的周期为二者的最小公倍 3π ; 而 $\sin 2\pi x + \tan 3x$ 为非周期函数. 周期函数的重要性质是求导不改变其周期, 任意周期积分相等.

【例 11】 设 $f(x)$ 为定义在区间 $[0, 10]$ 上周期为 5 的可导奇函数, $f'(x-1) = 2x$, 求 $f(9)$.

【解】 奇函数性质得

$$\begin{aligned} f(0) = 0, f(-x) = -f(x), f'(x-1) = 2x &\Rightarrow f'(x) = 2(x+1) \\ \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 + C \xrightarrow{f(0)=0} f(x) = (x+1)^2 - 1 &\Rightarrow f(1) = 3 \\ \Rightarrow f(9) = -f(-9) = -f(-9+10) = -f(1) &= -3. \end{aligned}$$

【例 12】 讨论狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q}, \\ 0, x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ 的周期性、单调性和有界性.

【解】 (1) 对于任意有理数 $r \neq 0$, 有 $x+r = \begin{cases} \text{有理数}, x \text{ 为有理数}, \\ \text{无理数}, x \text{ 为无理数}, \end{cases}$ 对于任意的实数 x , 有 $D(x+r) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数}, \\ 0, x \text{ 为无理数} \end{cases} = D(x)$, 故任意非零有理数 r 都是它的周期. 但任意无理数都不是 $D(x)$ 的周期, 因为任取无理数 α ,

$$D(-\alpha) = 0 \Rightarrow D[\alpha + (-\alpha)] = D(0) = 1 \neq D(-\alpha).$$

(2) 对于任意的有理数 x_1 和无理数 x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 或 $x_1 < x_2$ 都有 $D(x_1) = 1 > 0 = D(x_2)$, 故不具有单调性.

(3) $|D(x)| \leq 1$, 故 $D(x)$ 是全体实数 \mathbf{R} 上的有界函数.

2.4 六个基本初等函数

(1) 幂函数 $y = x^\alpha$ [$0 < \alpha < 1$, 或 $\alpha = 1$, 或 $\alpha > 1$, 或 $\alpha < 0$, 并掌握对应的 4 个曲线图形].

(2) 指数函数 $y = a^x$ [$a > 0, a \neq 1, x \in (-\infty, \infty)$], 并掌握对应的 2 个曲线图形.

(3) 对数函数 $y = \log_a x$ [$a > 0, a \neq 1, x \in (0, \infty)$], 一般使用 $y = \ln x$ 形式.

(4) 三角函数

$$\begin{cases} y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty); \cos x, x \in (-\infty, +\infty); \tan x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; \\ \cot x, x \neq k\pi; \sec x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; \csc x, x \neq k\pi. \end{cases}$$

(5) 反三角函数 $y = \arcsin x$ [$x \in [-1, 1], y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$];

$y = \arccos x$ [$x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$];

$$y = \arctan x \quad [x \in (-\infty, \infty), y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})];$$

$$y = \operatorname{arccot} x \quad [x \in (-\infty, \infty), y \in (0, \pi)].$$

(6) 常数函数 $y = \operatorname{const}$.

必须掌握 6 个基本初等函数图形, 因为从图形中很容易看出他们的定义域与值域及其渐近线.

由 6 个基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合并能用一个数学式子表达出来的函数称为初等函数; 否则, 称为非初等函数.

$$\text{如 } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} = 1 - |x-1| \text{ 为非初等函数, 因绝对值不属}$$

于四则运算.

又如 $f(x) = x - [x] = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x < 2, \end{cases} x \in [0, 2)$ 为非初等函数. 而 $y = e^{-x^2}$ 等就是初等函数.

2.5 常用的三对双曲函数与反双曲函数

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in (-\infty, +\infty), \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in (-\infty, +\infty)$, 单增奇函数.

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in (-\infty, +\infty), \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \in [1, +\infty)$, 单增函数.

$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in (-\infty, +\infty), \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1)$, 单增奇函数.

2.6 考研数学常用四类不等式

◎ 三角形不等式: $||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$, 其中 a, b 为任意实数.

◎ 三角函数不等式: $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \leq \tan x$, 其中 $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

◎ 取整函数不等式: $x-1 < [x] \leq x$, 其中 x 为任意实数.

◎ 平均值不等式: $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \geq \frac{2}{(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$, a, b 均为任意实数.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}, a, b \text{ 均为正数.}$$





第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列, 如果存在常数 a , $\forall \epsilon > 0$, \exists 正整数 N , 使得 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

○○○ 数列极限定义隐含的信息如下 ○○○

1. 数列是序列, 是点集的子集, 即能用通式表达出来的点集, 一般的点集是不能用通式表达出来. 如点集 $A = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, 但我们可以选择其中的子集 $A_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$, 显然 A_1 是一个数列, 它存在极限 0, 这个极限 0 称为点集 A 的聚点.

2. $|x_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, 相当于只有位于 $x = a \pm \epsilon$ 之间的 x_n 取值有作用, 之外的取值与数列的极限没有关系, 故数列极限可以等价描述为下列两种形式:

$\forall \epsilon > 0$, \exists 正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有无限个点落在区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内; 或等价描述为

$\forall \epsilon > 0$, \exists 正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有限个点落在区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 外.

3. 显然, ϵ 大对极限无影响, 所以一般只讨论 $0 < \epsilon < 1$ 的情形, 且 ϵ 取值是任意的, 而 N 取值受 ϵ 限制, 这种因果关系不可颠倒.

4. 极限的趋向变量 $n \rightarrow \infty$ 是逼近, 不是等于, 是近似值, 而极限的结果是等于, 是精确值.

5. 使用极限定义做题方法是倒推法.

【例 13】 下述说法中与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义等价的是 ().

(A) $\forall \epsilon \in (0, 1)$, $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $|x_n - a| \leq 100\epsilon$

(B) $\forall \epsilon > 1$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$

(C) $\forall N$, $\exists \epsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$

(D) $\exists N$, $\forall \epsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$

【解】 选(A).

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义: 对于数列 x_n , 存在常数 a , 使得对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 存在自然数 N , 使当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立.

(A) 选项与上述定义等价, 因为 $\epsilon > 0$ 具有任意性, 100ϵ 也具有任意性.

(B) 选项因为 $\epsilon > 1$ 不能保证 ϵ 为任意小, 从而由 $|x_n - a| < \epsilon$ 不能保证 x_n 与 a 无限接近.

(C) 选项中的 ε 是存在性, 与定义的任意性不符.

(D) 选项如果存在自然数 N , 使对 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 这说明数列 x_n 有极限 a , 说明(D) 是上述定义的充分条件. 但反之如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 不一定能找到那样的 N (它可能与 ε 无关. 这一要求比 N 与 ε 有关的要求更高), 使对任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 因为在定义中 N 是依赖于 ε 的给定而确定的. 因而(D) 不是上述定义的必要条件. 故选(A).

【例 14】 设 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ().

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

【解】 选(D).

由数列极限的定义, 数列 $\{a_n\}$ 的极限关心的是 a_n 在某个 N (足够大) 之后的性质, 前面的有限多项则无关紧要. 因此(A), (B) 中“任意 n ”的条件显然不成立. “ $0 \cdot \infty$ ”型的极限是未定式, (C) 不成立, 故选(D).

事实上, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 时, 由无穷大量的定义得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$.

如举反例: 取 $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = 1$, $c_n = \frac{n}{2}$, 则可以直接排除(A), (B), (C).

二、数列极限的性质

2.1 唯一性

$\{x_n\}$ 收敛, 则极限唯一. 如 $\{x_n\} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 在考研数学范畴, 视极限不存在, 因为 ∞ 是个变量, 违背极限唯一性.

极限存在的充要条件是左右极限存在并相等, 例如 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$ 不存在.

若极限存在, 则任意子列极限有相同的极限, 若极限不存在, 则任意子列极限未必不存在, 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 极限不存在, 而子列 $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2n\pi \sin 2n\pi = 0$. 极限存在;

而 $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \infty$ 极限不存在.

去掉有限个项不影响数列极限的收敛性, 去掉无限项影响极限的收敛性.

极限的唯一性是沟通数列极限和函数极限的桥梁, 由于函数极限也存在唯一性, 常常把数列极限转化为函数极限来求, 因为函数极限求法的手段较多, 增加了解决问题的方便.

