面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

大学数学

线性代数及其应用

第三版

主编　邓泽清　邹庭荣

高等教育出版社

面向21世纪课程
Textbook Series for 21st Century

大学数学

DAXUE SHUXUE

线性代数及其应用

第三版

主编 邓泽清 邹庭荣

副主编 沈婧芳 孙玲琍 陈海英 李 燕

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版是普通高等教育“十五”国家级规划教材。第二版作为系列课程教材，曾荣获2005年高等教育国家级教学成果二等奖。此次修订，除保持第一、二版的特色外，对部分章节的内容进行了调整、重组。

本书主要内容有行列式、矩阵、线性方程组与向量组的线性相关性、矩阵的对角化与二次型。本书以矩阵为主线，突出矩阵的运算、化简及矩阵的秩和特征值的计算，突出用矩阵方法研究线性方程组、二次型和经济模型；本书对于抽象的理论，总是从具体问题入手，再将其推广到一般情形，而略去了很多繁琐、冗长的理论推导，便于学生理解和接受。

本书可供高等农林院校本科各专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.线性代数及其应用／邓泽清，邹庭荣主编.--3版.--北京：高等教育出版社，2015.3
ISBN 978-7-04-042069-2

Ⅰ.①大… Ⅱ.①邓… ②邹… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O13 ②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第023109号

策划编辑 李 茜　责任编辑 李 茜　封面设计 张 楠　版式设计 范晓红
插图绘制 黄建英　责任校对 刘丽娴　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 大厂益利印刷有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 8.75
字 数 150千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2001年1月第1版
2015年3月第3版
印 次 2015年3月第1次印刷
定 价 14.80元

物 料 号 42069-00

面向21世纪课程教材

普通高等教育“十五”
国家级规划教材

第三版前言

本书第二版自2006年出版以来，使用本教材的教师和学生对教材提出了一些宝贵的意见和建议，根据这些意见和建议，我们对第二版的内容进行了适当的调整，调整的内容有：

(1) 将行列式单独作为一章；

(2) 将线性方程组与向量组的线性相关性合并为一章；

(3) 删去了线性规划的大部分内容；

(4) 将线性代数在生物学和经济学中的应用作为附录，供相关专业选用。

许多中青年教师参与了本书的修订工作。华中农业大学楚天学院陈海英副教授编写了第1章，华中农业大学李燕副教授编写了第2章，沈婧芳副教授编写了第3章，孙玲琍副教授编写了第4章，夏静波副教授、胡动刚博士编写了线性代数在经济学中的应用。

邓泽清教授、邹庭荣教授审查并修改了全部书稿。

本书由邓泽清教授、邹庭荣教授任主编，沈婧芳副教授、孙玲琍副教授、陈海英副教授、李燕副教授任副主编。

编　者

2014年于华中农业大学

第二版前言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，也是全国教育科学“十五”国家规划课题之子课题“21世纪中国高等学校农林类专业数理化基础课程的创新与实践”和高等教育出版社“高等教育百门精品课程建设计划”立项研究项目的研究成果。

本书第一版自2001年出版以来，我们和一些兄弟院校用它作为教材，根据各校使用的情况，在广泛听取教师和读者意见的基础上，结合编者的教学实践和体验，对第一版进行了认真的修订。这次修订，将第一章中矩阵的初等变换调至第2章，将第2章中线性方程组解的结构调至第3章，删去了向量的几何表示，增加了向量空间的内容，并增加了部分习题。此外，考虑到专业特点和教学时数，将部分内容列入选学内容并加了 * 号。

本书第二版由华中农业大学、湖南农业大学、河南农业大学、山东农业大学、长江大学及贵州大学合编。邓泽清任主编，朱倩军、周铁军、曹殿立、王云诚、刘新卫、周永辉任副主编，刘承平、董锐参加了编写和修订工作。

在第二版出版之际，我们谨在此向关心本书和对本书提出宝贵意见的教师和读者表示衷心的感谢，并向关心、支持本书出版工作的高等教育出版社、华中农业大学教务处、兄弟院校及高等教育出版社理工分社策划编辑李蕊小姐表示衷心的感谢。

尽管我们对本书进行了认真的修订，但仍会有不妥之处，请使用本教材的教师和读者批评指正。

编　者

2004年于华中农业大学

第一版前言

1995年原国家教委适时推出了“高等农林教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”。从1995年开始,我们经历了申报、立项、制订改革方案和试验等过程。在教委高教司的指导下,华中农业大学于1997年和1998年按照新的改革方案进行了两轮试验。在邓泽清、朱倩军主编《线性代数》教材的基础上,又将线性代数的杰出应用成果(投入产出模型和线性规划模型)和数学建模、数学实验纳入教学内容。在试用两轮之后,又征求多方面意见,反复修改、仔细推敲而成为现在呈现在读者面前的这本“面向21世纪课程教材”。

线性代数的教学有两大难点:一是概念、理论抽象,二是计算量大。近年出版的国内、国外教材均在这两个方面做了许多工作。我们也试图从这两个方面进行突破,本教材就是我们改革思路和改革工作的结晶。其特点是:

1. 本教材在保留线性代数和线性规划基本内容的基础上,本着重概念、重方法、重应用、重数学意识和能力培养的精神,对课程内容、知识结构进行了较大的调整。它以矩阵为主线,突出矩阵的运算、化简和数字特征,突出用矩阵方法研究线性方程组、二次型和经济模型。

2. 本教材力求将数学、应用、计算机相结合,增加了数学建模、常用软件介绍和数学实验课。

3. 本教材好教好学,根据人的认知特点,在编写上遵循从具体到抽象,从特殊到一般的原则。对于抽象的理论,总是从具体问题入手,再把它推广到一般情形,而略去了很多繁琐、冗长的理论推导,这对于非数学专业学生是合适的。

4. 本教材精选例题、习题、复习题,形成一个小循环,有利于学生消化、巩固和运用所学知识。

本书由邓泽清主编,张凤元、王伯曾、朱倩军任副主编。邓泽清副教授负责编写第1,2章和复习题;朱倩军副教授负责编写第3,5章;王伯曾副教授负责编写第4章;刘承平副教授负责编写第6章和计算机绘图;张凤元副教授负责编写第7,8章;董锐副教授负责编写第9章。

本书由樊启斌审稿。

在本书出版的时候,我们要感谢教育部,是教育部富有远见地推出了“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”,为我们提供了一个参与的机遇。还要感谢教育部高教司、《面向21世纪高等农林教育教学内容和课程体系

改革计划》工作协调指导小组、04-6项目组，以及河北农业大学、湖南农业大学、华中农业大学教务处、理学系、数学教研室等所给予的支持和帮助。

武汉大学教授樊启斌博士在百忙之中为本书审稿，并提出了许多前瞻性与指导性意见，为本书增色不少，我们表示衷心的感谢。

最后，对高等教育出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，对书中的不妥之处，恳请读者和使用本书的教师批评、指正。

编　者

2000年7月于华中农业大学

目　录

第1章 行 列 式

本章主要内容有:行列式的定义,行列式的性质,行列式按行(列)展开公式,行列式的计算,最后介绍克拉默法则.

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

我们学习过二元线性(一次)方程组的解法.设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

将第一个方程乘以 a_{22}减去第二个方程乘以 a_{12},得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

类似地,可以解得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的**元素**,元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为**行标**,表示它位于第 i 行,第二个下标 j 称为**列标**,表示它位于第 j 列.

二阶行列式的左上角至右下角的连线称为**主对角线**,右上角至左下角的连线称为**副对角线**.

由定义知,二阶行列式等于主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积,这种定义行列式的方法称为**对角线法则**.

利用二阶行列式,可以将上述结果表述为:

如果二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

的系数构成的行列式(简称**系数行列式**)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,$$

则此方程组有惟一解,且

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1 求解线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2=4, \\ 3x_1-2x_2=-1. \end{cases}$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-7, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-14,$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=2.$$

1.1.2 三阶行列式

为了求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

定义**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其中前面带“+”号的三项分别为:主对角线上元素的乘积,主对角线上方两个元素与左下角元素的乘积,主对角线下方两个元素与右上角元素的乘积;前面带“-”号的三项分别为:副对角线上元素的乘积,副对角线上方两个元素与右下

角元素的乘积,副对角线下方两个元素与左上角元素的乘积(如图 1.1).

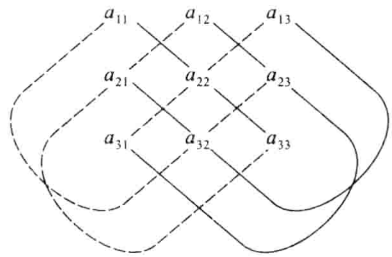

图 1.1

如果方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则此方程组有惟一解,且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中第 j 列得到的三阶行列式.

例 2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

解　由三阶行列式的定义,得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 1\times3\times3+2\times1\times3+3\times2\times4-1\times1\times4-2\times2\times3-3\times3\times3 \\ &= 9+6+24-4-12-27=-4.\end{aligned}$$

1.2　n 阶行列式的定义

定义行列式的对角线法则仅仅适用于二阶、三阶行列式. 为了将行列式的定义推广到四阶或者更高阶的行列式,我们必须从另一种角度考察三阶行列式.

不难发现,三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

是取自不同行不同列的三个元素乘积的代数和. 三个元素的行标按由小到大的次序(称为标准次序)排列,取正号的三项的列标排列为 123,231,312,取负号的三项的列标排列为 132,213,321.

为了弄清符号与列标排列之间的关系,我们引入排列的逆序数的概念.

设有 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$,其中比元素 p_j 大且排在 p_j 前面的元素个数称为**元素 p_j 的逆序数**,记作 t_j,排列中全体元素的逆序数之和称为该**排列的逆序数**,记作 $t(p_1p_2\cdots p_n)$,即 $t(p_1p_2\cdots p_n)=\sum\limits_{j=1}^{n}t_j$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

由排列的逆序数的定义,得

$$t(123)=0+0+0=0,\quad t(231)=0+0+2=2,\quad t(312)=0+1+1=2,$$

故排列 123,231,312 都是偶排列.

$$t(132)=0+0+1=1,\quad t(213)=0+1+0=1,\quad t(321)=0+1+2=3,$$

故排列 132,213,321 都是奇排列.

于是,三阶行列式又可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

类似地,我们可以定义更高阶的行列式.

定义 **n 阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

n 阶行列式是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和,每一项前面的符号由列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数确定.

主对角线下(上)方的元素全为零的行列式称为**上(下)三角形行列式**. 由 n 阶行列式的定义知,上、下三角形行列式等于它们的主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中没有写出的元素均为0.

由 n 阶行列式的定义，不难证明关于副对角线的上、下三角形行列式等于 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 乘以它们的副对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

1.3 行列式的性质

当行列式的阶数较高时，直接用定义计算行列式是很困难的，利用下面介绍的行列式的性质，可以简化行列式的计算.

行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行列互换得到的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}.

性质1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论 如果行列式的两行(列)相同，则此行列式等于零.

证 将行列式 D 中相同的两行互换，得 $D=-D$，故 $D=0$.（证毕）

性质3 行列式某一行(列)的公因子可以提到行列式的外面.

性质4 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式等于零.

(性质4可由性质3和性质2推出.)

性质5 如果行列式的某一行(列)的元素均为两数之和，则此行列式可

以表为两个行列式之和.

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}$.

性质6　将行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变.

(性质6可由性质5和性质4推出.)

为了进一步研究行列式的性质,先引入余子式和代数余子式的概念.

定义　n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列得到的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

由此定义知,余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 与行列式第 i 行、第 j 列的元素的取值无关.

性质7　行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于它的任一行(列)的元素与其代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

上面两个公式称为行列式按一行(列)的展开式.

推论　行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为0,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

证　将行列式 D 中第 j 行的元素换成第 i 行的元素,得到行列式 D_1,D_1 中第 i 行和第 j 行的元素相同,且 D_1 与 D 的第 j 行的代数余子式相同,故

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j).$$

类似可以证明 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$.

下面通过例子来介绍行列式的计算方法和技巧.

例1　计算4阶行列式