

初 中 数 学

教师“过教材关”复习资料

《 贵 州 教 育 》编 辑 室

一 九 八 三 年 八 月

初 中 数 学

教师“过教材关”复习资料

《 贵 州 教 育 》编 辑 室

一 九 八 三 年 八 月

初中数学教师“过教材关”复习资料

编辑：《贵州教育》编辑室

出版：贵州教育杂志社

印刷：贵州工学院刷印厂

(一九八三年八月出版)

目 录

代 数

(一)、有理数、实数.....	(1)
(二)、代数式.....	(12)
(三)、方程和方程组.....	(41)
(四)、不等式和不等式组.....	(75)
(五)、函数及其图象.....	(85)
(六)、指数与常用对数.....	(108)
(七)、统计初步.....	(116)

平面几何

(一)、平面几何的基本知识.....	(123)
(二)、相交线和平行线.....	(136)
(三)、三角形.....	(148)
(四)、四边形.....	(166)
(五)、相似形.....	(176)
(六)、圆.....	(188)

附录：中学数学教学大纲（试行草案）.....	(211)
------------------------	---------

代 数

(一) 有 理 数、实 数

省教研室 张世俊 贵定师范 包志超

一、有 理 数

1. 有理数的有关概念

(1) 自然数

人类最先认识到的数是自然数，即 $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ 。自然数的全体构成自然数集，记作 N 。

自然数可作如下分类：

自然数 $\begin{cases} 1 \\ \text{质(素)数} \\ \text{合数} \end{cases}$

除 1 而外的自然数，凡只能被 1 和它自身整除的，叫质数(或素数)，否则叫合数。

2、7、23、37 等是质数，4、9、15、369 等是合数。1 既不是质数，也不是合数。

自然数虽然简单，但却十分重要。研究自然数的数学分支叫数论。数论中著名的哥德巴赫猜想，就是试图揭示自然数质合分类与奇偶分类间的关系。为了证明这一猜想，不少数学家倾注了毕生的精力。我国数学家陈景润在这方面的研究取得了领先的成果。

自然数集是一个有序集，1 是自然数集的最小元素，自然数集无最大元素。自然数集合是无限集合。由若干个计数单位“1”或较小的自然数，可以组合成一个较大的自然数。任何一个大于 1 的自然数 n ，都可以由若干个较小的自然数组成，而且 n 越大，组合的方式就越多。

从 1 开始，把自然数按照由小到大的顺序排列起来，就得到了自然数列。自然数列中相邻两数的差为 1，所以它是等差数列。

(2) 整 数

负整数是与自然数(正整数)意义相反的数，在任意自然数 n 前添上“-”号，得到的都是负整数。所有负整数的全体构成负整数集，记作 J^- 。

0 既不是自然数，也不是负整数，它是介于两者之间的一个中性数。0 的意义远远不只是在数量上表示“没有”。在中学数学中，我们已看到它有较为丰富的内容。比如对任意 $n \in N$ ， $n+0=n$ ， $n \cdot 0=0$ ， $n^0=1$ ， $0! = 1$ 等。

自然数、0 和负整数统称整数。所有整数的全体构成整数集，记为 J 。

整数可按能否被 2 整除,分为偶数和奇数两类。按照这种分类方法,0 是一个偶数。

(3) 有理数的定义

分数是随着人类生活和生产活动中分配问题的需要而产生的。分数的产生,使数的概念由整数扩大到有理数。

在初中数学课本中,有理数的定义有两种:

定义 1: 整数和分数统称有理数(初中代数第一册第 5 页)。

定义 2: 有限小数和无限循环小数统称有理数(初中代数第三册第 18 页)。

如果将整数看作以 1 为分母的分数,则定义 1 可叙述为:一切形如 $\frac{m}{n}$ 的数,叫有理数(其中 $m, n \in \mathbb{Z}$, 且 $n \neq 0$)。或者可简述为:分数就是有理数。(这里所说的分数是指既约分数,即 m 与 n 互质)。

如果将有限小数(包括整数)看作循环节是 0 的无限循环小数,则定义 2 可简述为:无限循环小数就是有理数。

有理数的全体构成有理数集,记作 $\mathbb{Q}$ 。

可以证明:任意整数或分数都可表示为有限小数或无限循环小数;任意有限小数或无限循环小数都可以表示为整数或分数(证明超出了初中数学教学内容。读者若有兴趣可参看地质出版社出版的“中、小学数学”杂志 1983 年第 1、2 期)。也就是说,关于有理数的两种定义在实质上是一回事。

(4) 数轴、相反数、绝对值

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴。用原点表示数 0,正有理数可用原点右方数轴上的点表示,负有理数可用原点左方数轴上的点表示。这样,所有的有理数都可以用数轴上的点表示。

对于任意有理数 a ,将 a 与 $-a$ 称为互为相反数。互为相反数 a 与 $-a$ 在数轴上表示位于原点两旁,距离原点的长度相等的两点。0 的相反数就是它本身。

对任意 $a \in \mathbb{Q}$,将 $|a|$ 叫做数 a 的绝对值。 $|a|$ 的意义是:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } a = 0 \text{ 时} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

在数轴上, $|a|$ 表示的是数 a 的对应点到原点的长度。

由 $|a|$ 的意义可知:对任意 $a \in \mathbb{Q}$ 有 $|a| \geq 0$ 。

2. 有理数的基本性质

(1) 有理数集是一个有序集,即任意两个有理数可以比较大小。

对任意 $a, b \in \mathbb{Q}$,下面三种关系有且只有一种成立: $a > b$, $a = b$, $a < b$ 。
0 小于一切正有理数,大于一切负有理数;一切正有理数大于一切负有理数;在正有理数中,绝对值大的其值大;在负有理数中绝对值大的其值小。总之,在数轴上位于右方的点表示的有理数大于位于左方的点表示的有理数。

(2) 有理数集具有稠密性。

自然数集和整数集都是离散数集。对任何一个整数（包括自然数），都可以找到与之最邻近的整数。如，与整数零最邻近的整数是 -1 和 1 。而有理数集则不具有这样的性质。例如，要找出与有理数零最邻近的有理数显然是不可能的。

任意两个有理数 a, b ($a < b$)，总存在一个有理数 c ，使得 $a < c < b$ （例如可取 $c = \frac{a+b}{2}$ ）。这就是有理数集的稠密性。它表明有理数在数轴上的分布是处处稠

密的。如 $0, \frac{1}{100} \in \mathbb{Q}$ ，有 $\frac{1}{200} \in \mathbb{Q}$ ，使得 $0 < \frac{1}{200} < \frac{1}{100}$ 。

(3) 有理数集对加、减、乘、除（除数不为零）四种运算具有封闭性，即对任意 $a, b \in \mathbb{Q}$ ，有 $a+b \in \mathbb{Q}$ ， $a-b \in \mathbb{Q}$ ， $ab \in \mathbb{Q}$ ， $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ($b \neq 0$)。

自然数集对减和除两种运算不具有封闭性，如 8 和 15 是自然数，但其差 -7 和商 $\frac{8}{15}$ 就不是自然数；整数集对除的运算也不具有封闭性，如 -5 和 3 是整数，但其商 $-\frac{5}{3}$ 不是整数。

3. 有理数的运算

(1) 有理数的运算定律

基本运算定律指的是加和乘两种运算的交换律、结合律和分配律。对任意 $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ，有

交换律： $a+b=b+a$ ， $a \cdot b=b \cdot a$ ；

结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ ， $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ ；

分配律： $(a+b) \cdot c=ac+bc$ 。

(2) 有理数的运算法则

有理数加、减、乘、除、乘方的运算法则可类比算术数（自然数、零和正分数）的运算法则而得到，所不同的是其中的符号法则。这里就不再赘述。

在初中课本中，加法和乘法的法则是由定义给出的，它们的合理性可以用实际事例来说明。减法和除法分别被定义为加法和乘法的逆运算，由此导出的运算法则可以用定义和运算定律加以证明。

例如，有理数减法法则是：设 a, b 是任意有理数，则 $a-b=a+(-b)$ 。

证明：

根据逆运算的意义， $a-b$ 是这样一个数，它与 b 之和等于 a ，即

$$b+(a-b)=a.$$

再由交换律和结合律

$$b+[a+(-b)]=[b+(-b)]+a=a$$

故 $a-b=a+(-b)$ 。

同理可证，若 $a, b \in \mathbb{Q}$ ，则 $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$ 。

应该指出，在初中代数教材中，对有理数的减法和除法法则并没有进行证明，是用实例说明的。

(3) 有理数混合运算的运算顺序
 习惯上将加减运算作为一级运算，乘除运算作为二级运算，乘方开方运算作为三级运算。

有理数混合运算的运算顺序是：由高级运算到低级运算；如有括号，先解小括号，后解中括号，再解大括号；如果只有同级运算，就从左到右依次进行运算。

4. 例 题

例 1. 当 a 为什么整数时，方程 $(a+1)x=4x+3$ 的解满足下列条件：(1) 正整数；(2) 整数；(3) 正数；(4) 负数；(5) 不存在。

解：由原方程 $(a+1)x=4x+3$ ，得

$$(a-3)x=3, \text{ 当 } a \neq 3 \text{ 时, } x=\frac{3}{a-3}.$$

(1) 若 x 为正整数，则

$$a-3=1, \text{ 或 } a-3=3.$$

$$\therefore a=4, \quad a=6;$$

(2) 若 x 为整数，则

$$a-3=1, a-3=-1, a-3=3, a-3=-3,$$

$$\therefore a=4, \quad a=2, \quad a=6, \quad a=0;$$

(3) 若 x 为正数，则 $a-3>0$ ，

$$\text{即 } a>3.$$

$\therefore a$ 为大于 3 的整数；

(4) 若 x 为负数，则 $a-3<0$ ，

$$\text{即 } a<3$$

$\therefore a$ 为小于 3 的整数；

(5) 当 $a-3=0$ ，即 $a=3$ 时，

方程为 $0 \cdot x=3$ ，方程的解不存在。

例 2：试证明任意两个有理数的和、差、积、商（除数不为 0），必是有理数。

证明：设任意 $a, b \in Q$ ，根据有理数的定义，有

$$a=\frac{m_1}{n_1}, \quad b=\frac{m_2}{n_2} \quad (\text{其中 } m_1, n_1, m_2, n_2 \in J)$$

$$a+b=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}=A$$

$$a-b=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{n_1n_2}=B$$

$$a \cdot b=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}=C$$

$$a \div b=\frac{m_1n_2}{n_1m_2}=D \quad (b \neq 0)$$

A 、 B 、 C 、 D 四数均可以表示为两个整数的比的形式，所以 A 、 B 、 C 、 D 也是有理数。

∴ 任意两个有理数的和、差、积、商（除数不为0）必是有理数。

例3：在数轴上表示数 a 、 b 、 c 的点如图，试化简 $|a| - |a+b| + |c-a| + |b+c|$



解：原式 $= -a + a + b + c - a - b - c$
 $= -a$

例4：解方程 (1) $|x+2| + |y-3| = 0$

(2) $|x+2| + |x-3| = 7$

解：(1) 根据绝对值的性质

有 $|x+2| \geq 0$, $|y-3| \geq 0$

欲使 $|x+2| + |y-3| = 0$,

须且只须 $\begin{cases} |x+2| = 0 \\ |y-3| = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+2 = 0 \\ y-3 = 0 \end{cases}$

∴ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

(2) 由绝对值的定义，有

$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{当 } x \geq -2 \text{ 时} \\ -(x+2) & \text{当 } x < -2 \text{ 时} \end{cases}$

$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{当 } x \geq 3 \text{ 时} \\ 3-x & \text{当 } x < 3 \text{ 时} \end{cases}$

当 $x \geq 3$ 时，原方程变为

$$x+2+x-3=7 \quad \therefore x=4$$

当 $-2 < x < 3$ 时，原方程变为

$$x+2+3-x=7 \quad \therefore \text{方程无解}$$

当 $x \leq -2$ 时，原方程变为

$$-x-2+3-x=7, \quad \therefore x=-3$$

∴ 原方程的解是 $x=4$ 或 -3 。

例5：计算 $-12\frac{7}{9} - \left[\left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + (-1) \div 0.2 - (-0.2)^2 \right]$

解：原式 $= -12\frac{7}{9} - \left[\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{16}{25} - 5 - \frac{1}{25} \right]$

$$= -12\frac{7}{9} + 6$$

$$= -6\frac{7}{9}$$

练习 题

1. 举出两个具有相反意义的量，并用正负数表示。
2. 如果只有整数，能计算 $3 \div 4$ 吗？有了分数呢？
3. 如果只有正数，能计算 $3 - 4$ 吗？有了负数呢？
4. 零是有理数吗？是正数吗？是负数吗？是整数吗？是分数吗？
5. 正整数中有没有最小的数？有没有最大的数？负整数中呢？整数中呢？
6. 正数中有没有最小的数？有没有最大的数？负数中呢？有理数中呢？
7. “数轴上的每一个点都表示一个有理数”这句话对吗？为什么？
8. $|a-b|$ 的几何意义是什么？
9. 化简 $-(-5)$ 和 $-|-5|$ ，并说明它们的区别。
10. 已知 $|x-1| + |y+2| = 0$ ，求 x, y 。
11. $|ab| = -ab$ 成立的条件是什么？
12. $|a| + |b| = |a+b|$ 成立的条件是什么？
13. 写出绝对值大于 4 而不大于 9 的所有整数。
14. 化简 $|-x^2 + 2x - 5| + |3x^2 + 6x + 4| + |x^2 - 3x + 2|$ 。
15. 如果两数之和或差为零，那么这两数的绝对值之间有什么关系？
16. 如果两数的绝对值相等，那么这两个数的平方相等吗？反过来呢？
17. a 是什么数时， $\frac{1}{|a-2|+1}$ 有最大值或最小值？这个值是多少？
18. a 是什么数时，下列式子成立？
 (1) $|a| > -a$ ； (2) $a^2 > a$ ； (3) $\frac{a}{|a|} = -1$ ；
19. $5 - 3^2 \times 4$ 和 $(5-3)^2 \times 4$ 以及 $(5-3^2) \times 4$ 的运算顺序有什么不同？
20. 举例说明什么叫加法交换律。
21. 举例说明什么叫加法结合律。
22. 举例说明什么叫乘法交换律。
23. 举例说明什么叫乘法结合律。
24. 举例说明什么叫乘法对加法的分配律。
25. 应用运算定律计算 $(-2)\left(-\frac{5}{7}\right)\left[(-50)\left(1\frac{2}{5}\right)\right]$ 。
26. 如果两数之和是正数，能不能肯定这两个数都是正数？能不能肯定这两个数中至少有一个是正数？为什么？
27. 计算：
 - (1) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 - (-6.5) \times \frac{12}{13} + (-2)^4 \div [(-2)^3 + 2]$;
 - (2) $\left(41\frac{23}{83} - 40\frac{49}{60}\right) \times \left\{ \left[4 - 3\frac{1}{2} \times \left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5} \right) \right] \div 0.16 \right\}$;
 - (3) $\frac{\left(1.75 \div \frac{2}{3} - 1.75 \times 1\frac{1}{8} \right) \div \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0.0325 \right) \div 400} \div (0.3 + 6.79 \div 0.7)$.

二、实数

1. 无理数

在测量中，提出了这样一个问题：以正方形的一边作单位长，去测量对角线的长度，根据勾股定理，对角线的长应是 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{2}$ 是不是有理数呢？即 $\sqrt{2}$ 是否可表示为两个整数之比呢？

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，即可设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ($m, n \in J, n \neq 0$, 且 m, n 互质)。将

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ 两边平方得

$$m^2 = 2n^2, \dots\dots\dots (1)$$

即 m 是偶数 (如果一个整数的平方是偶数，则这个整数须为偶数)

设 $m = 2P$ ($P \in J$) $\dots\dots\dots (2)$

将 (2) 式代入 (1) 式有 $n^2 = 2P^2$ ，即 n 也是偶数，这与 m, n 互质相矛盾。

$\therefore \sqrt{2}$ 不能表示为 $\frac{m}{n}$ 的形式，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

以单位长为正方形的一边，则这个正方形的对角线的长为 $\sqrt{2}$ ，这条线段在数轴上是容易作出的。即数轴上实际存在着与数 $\sqrt{2}$ 对应的点。

以上事实说明，有这样的数存在，它在数轴上有对应的点，然而它不是有理数。

同时我们还可以证明圆周率 π 、数 e ($e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n, n \in N$) 以及 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{11}$ 、 $\lg 2$ 等都不是有理数。而且这类数还有一个共同特点，它们通过一定的方法，都可以表示为无限不循环小数的形式。我们把这类区别于有理数，然而可以在数轴上表示的数叫做无理数。

无限不循环小数叫做无理数。所有无理数的全体构成无理数集，记作 Q 。

前面我们已经知道，有理数集具有稠密性。在高等数学中将会让你看到：无理数的“个数”比有理数还要多哩！

2. 实数的概念

在现行中学课本中，实数是这样定义的：有理数和无理数统称实数。

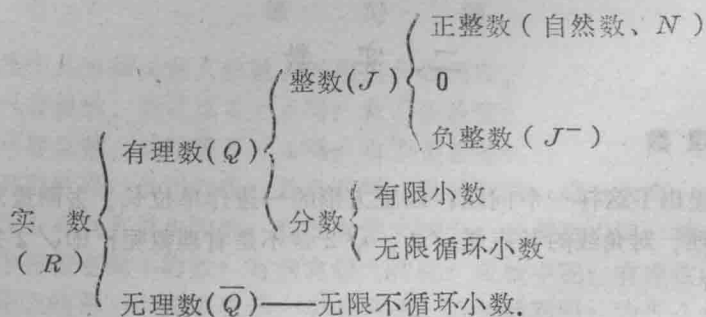
根据有理数和无理数的意义，也可以说：有限小数、无限循环小数和无限不循环小数统称实数。简言之：小数就是实数。

一切实数的全体构成实数集，记作 R 。

在实数集中，相反数和绝对值的概念和性质与有理数集中相应的概念和性质类似，只需将“有理数”换成“实数”就行了。这里不再赘述。

3. 实数的分类

实数可作如下分类：



在初中数学课本上我们所遇到的数都是实数，我们所碰到的字母都表示实数。

4. 实数的基本性质

数集由有理数集扩大到实数集后，有序性（任意两实数可比较大小）、稠密性（对任意 $a, b \in R, a < b$ ，存在 $c \in R$ ，使 $a < c < b$ ）、对四则运算的封闭性等仍然保持不变，这里不再重复。

实数集区别于有理数集的性质主要有以下几点：

(1) 实数集具有连续性

有理数虽然在数轴上处处稠密，但它的全体并没有将整个数轴“填满”。将无理数也表示在数轴上之后，整个数轴才被“填满”。全体实数与数轴上的所有点之间存在一一对应的关系。也就是说，每一个实数都可以用数轴上的唯一的一个点来表示；反之，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。实数集的这种性质叫做连续性。

由于实数集具有连续性，习惯上我们将数轴叫实数轴，有时我们也直接将数轴上的点叫做实数。

(2) 在实数集中开方运算并不总是可以实施的，但是在非负实数集 (R^+) 中，开方求算术根的运算总是可以实施的。即对任意非负实数开任意次方所得的算术方根也必是非负实数。

顺便指出，实数平方的非负性，即对任意 $a \in R$ ，有 $a^2 \geq 0$ ，也是实数的一个重要性质。

5. 实数的运算

在有理数集中成立的运算定律和加、减、乘、除，乘方的运算法则在实数集中也成立。

在这里着重指出有关开方运算的几个问题。

(1) 如果 $x^n = a$ ($n \in N, n > 1$)，则 x 叫做 a 的 n 次方根。求 a 的 n 次方根的运算，叫把 a 开 n 次方。 a 叫被开方数， n 叫根指数。

非负实数 a 的非负 n 次方根，叫 a 的 n 次算术根，记为 $\sqrt[n]{a}$ 。如 16 的 4 次方根是 2 和 -2，而 2 是算术根，记为 $\sqrt[4]{16} = 2$ 。0 的任何次算术根均为 0，即 $\sqrt[n]{0} = 0$ 。

(2) 初中代数中主要涉及算术根的运算。

算术根的加减法，是指同类根式（被开方数相同，根指数相等的根式）的合并。

如： $\sqrt{8} + 2\sqrt{2} - \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$ 。

在进行算术根的乘除法时，首先要将所有的根式化成同次根式（根指数相同的根式），方能进行运算。

$$\begin{aligned}\text{如: } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \div \sqrt[4]{8} &= \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{2^8} \div \sqrt[12]{2^9} \\ &= \frac{\sqrt[12]{2^{14}}}{\sqrt[12]{2^9}} = \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32}.\end{aligned}$$

(3) 算术平方根的运算是根式运算的重要内容。在进行运算时，下面两个性质是要经常用到的：

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad (a \geq 0).$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (a \in R).$$

6. 例题

例 1：分别指出下列数中的自然数、整数、有理数、无理数。

$$-\sqrt{16}, 0, 3.1416, \sqrt{3}, \pi, -\frac{2}{3}, 7.2\dot{3}\dot{6}, 0.313113111\cdots, 264.$$

解：自然数：264

整数： $-\sqrt{16}, 0, 264$

有理数： $-\sqrt{16}, 0, 3.1416, -\frac{2}{3}, 7.2\dot{3}\dot{6}, 264$

无理数： $\sqrt{3}, \pi, 0.313113111\cdots$

例 2：比较大小，并用“<”顺序连接起来：

$$(1) -291, 0, 0.001;$$

$$(2) -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5};$$

$$(3) \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{26};$$

解：(1) $-291 < 0 < 0.001$

$$(2) \text{通分 } -\frac{2}{3} = -\frac{40}{60}, \quad -\frac{3}{4} = -\frac{45}{60}, \quad -\frac{4}{5} = -\frac{48}{60}$$

$$\therefore -\frac{48}{60} < -\frac{45}{60} < -\frac{40}{60}$$

$$\therefore -\frac{4}{5} < -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3}$$

(3) 先化为同次根式

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}, \quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}.$$

$$\therefore \text{若 } 0 < b < a \text{ 则 } \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a}$$

$$\therefore \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{26} < \sqrt[6]{27}$$

$$\therefore \sqrt[3]{5} < \sqrt[6]{26} < \sqrt{3}.$$

例 3：若 $\sqrt{x^2-4x-5} + \sqrt{(x+1)^2} = 0$ ，求 x ，

解: $\therefore \sqrt{x^2-4x-5} \geq 0$

$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| \geq 0$$

而两式之和等于 0

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{x^2-4x-5} = 0 \\ |x+1| = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2-4x-5 = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = -1$.

例 4: 计算
$$\frac{\left[1\frac{3}{4} \div \sqrt{\frac{4}{9}} + 1.75 \times \frac{(-3)^2}{(-2)^3}\right] \div \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0.0325\right) \div (-20)^2} \div (0.3 + 6.79 \div 0.7)$$

解: 原式 =
$$\frac{\left(\frac{7}{4} \div \frac{2}{3} - \frac{7}{4} \times \frac{9}{8}\right) \times \frac{12}{7}}{(0.2125 - 0.0325) \div 400} \div (0.3 + 9.7)$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{4} \times \frac{3}{2} - \frac{7}{4} \times \frac{9}{8}\right) \times \frac{12}{7}}{0.00045} \div 10$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{3}{4}\right) \frac{7}{4} \times \frac{3}{2} \times \frac{12}{7}}{9} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{3}{2} \times \frac{12}{7}}{9} = 250.$$

例 5: 化简
$$\frac{\sqrt{18}}{1+\sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}} + \frac{3}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$$

解: $\therefore \sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{(3-\sqrt{3})^2} = 3-\sqrt{3}$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - \frac{6\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} + \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\ &= 6 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

练 习 题

1. 能否举出一个数, 它既是无理数, 又是分数? 为什么?

2. 用几何方法找出下列各数所对应的点

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{3}, \quad \sqrt{7}.$$

3. 写出在两个有理数 $a, b(a < b)$ 之间的一个有理数和一个无理数.

4. 证明无理数与有理数的和为无理数.

5. 证明不为零的有理数与无理数的积是无理数.

6. $\sqrt{9} = \pm 3$ 对吗? 为什么?

7. “-1.2 是 1.44 的平方根”这句话对吗? 为什么?

“1.44 的平方根是 -1.2”这句话对吗? 为什么?

“1.44 的算术平方根是 1.2”这句话对吗? 为什么?

8. 如果 b 是 a 的平方根, 能否断定 $-b$ 也是 a 的平方根?

9. 如果 b 是 a 的立方根, 能否断定 $-b$ 也是 $-a$ 的立方根?

10. 计算:

$$\sqrt[3]{\frac{26}{27}} - 1 - \sqrt[3]{-0.008} - \sqrt[3]{0.000216}$$

11. 把 $\sqrt{2}, 6, -1.414, 5\frac{1}{4}, 0, -4, \sqrt{9}, -\frac{3}{2}\pi, -\sqrt{20}, 0.4$ 用 “<” 连接起来.

12. x, y 取什么实数值时, $\sqrt{x-1} + |3-2y| = 0$ 成立?

13. 解关于 x 的方程 $4|x| - \sqrt{x^2} = a$. ($a \in R$)

14. x, y 为实数, 并且 $\sqrt{x+y-4} + \sqrt{xy-5} = 0$, 求 $x^2 + y^2$ 的值.

15. 设 x, y 为有理数, 且 $2x + y\sqrt{2} = y + 1 - 2x\sqrt{2}$, 求 x, y 的值.

(二) 代 数 式

贵定师范 包志超

代数式是初等代数研究的对象之一。由一些数和字母用运算符号连结起来的一组数学符号称为一个解析式，又称为数学式。

在初等数学里所指的运算，是指有限次的加、减、乘、除四种算术运算，以及乘方运算、开方运算、对数运算、三角运算和反三角运算。通常，把算术运算、开方运算和指数是有理数的乘方运算总称为代数运算，而把指数是无理数的乘方运算、对数运算、三角运算和反三角运算统称为初等超越运算。只含有代数运算的数学式子叫做代数式。

由于代数式中的字母代表的是数，因此它们不仅可以同数一样地进行运算，而且关于数的运算规律（如交换律、结合律、分配律等）对它们也适用。为了研究代数式的运算规律，我们根据代数式中所含有的运算种类进行分类后，再分别进行讨论。

代数式的分类如下：

只含有算术运算的代数式叫做有理式，其中，除式里不含有字母的有理式叫做整式，否则，称为分式。在整式中没有加减运算的，就叫做单项式，几个单项式的和叫做多项式。

含有开方运算的代数式叫做根式。

代数式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有理式} \\ \text{根式} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{整式} \\ \text{分式} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{array} \right.$

代数式是在一定的数集里进行研究的。即是说，代数式里的字母所能取的值，要受到一定的限制。我们把字母所有允许取的值组成的集合，称为代数式的定义域，代数式只有在它的定义域内才有意义。当代数式中的字母在其定义域内取值时，按照代数式所含有的运算进行计算后得到的结果，叫做代数式的值。这些值的全体所组成的集合，称为代数式的值域。

1. 整 式

整式的运算是其他代数式运算的基础，它不仅与解方程有着密切的联系，而且也是今后学习解析式恒等变形的基

(1) 单 项 式：

① 单项式，是指不含有加减运算的整式。

单项式中的数字因数叫做字母因式的系数，简称系数。如，在 $5x^2$ 中，5 是 x^2 的系数。如果一个单项式中只有字母因式，那么，它的系数应看成为 1。

如，在 xy 中，1 是 $x \cdot y$ 的系数。

有时在同时讨论几个量时，常用 a 、 b 、 c 表示常量，而用 x 、 y 、 z 等表示变量。这时，在一些单项式中，并不出现数字因式，如， ax^3 ， bx^2y ， cxy^2 等，但常认为其中的 x 、 y 等是变量， a 、 b 、 c 等是常量，因而把 a 、 b 、 c 等看作为系数。如，在 ax^3 中，把 a 看作是 x^3 的系数。

② 在一个单项式中，我们把所有表示变量的字母的指数和，称为这个单项式的次数。

一个不等于零的数叫做零次多项式；数零也看成是一个多项式，称为零多项式。

(2) 多项式

① 几个单项式的代数和叫做多项式。它当中的每一个单项式(包括它前面的符号)都叫做多项式的项；不含有表示变量的字母的项称为多项式的常数项。一个多项式中含有几个项就称为几项式。

② 一个多项式中，次数最高的项的次数，就叫这个多项式的次数。次数是几，就称这个多项式是几次多项式。

如， $ax+b$ 是一次二项式； $3x^3-2x+5$ 是三次三项式； $a_1x^n+a_2x^{n-1}+\dots+a_nx+a_{n+1}$ 是 n 次多项式。

由于多项式是它的各项的代数和，因此，多项式具有有理数的代数和的一切性质，其中重要的有以下两个：

(i) 任意交换多项式里各项的位置，多项式的值不变。

(ii) 把多项式里任意的几项结合成一组，多项式的值不变。

这两个性质在代数式的恒等变换中运用较多。

③ 多项式在进行加减运算时，为了方便，常常先按某一个字母的指数从大到小(或从小到大)的顺序进行排列，再进行计算。按这种方式来排列多项式，叫做按照这个字母的降幂排列(或升幂排列)。

如， $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ，对字母 a 来说，是按降幂排列；对字母 b 来说，是按升幂排列。

排列多项式时，是按照哪一个字母，这个字母就称为多项式的主要字母。多项式中所含主要字母的指数最大的项，叫做多项式的最高项；不含有主要字母的项，叫做最低项。

④ 多项式中所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项，叫做同类项。凡是常数项都可以看成同类项。

把多项式中的同类项合并成一项，叫做合并多项式的同类项，简称合并同类项。合并同类项时可按分配律，把同类项的系数相加，作为合并后的项的系数。

(3) 去括号与添括号的法则

代数里所研究的运算有六种。一般，在一个式子里，如果没有括号指明演算的顺序，那么应按以下两点进行演算：