

Methodology of
Multilevel Modeling

多层次模式方法论

阶层线性模式的关键问题与试解

现代工商管理经典教材

温福星 邱皓政 著

- 详细说明使用HLM的时机以及巢套数据ICC公式的释义
- 有关样本大小计算的议题介绍与两层HLM样本数决定文献的整理
- 详实介绍多层次研究个体层次与组织层次构念的信效度考验方法
- 相关HLM分析方法的介绍与示范
- HLM模式的评估
- HLM模式的诊断与估计
- 多层次调节中介效果的检验程序示范说明



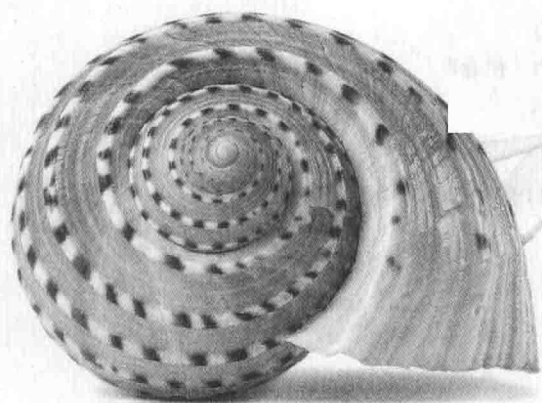
经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

Methodology of
Multilevel Modeling

多层次模式方法论

阶层线性模式的关键问题与试解

现代工商管理经典教材



温福星 邱皓政 著



经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

本书中文简体版由前程文化事业有限公司授权经济管理出版社独家出版发行。未经书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

北京市版权局著作权合同登记：图字：01-2014-0544 号

图书在版编目 (CIP) 数据

多层次模式方法论：阶层线性模式的关键问题与试解/温福星，邱皓政著. —北京：经济管理出版社，2014.8

ISBN 978-7-5096-2939-0

I. ①多… II. ①温… ②邱… III. ①经济统计学—计量经济学—统计方法—研究
IV. ①F222.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 017659 号

组稿编辑：陈 力

责任编辑：陈 力 侯春霞

责任印制：司东翔

责任校对：赵天宇

出版发行：经济管理出版社

(北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 A 座 11 层 100038)

网 址：www.E-mp.com.cn

电 话：(010) 51915602

印 刷：三河市延风印装厂

经 销：新华书店

开 本：787mm×1092mm/16

印 张：15

字 数：361 千字

版 次：2015 年 3 月第 1 版 2015 年 3 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 978-7-5096-2939-0

定 价：45.00 元

·版权所有 翻印必究·

凡购本社图书，如有印装错误，由本社读者服务部负责调换。

联系地址：北京阜外月坛北小街 2 号

电话：(010) 68022974 邮编：100836

序 一

这一阵子最火的事莫过于“豪小子”林书豪在纽约尼克队连续5场先发5连胜，且每场都有20分以上的得分与接近10次的助攻，特别是美国时间2012年2月14日对猛龙那一场，最后2.2秒出手划过天际的那一个三分球，又是继王建民之后的“台湾之光”。在那专属于欧美白人与黑人的NBA世界里，黄皮肤的亚洲人根本没有机会进入到这个篮球赛的最高殿堂，况且身高只有191公分的林书豪，他没有姚明的高度，在过去的球队与近两年的比赛一直是候补的板凳球员。但是，机会来了，这个候补且即将被释出的控球后卫在与篮网的替补时候，终于把他的真才实料表现出来。我看到的是机会是留给已经准备好的人，而这个准备好的人从他高中时代一直到哈佛大学都在准备，希望有朝一日能在NBA实现自己的愿望。

您准备好了吗？“多层次模式”是目前最流行的研究方法，它不是只要跑跑HLM就可以了，因为它有太多的基本工要准备。它涉及了测量、统计与方法学的知识，若没有经过一套完整的训练或教材学习，只依据跑出来的HLM报表就认为完全懂得多层次模式，不过是华而不实的拳脚功夫，不能真正获得多层次模式的精髓。这本书包含四篇文章的改写，分别是我与邱皓政教授合作的《多层次模型方法论：阶层线性模式的关键议题与试解》与《组织研究中的多层次调节中介效果：以组织创新气氛、组织承诺与工作满意的实证研究为例》两篇发表的文章，以及个人的两篇工作论文《多层次研究下个体层级研究变项效信度检验》与《多层次研究中组织变项聚合的探究》，从最根本的原理、方法与报表的解读，介绍了多层次模式的测量、统计与方法，可以说是现阶段最重要也是最完整的学习多层次模式的一套教材。

本书的内容基本上是从2007年起陆陆续续开始成型，历经多次的审稿与修改才能到完整的一本书的发行，这些都要感谢审查委员的指正与鞭策。本书的内容也在 $\alpha\beta\gamma$ 实验室不断地试教与学习，随着国外期刊新文章的不断出现，以及个人不断地尝试与创新，针对这本书部分内容现在个人有新的不同见解，但仍不影响本书的架构与内容，现阶段仍可以作为学习HLM进行多层次研究的工具书。

“得之于人者多、出自于己者少”，要感谢的人太多了，特别是已过世的林妙雀教授，与她认识是在辅大，她那时已升上教授且担任系主任，但她旁听了我在辅大心理研究所所

开的多层次模式的课程，在我负责的9个礼拜中，她从没缺席过。事后，她不断地提携后辈感染了我，也跟我合作写了一些文章，在她身上我第一次看到升上教授还那么拼的老师，因为她不仅和我，同时也和许多人一起合作与研究，不仅是学术，也还在替政府机构做项目策划。

从林书豪与林妙雀的身上，我看到了他们的共同点：准备与坚持。希望这本书通过发行，可以帮助想要学习多层次模式的人缩短学习的时间，帮助做好准备的工作，至于如何在多层次研究中发光发热，就是靠您自己的坚持。

温绍星

序 二

几个礼拜前，中国“台湾统计方法学学会”在东吴大学城区部举办例行讲座，温理事长邀请了一位年轻学者，主讲多层次模式应用在量表编制的相关议题。参与的人虽然不多，但是讲者仍然十分卖力，深怕台下的听众听不明白，认真回答问题，仔细说明数据意义，最后他提到，多层次模式对于社会科学是重要的一门方法学，应用的空间很大，但是还有很多议题值得深入探究，在学会里能够跟同好一起切磋，可以不感到孤单。我抬起头来，给予讲者一抹会心微笑作为回馈，很高兴这条寂寞公路又多了一个朋友，但是我却没说太多，少出了些声音。

学术是一条寂寞公路，是一位老师在闯荡学术圈多年所给脚注，特别是对于专注于统计方法学的朋友来说，可能听来特别心有戚戚焉。不论在国内外，多数学者的研究兴趣与学术专长通常都会与某个学科的次领域的内容议题有关，例如人事甄选、文化资本、学习障碍、组织创新等，如果听到有人的专长是统计方法、多层次模式，若不是被认为是统计系的老师，就是会被追问，除了方法，你的研究内容是什么？我通常会回答，我的内容就是统计方法，但是得到的响应通常都是：统计是工具，不是内容。一位年轻的同行学者跟我说，就因为这样，他决定放弃方法之路，改做有内容的东西，否则很难在圈内待下去。

或许您会问，在社会科学领域，为什么统计不能是内容，为什么会被认为没有内容，如果只是因为不是主流，那么有很多非主流的社会科学领域也不会被认为没有内容，如果是因为学者人数太少，声音小，也不至于被认为没有内容。一门学科或一个领域的定义，除了要有固有的知识疆域与可辨识的边界，也要有历史传承脉络与发展体系，这些我们都有，为什么还是不被认同。每次讲到这里，大家就忿忿不平，觉得自己是学术边缘人，有了被迫害的妄想。一位学生不平地说，老师，我们去不了统计系，那么你成立一个“统计方法学系”来收容我们这些人吧。

在科学哲学界有一位名人，叫做汤姆·斯孔恩（Thomas Kuhn，1922~1996），他写了一本重要著作《科学革命的结构》（The Structure of Scientific Revolutions），提到当典范科学hold不住的时候，异例蔓延将推翻主流，科学革命于焉爆发，新兴思想于是诞生，科学因而进步。所以，挥舞“多层次模式”大旗的我们，是不是革命前夕的起义者？革命成功之

后，是否就有我们大声说话的份儿了？这是不是就是我与温老师撰写这本书的目的，宣扬革命思想，等待咸鱼翻身？

每次在面对方法与内容问题的同时，我会不断反复检视自己所从事的研究，不断向亚马逊买入新书，想要看得更清楚，寻找方法与内容的界限在哪里。为了让别人听到我们的声音，于是写书、演讲、发论文、办工作坊。直到有一天，一位长辈提醒我，你可以自立山头，但是不要想做霸主，更不应沽名钓誉。一句话让我当场傻眼无语，心里不服气，向他说明我的苦衷。听完我的话之后，他只悠悠地说，小老弟，你的道行还是差了点，但是他也安慰我，只要心术正当，不旁门左道，不走火入魔，坚持下去最后可以得道解脱。因为人们初见学问时一切见山是山，潜心学习，心平气和。但有了一定深度则是见山不是山，开始盛气凌人，心生不满，其实似懂非懂，不算成熟。一旦参透道理成了气候，温文儒雅，就会有见山又是山的豁达。他说，学问的最高境界，就像练功，秘诀是在无招胜有招；计量领域有没有内容，不用多说，就是努力，道理是在无声胜有声。

一门学问的价值与内涵，是由一群有相同志趣的同好前仆后继所共同创造出来的智慧成果，一路从努力改善自己的盲点做起，积极解决科学上的各种问题，逐渐创造贡献，最终而被世人所接受，才能如愿在学术殿堂拥有一席之地。孔恩说的科学革命，是在解释科学哲学中的典范移转，长辈笑着说，要成为典范，先要有胸襟，把批评当药石，反而要感恩。眼前的各位是在经历做学问的一般过程，只要好好练功，无招胜有招，只要好好努力，无声胜有声。一门学问有没有价值，有没有内容，很难妄求他人，而是反求诸己，打好根基，共同努力，让一个社群自证验明，不必多说，更难强求。

眼前静躺着的这本书，无声诉说着多层次模式的方法论，算是这门方法比较接近成熟学问的一本书。如果它还是没有内容，说明了我与温福星老师要继续努力，如果它有了些许内容让您读到了，也就是你我大家又向一门成熟学问多迈了一步，距离见山又是山，又近了些。

邱皓政

2012年春于中国台湾师范大学管理学院

目 录

1 导论：从 GLM 到 HLM	001
1.1 概说	002
1.2 回归分析的基本概念	005
1.3 多层次模型分析的方法学概念	011
1.4 阶层线性模式的基本原理	014
2 组内相关系数议题	019
2.1 概说	020
2.2 组内相关系数的意义	020
2.3 忽略组内相关系数的影响	022
2.4 范例说明	025
3 样本数议题	035
3.1 概说	036
3.2 多层次样本数与判断	037
3.3 范例说明	040
4 变量聚合议题	045
4.1 概说	046
4.2 共识 (r_{wg}) 与信度 (ICC2)	049
4.3 共识与信度指标的使用标准	052
4.4 共识指标的计算	055
4.5 范例说明	057
5 中心化议题	063
5.1 概说	064

5.2	平减策略的比较	067
5.3	范例说明	074
6	固定与随机效果议题	079
6.1	概说	080
6.2	多层次模式中的随机与固定问题	082
6.3	随机与固定效果的差异与决策准则	084
6.4	范例说明	086
7	估计法议题	093
7.1	概说	094
7.2	多层次分析中的估计方法	095
7.3	REML 与 FUMML 的决策准则	097
7.4	范例说明	099
8	模式适配议题	103
8.1	概说	104
8.2	多层次模式的模式适配与比较	105
8.3	效果量与解释力	107
8.4	范例说明	110
9	估计强韧性议题	119
9.1	概说	120
9.2	统计假设检验与误差估计	120
9.3	多元共线性问题	127
9.4	范例说明	131
10	贝氏估计议题	135
10.1	概说	136
10.2	缩动与填补	137
10.3	范例说明	138

11 多层次中介与调节议题	143
11.1 概说	144
11.2 中介与调节效果	144
11.3 多层次中介与调节效果	147
11.4 范例说明	152
12 组织构念的信效度议题	167
12.1 概说	168
12.2 组织构念的计量指标	170
12.3 范例说明	175
附录	185
13 多层次研究个体层次构念信效度议题	189
13.1 概说	190
13.2 范例说明	191
附录一 研究变项题项	204
附录二 (13-4) 与 (13-5) S_{PW} 与 S_B^* 的不偏估计证明	205
14 结语	215
参考文献	221

1 导论：从 GLM 到 HLM

1.1 概说

1.1.1 多层次模式概念的发展

1.1.2 多层次模式的当代发展

1.2 回归分析的基本概念

1.2.1 基本回归原理

1.2.2 斜率参数的意义

1.2.3 截距参数的意义

1.3 多层次模型分析的方法学概念

1.3.1 随机取样与误差独立性

1.3.2 多层次分析的方法学概念

1.4 阶层线性模式的基本原理

1.4.1 阶层线性模式的特性

1.4.2 阶层线性模式的基本假设

1.4.3 结语

1.1 概说

多层次研究 (multilevel research) 可以说是当代社会科学领域最热门的新兴研究典范之一 (Bliese、Chan & Ployhart, 2007; Kozlowski & Klein, 2000), 而阶层线性模式 (hierarchical linear modeling, HLM; Bryk & Raudenbush, 1992) 则是一种将回归扩展到阶层资料结构 (hierarchical data structure) 的统计分析技术。虽然目前学界已有多种不同的方法与软件来分析多层次资料, 并快速扩展到纵贯资料、非线性模型、潜在变量模型, 但若非 Goldstein、Snijders、Bryk 与 Raudenbush 等学者在阶层线性模式的原理上进行深入探究并持续开发便捷的软件, 多层次研究或许未有今日的成熟发展。

1.1.1 多层次模式概念的发展

事实上, 社会科学研究者并非无视于多层次分析的重要性, 例如早在一甲子之前, Robinson (1950) 就已经指出不同层次的资料若无适当的分析与推论将会犯下严重的错误。但阶层线性模式迟至 20 世纪 90 年代才获得发展, 主要的原因之一是受限于一**般线性模式** (general linear models, GLM) 的传统分析框架, 其回归分析或是变异数分析^① 仅能处理单一层次变项间的关系, 无法同时处理包含个体与总体等不同层次的跨层级资料^②。如果要不同层次的分析单位整合在一个线性模式中, 必须将传统的 GLM 扩充到 HLM。在此同时, 模型的提出必须要有充分的理论依据或逻辑推论, 再加上资料分析方法及结果解释均要与研究设计有关, 因此阶层线性模式不仅是统计分析技术, 更是一种**统计方法学** (statistical methodology) (Courgeau, 2003)。

对于多层次资料结构的分析技术, 经过半个世纪的发展, 在不同领域各有不同的专业用语, 如表 1.1 所示。本书主要采用 Lindley 与 Smith (1972) 以及 Raudenbush 与 Bryk (2002) 的阶层线性模式 (HLM) 来说明多层次资料的分析技术, 主要是配合 HLM 软件的运用, 更重要的是因为 HLM 背后的统计语言最容易被理解, 同时可以应用在多种不同的研究情境中, 例如成长研究、组织效能、多变项分析等, 因为这些资料均存在着相同的结构特征: 阶层结构。

阶层线性模式最早是由 Lindley 与 Smith (1972) 利用线性模型的贝氏估计技术来处理复杂的误差结构所发展出来的概念, 后来被 Bryk 与 Raudenbush (1992) 和 Raudenbush 与

① 指固定效果模式的变异数分析。

② 指个体与总体等不同层次的误差项。

表 1.1 不同领域对于多层次模式的用语

社会学 生物统计	多层次线性模型	multilevel linear models
	混合效果模型	mixed-effect models
	随机效果模型	random-effect models
计量经济 统计学	随机系数回归模型	random-coefficient regression models
	共变量成分模型	covariance component models
	阶层线性模式	hierarchical linear models

Bryk (2002) 应用在 HLM 软件中而普及。事实上, Lindley 与 Smith (1972) 最初提出 HLM 模型时并没有获得重视, 因为他们的模型需要对非平衡资料进行共变量成分估计, 复杂的估计程序使得这套概念仅能应用在一些简单的问题上, 直到期望最大化演算法 (EM) 的进步 (Dempster、Laird & Rubin, 1977), 使得共变量成分估计的运用得以具体实现于一般研究议题中, 进而被导入多层次资料结构的分析 (Dempster et al., 1981)。例如 Strenio、Weisberg 与 Bryk (1983) 即应用此一技术解决横断资料中多层次结构的计算问题。后来, 又出现了其他通过迭代与加权的一般化最小平方方法的共变量成分估计方法 (Goldstein, 1986) 和 Fisher 得分 (scoring) 算法 (Longford, 1987), 使得阶层线性模式的数学模型与分析技术得以完备, 并导入统计软件, 例如 HLM (Raudenbush et al., 2000)、Mlxtor (Hedeker & Gibbons, 1996)、MLwiN (Rasbash et al., 2000)、SAS 子程序 Proc Mixed (Little et al., 1996)、VARCL (Longford, 1988), 以及完全贝氏方法则可应用 BUGS (Spiegelhalter et al., 1994) 来进行分析。

1.1.2 多层次模式的当代发展

过去 30 年来, 随着研究者对于多层次数据分析的重视以及技术的成熟, 关于多层次资料的应用也不断推陈出新, 例如结果变数已经扩展到不同形态的广义模型 (例如二分变量、多分类别变量等离散型变量、顺序变量、计数资料等)。为了能够处理非连续性的资料, Stiratelli、Laird 与 Ware (1984) 以及 Wong 与 Mason (1985) 最早导入最大概似 (ML) 估计进行一阶近似处理。Goldstein (1991) 和 Longford (1993) 沿用他们的概念进一步发展分析软件来处理不同类型的离散型结果变量的二层和三层的多层次模型, 但是不幸的是他们的技术仍有估计不准确的严重问题。后来由 Hedeker 与 Gibbons (1996) 以及 Pinheiro 与 Bates (1995) 提出了高斯-赫米特积分对最大概似值的准确近似算法, 后来被导入 Mixor 软件和 SAS Proc Mixed 软件。HLM 软件则使用高阶拉普拉斯转换这种十分准确且计算方便的近似方法 (Raudenbush、Yang & Yosef, 2000), 这些技术的发展使多层次模型的原理可以处理多种不同类型的结果变量。

其次, 多层次模式不仅可以应用在单纯的嵌套资料结构, 而且扩展到交互嵌套 (cross classified) 的资料结构。一般单纯的嵌套资料结构是指每一个下层单位仅嵌套在单一个上

层单位中,例如某班学生嵌套于某一班级,该班级又嵌套于某一学校。但是在某些研究情形下,嵌套结构可能会更为复杂。例如在管理研究中,常会遇到矩阵组织的状况,某一个员工属于某一个功能性部门的划分结果(例如行销单位),但是也属于另一个区域组织的划分结果(例如大中华事业群),此时即是一个交互嵌套的现象。Raudenbush (1993) 对于交互嵌套的资料结构提出了解决方案,并导入 HLM 软件中。

多层次模式的第三个新趋势是结果变量从单一变量扩展到多个变量的**多变量模式**(hierarchical multivariate linear modeling/multivariate multilevel modeling), 此项扩展最重要的应用在于纵贯资料与重复测量资料的分析。纵贯资料基本上是一种平衡设计(在没有遗漏值的情况下), 亦即每个个体的测量次数都相同, 并且测量时距间隔也相同。此时即可采用多变量重复测量的共变量模型进行分析, 同时处理自我相关误差和随机变化的斜率问题, 或是扩展到非限定模型, 对各时点间误差项的变异数共变量进行分析。SAS 软件的子程序 Proc Mixed、Hedeker 与 Gibbons (1996) 的软件 Mixor 以及 Raudenbush 等人 (2000) 的 HLM 软件, 以及现在 SPSS 的 Mixed 模块都可以用来分析成长模式, 此外也都利用这种策略来进行多结果变量结构的估计。

第四种新的应用取向, 是**潜在变量模型**(latent variable modeling) 的应用, 使得多层次模式也能处理潜在变量的估计。其原理也是一种多变量回归技术的延伸, 利用**完整资料**(complete data) 的推估来预测估计测量误差。换言之, 研究者搜集到的资料是一种观测资料(非完整资料), 借由观测资料来推估无法被观测的潜在变量 (Little & Rubin, 1987; Little & Schenker, 1995)。在具体做法上, 模式的第一层代表了带有测量误差的观测资料, 反映着潜在的“真实”资料之间的关联, 在第二层即可进行潜在变量的估计。此种模型可进一步地延伸到存在测量误差的预测变量的直接效果和间接效果的估计与分析, 但此一方法与现今的结构方程式的设定有些差异, 是属于较严格平行题项的潜在变量估计。此外, HLM 也可以套用于**项目反应理论**(item response theory), 以一种两层次模型进行测验的反应概率的项目特征分析, 找出与个体能力或潜在特质的函数。

多层次模式的第五种后期发展是导入贝氏估计法, 让多层次模型的统计模式可进行**贝氏推论**(Bayesian inference), 使得多层次估计更加精准且有弹性。传统以来, 统计推论都基于最大概似法 (ML) 来进行, 此法的优点是参数估计具有一致性, 并且具有渐近无偏性和有效性, 其前提必须是大样本下才能符合常态分配的要件。但是在多层次模型中, 高层或上层单位未必符合大样本条件, 此外, 各组内部的观察单位数也多呈现不平衡状况(例如各校抽取的学生数不同), 此时不平衡程度也会影响最大概似法的估计正确性, 而贝氏方法恰好能够补足其缺点。从统计原理来看, 贝氏估计利用蒙地卡罗技术对特定后验分配的近似演算, 例如**资料增广**(data augmentation) (Tanner & Wong, 1987) 和**吉布斯抽样**(Gibbs sampling) (Gelfand & Smith, 1990), 使得复杂的估计得以完成, 进而得到更接近

实际情况的标准误，从应用面来看，贝氏估计通过参数的后验分配信息的导入，可以对研究议题进行更有弹性的推论与分析。现在这些方法已经广为软件采用（Spiegelhalter et al., 1996; Rasbash et al., 2000），大大提高了运算与实际研究应用的便利性。而 HLM 软件是利用所观察到的资料，配合各单位所搜集的样本数计算信度，以实证贝式（empirical Bayesian）的方式来估计个体层次方程式的回归系数。

1.2 回归分析的基本概念

文献上关于 HLM 的原理已经有相当多的介绍（温福星，2006；Goldstein，2003；Hofmann，1997；Raudenbush & Bryk，2002；Snijders & Bosker，1999），本书不再赘述这些基本原理与技术，而是着眼于使用 HLM 背后的思考脉络与所潜藏的各种问题。在使用这些技术进行研究之前，研究者除了了解分析程序与解释方法之外，更必须熟悉多层次研究与传统研究的差异，并进一步了解新方法的限制与可能带来的新问题。例如，HLM 与 GLM 的最大差异在于 HLM 模式引进了不同层次的误差项，而 GLM 模式只有一个误差项，而且是属于个体层次。

过去，研究者若要探讨个体与总体等不同层次的跨层级资料，共有两种类型的回归分析可以处理，一是将总体层次的资料**解构**（disaggregated）或是进行**虚拟化处理**（dummy），使成为个体层次资料来进行个体层次的回归分析；二是将个体层次的资料**聚合**（aggregated）成总体层次的变项，进行总体层次的回归分析。这样的分析方法取决于研究目的，如果我们想研究的是个体与总体等不同层次的跨层级资料对个体层次结果变项的影响时，解构方式的个体层次回归分析就会遇到资料独立性与同质性假设被违反的可能，使得所估计的回归系数标准误被低估，导致容易拒绝虚无假说的型 I 错误膨胀结果。这是因为忽略了相同总体层次下的个体资料间存在高度的相关，亦即个体与总体层次的资料彼此间具有**内属、巢套、丛集、镶嵌**（nested、clustered、embedded）的结构特性，例如员工内属于公司、团队成员内属于团队等，由于多这一层关系，相同公司下的员工、相同团队下的成员，因组织文化、组织气氛等因素的潜移默化，使得员工或成员在同一组织（公司或团队）内较为相似，在不同的组织间较为不同。

1.2.1 基本回归原理

一般回归分析探讨一群来自母体抽样下的样本，研究一些自变量对我们所关心依变量的探讨，是否这些自变项能够显著或是有效地解释依变项的变异，或是这些自变项能够提供对依变项的了解，进而对其预测。如果仅有单一解释变量（X）来解释单一结果变量（Y）

时, 回归方程式如 (1-1) 所示:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i \quad (1-1)$$

在 GLM 取向的回归分析中, 随机抽样非常重要, 因为随机抽样得以使式 (1-1) 的误差项 (e_i) 服从以 0 为平均数、 σ_e^2 为变异数的常态分配。如果是对母群采用简单随机抽样时, 这些样本是反映母体的部分集合。例如我们关心父母的社会经济地位 (X) 是否对孩童的学业成绩 (Y) 产生影响, 则我们必须对测量单位 (孩童) 进行随机抽样, 通过对母体 (中国台湾的全体学童) 采用简单随机抽样进行调查, 根据其父母亲的教育程度、职业阶层, 计算出其父母亲的社会经济地位分数, 并搜集孩童的学业成绩, 最后得以取学业成绩 (Y) 对父母社会经济地位 (X) 作回归, 检验学童父母亲的社会经济地位对其学业成绩的影响, 其影响力由斜率 (β_1) 参数反映, β_0 为方程式的截距。

在最小平方方法 (ordinary least squares, OLS) 或是最大似法 (maximal likelihood, ML) 求解下, 回归系数 β_1 的估计值可由式 (1-2) 求得, 其意义为共变量占解释变量变异数的比值, 其数值大小会受到 X 与 Y 单位的影响, 而为未标准化系数, 从几何意义来看, 未标准化的斜率是指当 X 每变化一个单位时, 在 Y 所变化的数量。

$$\beta_1 = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{SP_{xy}}{SS_x} \quad (1-2)$$

如果将未标准化系数乘以 X 变项的标准差再除以 Y 变项的标准差, 即可去除单位的影响, 得到一个**标准化回归系数** (standardized regression coefficient), 如式 (1-3) 中的 β'_1 , 即为一般俗称的 Beta 系数 (未标准化系数一般习惯上以英文小写 b 来标示)。标准化回归系数也可视为将 X 与 Y 变项所有数值转换成标准化 Z 分数后, 所得到的 OLS 回归斜率。

$$\beta'_1 = \beta_1 \frac{s_x}{s_y} \quad (1-3)$$

由于标准化的结果, 式 (1-1) 中的截距项 β_0 随即消失, 而 β_1 系数的数值类似相关系数, 其可能数值范围应会介于 ± 1 之间^①, 其绝对值越大者, 表示解释力越强, 正负号则代表 X 与 Y 变项关系的方向。

如果 X 变量 (社会经济地位) 的数值为类别 (质性) 变量, 例如高、中、低三组而非表示强度的连续变量, X 对 Y 的解释即为变异数分析模型, 以一般线性模式来表现如下:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij} \quad (1-4)$$

公式 (1-4) 中, Y_{ij} 代表的是社会经济地位为类别 j 的受试者 i 的学业成绩, 每个受试者的社会经济地位属于 J 个类别中的一个, 社会经济地位 j 对学业成绩的影响以 α_j 来反映, e_{ij} 为误差。相同地, e_{ij} 仍服从以 0 为平均数、 σ_e^2 为变异数的常态分配。

① 在特殊情况下 (例如带有交互作用项或多项式回归中), 标准化回归系数的数值可能会超过 ± 1 的区间。

解释变量 X 不论是连续或类别变量，在一般线性模式中都有类似的模式组成要素：常数、解释变量效果与误差。常数是指没有解释变项时的依变项期望值 μ （例如变异数分析公式 (1-4)），或是解释变项为 0 时的依变项状态（方程式 (1-1) 的截距项 β_0 ），误差是依变项无法由常数与解释变项解释的部分。解释变量效果为研究者所关心的自变项效果，其影响力大小由斜率表示，斜率若未经过标准化处理，则反映了解释变量每单位变动量在结果变量上的增减量，但如果经过标准化处理，则等于相关系数的一种标准化估计数^①，但是此时截距项则会消失。当自变项数目不止一个时，解释变量效果就可能包含多种不同的解释效果项（例如主要效果与交互作用效果），此时对于斜率参数的解释就变得相对复杂。

在一般研究实务中，解释变量的影响力为研究者所关心的焦点所在，因此研究者所关注的焦点在于斜率而非截距。当自变项数目只有一个时所进行的回归分析称为简单回归（simple regression），斜率数值经过标准化后恰等于相关系数，换言之，当解释变量只有一个时，可以直接取相关系数作为 $X \rightarrow Y$ 的影响力。当解释变量超过一个以上时，解释变量效果就可能包含多种不同的解释效果项，每一个解释效果项的净影响力由个别的斜率参数所反映。例如式 (1-5) 中以 X_1 与 X_2 两个解释变量所进行的多元回归中， β_1 与 β_2 反映了简单效果（simple effect）， β_3 反映了交互作用效果（interaction effect）。

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{1i} X_{2i} + e_i \quad (1-5)$$

当反映交互作用的 β_3 数值为 0 或其效果可以被忽略时，可以将交互作用项自式 (1-5) 中移除，此时成为一个带有两个解释变量的多元回归（multiple regression）。但是当 β_3 数值不为 0 或其效果不可被忽略时，式 (1-5) 中的交互作用项就具有重要的讨论价值，此种回归称为交互作用回归（multiple regression with interaction）（Aiken & West, 1991），可以进行调节效果（moderation effect）的讨论，因此又称为调节回归（moderated multiple regression, MMR）。

1.2.2 斜率参数的意义

1.2.2.1 控制变量的干扰效果排除

不论是一般的多元回归或带有交互作用项的回归分析中，对于斜率参数的解释，必须注意其统计上的特性。如果模型中只有一个解释变量，在一般情况下^②，斜率的计算不受截距与误差项的影响，此时斜率是一种零阶估计数（zero-order estimator），对其解释不必

① 在一般的多层次回归中，例如 HLM 软体，为使截距项反映总体层次测量单位的估计数，皆使用未标准化回归系数。

② 在特殊情况下，例如时间序列数据，会发生误差项的自我相关现象而影响斜率的估计，在此服从回归分析基本假设。